УДК 519.688

Применение аппарата интервального анализа для поиска глобального экстремума функций

Пановский В.Н.

Аннотация

Объектом исследований в данной работе являются разработанные методы поиска глобального экстремума функций, основывающиеся на теории интервального анализа: метод отсечки мнимых значений, метод дихотомии прямого образа и метод колоний. Целями работы были выявление возможности эффективного применения аппарата интервального анализа как базовой составляющей методов глобальной оптимизации, формулировка и решение проблем, препятствующих его эффективному применению, разработка алгоритмов, составление плана улучшения разработанных алгоритмов. Итогом работы является формирование алгоритмического и программного обеспечения всех трех методов, эффективность которых продемонстрирована на примере поиска глобального экстремума нескольких типовых целевых функций, отличающихся различной структурой линий уровня.

Ключевые слова

глобальный экстремум; интервальный анализ; эффект обертывания; функция включения; оптимизация.

Введение

При проектировании конструкций современных самолетов и космических аппаратов возникает необходимость оптимизации характерных параметров. Ими обычно выступают вес, дальность полета, аэродинамические характеристики, точность работы, расход топлива [3,4]. Оптимизируемые параметры задаются проектировщиком исходя из некоторых ограничений, которые появляются в зависимости от физической постановки или из-за ограниченности ресурсов. Решением поставленной задачи оптимизации является объект, максимально точно соответствующий предъявленным требованиям – это и показывает важность применения методов оптимизации.

Рассматривается проблема поиска глобального экстремума функций многих переменных, область допустимых значений каждой из которых задана некоторым вещественным интервалом [3,4].

В ходе исследования возможности применения аппарата интервального анализа как базовой составляющей методов оптимизации были разработаны метод отсечки мнимых значений, метод дихотомии прямого образа и метод колоний. Каждый из алгоритмов использует свой подход к способу поиска глобального экстремума.

Автором сформированы детальные алгоритмы решения поставленной задачи и реализовано соответствующее программное обеспечение, которое работает на любых тестовых функциях, предоставляет подробную информацию о выполняемых действиях в текстовом и графическом (если возможно) режимах.

В работе приведено решение для типовых функций (в том числе и функций со сложной структурой линий уровня), для которых известно аналитическое решение. Полученные в примерах результаты достигаются с заданной точностью всеми тремя указанными выше методами.

Проблемы применения интервального анализа в методах оптимизации

На сегодняшний день существуют методы оптимизации, использующие различные подходы: стохастический, минимаксный, дифференциальный и другие [2]. Существующий аппарат интервального анализа предоставляет достаточно большой набор алгоритмов, позволяющих решать задачи оптимизации (алгоритм Мура-Скелбо, алгоритм Хансена и другие [1]). В их основе лежит использование сжимающих операторов и операторов сжатия границ [1]. Разработанные автором алгоритмы используют лишь оператор инвертора, что прежде всего дает возможность минимизировать любую функцию, так как инвертор не имеет ограничений (сжимающие операторы не являются универсальными, для их применения к решению задачи минимизации произвольной функции, необходимо комбинировать работу нескольких сжимающих операторов [1], что алгоритмически более сложно).

Эффективному применению аппарата интервального анализа в методах оптимизации препятствует ряд проблем, которые необходимо решить, чтобы эффективность применения интервального анализа была максимальной.

Первая сложность применения аппарата интервального анализа заключается в том, что интервальный анализ работает не с вещественными числами, а с совершенно другими структурами – вещественными интервалами. Именно поэтому необходимо заново переопределить все операции элементарной алгебры и разобрать, как изменились основные операции [1].

Вещественное интервальное число $[x] = [x_l; x_r] = \{\xi \in \mathbb{R} \mid x_l \leq \xi \leq x_r\}$ рассматривается как некоторое односвязное множество из $\mathbb{R}$. Будем называть x_l левой границей, а x_r правой границей, $\omega = x_r - x_l$ размером (шириной) интервала. Будем считать, что $[x_1] < [x_2]$, если $x_{1_r} < x_{2_l}$, $[x_1] > [x_2]$, если $x_{1_r} > x_{2_l}$. Вещественный интервальный вектор, или параллелотоп, размерности n рассматривается как прямое произведение n интервалов: $[X] = [x_1] \times [x_2] \times \ldots \times [x_n]$. Множество интервальных векторов будем обозначать $\mathbb{IR}^n$. Размер (ширина) параллелотопа – величина, равная максимальному из размеров образующих его компонент.

Привычной функции f, действующей из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ сопоставляется понятие функции включения [1]. Функцией включения называется интервальная функция $[f]$, действующая из $\mathbb{IR}^n$ в $\mathbb{IR}^m$, если

$$\forall [X] \in \mathbb{IR}^n, f([x_1] \times [x_2] \times \ldots \times [x_n]) \subset [f]([x_1] \times [x_2] \times \ldots \times [x_n]), \tag{1}$$

где $f([x_1] \times [x_2] \times \ldots \times [x_n]) = \{f(\chi) | \chi \in \mathbb{R}^n, \chi \in [x_1] \times [x_2] \times \ldots \times [x_n]\}$.

Функция включения позволяет гарантированно оценить образ функции независимо от того, каким бы он ни был: выпуклым или невыпуклым, связным или несвязным. В действительности очень многое зависит от способа построения данной функции.

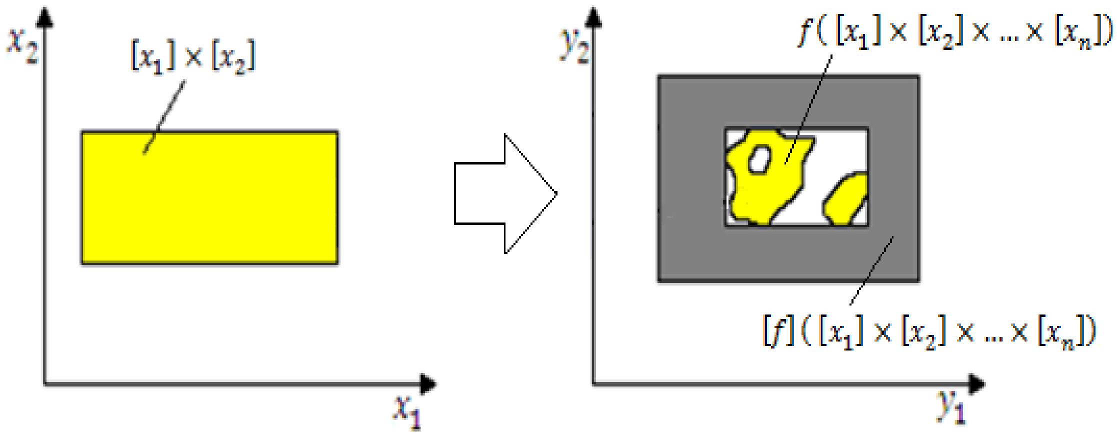

Рис.1. Образ прямоугольной области по функции f и по функции включения $[f]$

Как видно из рис. 1, функция включения может давать очень плохую оценку образа. Тем не менее, полученное покрытие (покрытием называется семейство множеств, объединение которых содержит заданное множество) всегда является множеством прямоугольной формы – параллелотопом, а прямоугольные области намного проще обрабатывать. В общем случае полученный параллелотоп состоит не только из истинных значений, которые принимает искомая функция, но и из тех, которые в принципе не могут быть достигнуты. Будем называть эти значения мнимыми (на рис.1 выделены серым цветом). Эффект, из-за которого образ функции дополняется до некоторого покрывающего его параллелотопа мнимыми значениями, называется эффектом обертывания [1]. Это и есть вторая сложность, возникающая при попытке применения аппарата интервального анализа в методах оптимизации. С данной проблемой можно справиться несколькими способами: можно разрабатывать новые способы построения функций включения, стремясь уменьшить множество мнимых значений, или же осуществлять проверку значений, полученных в ходе работы алгоритма.

В работе используется естественная функция включения $[f]$, которая получается для f замещением каждой вещественной переменной x_i интервальной переменной $[x_i]$ и каждого оператора или функции их соответствующим интервальным аналогом [2].

Разработанные методы оптимизации были протестированы на тестовых стандартных задачах условной оптимизации функций, во всех случаях решение было найдено с заданной точностью и за приемлемое время, что подтверждает возможность использования аппарата интервального анализа.

Постановка задачи

Пусть имеется некоторый параллелотоп $[S] = [s_1] \times [s_2] \times \ldots \times [s_n]$ и заданная на нем функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Необходимо найти параллелотоп $[P] = [p_1] \times [p_2] \times \ldots \times [p_n]$, такой что

$$x^* \in [p_1] \times [p_2] \times \ldots \times [p_n], \quad (2)$$

где x^* - точка минимума:

$$f(x^*) = min_{x \in [x_1] \times [x_2] \times \ldots \times [x_n]} f(x). \quad (3)$$

Классификация алгоритмов поиска глобального экстремума

В зависимости от способа обработки мнимой составляющей, вырабатываемой функцией включения, алгоритмы, использующие аппарат интервального анализа, условно можно разделить на следующие категории:

- прямые;

- реальные;

- исследующие.

Перед объяснением схем работы алгоритмов введем ряд понятий. Прямой образ функции f на некоторой области поиска $[X]$ – это параллелотоп $[f]([X])$. Инвертор – функция $\mathcal{Inv}(f, [S], [F], \varepsilon)$, которая по заданному параллелотопу $[F]$, функции f и параметру точности ε находит в исходной области поиска $[S] = [s_1] \times [s_2] \times \ldots \times [s_n]$ множество параллелотопов $\mathcal{P}$ такое, что $\forall [X] \in \mathcal{P}$:

$$[X] \subset [S], \omega([X]) \geq \varepsilon \text{ и } [f]([X]) \subset [F] \text{ или } [X] \subset [S], \omega([X]) < \varepsilon \text{ и } [f]([X]) \cap [F] \neq \emptyset. \quad (4)$$

Инвертированием точки называется применение инвертора к вещественному вектору (в этом случае берется параллелотоп, состоящий из точечных интервалов, то есть интервалов, левая и правая границы которых совпадают). Сжиманием множества мнимых значений называется операция удаления из прямого образа части значений, возникающих вследствие эффекта обертывания. Проверка на наличие точки с меньшим (большим) значением необходима для определения, является ли выбранная ранее точка точкой глобального минимума (максимума). Для проверки используется описанный ранее инвертор, если при его применении к точки с меньшим (большим) значением выработанное множество параллелотопов непустое, то проверка считается выполненной удачно, в противном случае проверка неудачна.

Прямые методы ищут оптимальную точку (глобальный минимум или максимум) с помощью инвертора и прямого образа.

Рис.2. Схема работы прямых методов

Реальные методы, так же как и прямые, используют инвертор при поиске глобального экстремума. Основным отличием является то, что перед стадией поиска идет некоторая подготовка полученного с помощью функции включения прямого образа – происходит уменьшение множества мнимых значений.

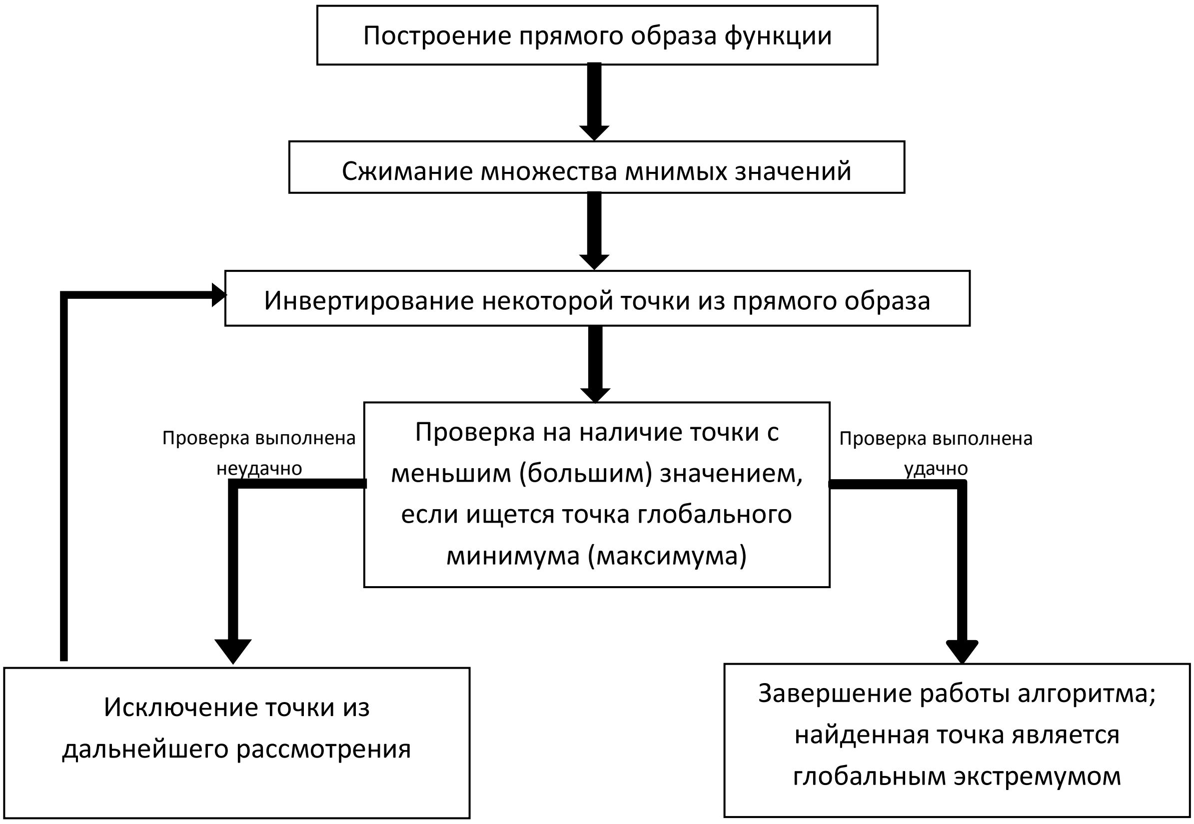

Рис.3. Схема работы реальных методов

Исследующие методы отличаются от ранее описанных всей процедурой работы: отсутствуют стадии уменьшения множества мнимых значений, не используется инвертор образа. Локализировать глобальный экстремум можно различными способами, например разработанный метод колоний производит локализацию за счет разбиения области поиска и комбинированного изучения поведения функции на участках полученного разбиения.

Стратегия метода дихотомии прямого образа

Данный метод относится к прямым методам. Вычисляется прямой образ функции на области поиска и обозначается как целевой интервал. Далее на каждой итерации алгоритма целевой интервал делится на две части (из $[y_l; y_r]$ получаются $\left[y_l; \frac{y_l+y_r}{2}\right]$ и $\left[\frac{y_l+y_r}{2}; y_r\right]$). Далее применяется инвертор к первой части. Если выработанное им множество непустое, то проверяется условие точности, в случае его невыполнения, первая часть принимается за новый целевой интервал, начинается новая итерация алгоритма, если же условие точности выполняется, то из выработанного инвертором множества выбирается произвольный параллелотоп, который гарантированно будет содержать точку минимума. Если выработанное инвертором при применении к первой части пустое, то вторая часть принимается за новый целевой интервал и алгоритм начинает новую итерацию.

Гарантия содержания параллелотопом точки глобального минимума обеспечивается тем, что прямой образ функции на некотором множестве имеет структуру, изображенную на рис.4.

Рис.4. Структура прямого образа

Интервалы $[y_l; \widetilde{y}_l]$ и $[\widetilde{y}_r; y_r]$ состоят из мнимых значений (за исключением чисел $\widetilde{y}_l$ и $\widetilde{y}_r$). В процессе итераций алгоритма целевой интервал может:

- состоять из части интервала $[y_l; \widetilde{y}_l]$. В этом случае инвертор выработает пустое множество, и данный интервал использоваться не будет;
- состоять из интервала $[y_l; \widetilde{y}_l]$ и части $[\widetilde{y}_l; \widetilde{y}_r]$. Для такого интервала инвертор выработает непустое множество и интервал будет дальше использоваться алгоритмом. Если на следующих итерациях структура целевого интервала будет сохраняться, то приближение к $\widetilde{y}_l$ - значению функции в точке глобального минимума, будет происходить слева;
- состоять из части $[\widetilde{y}_l; \widetilde{y}_r]$ или из $[\widetilde{y}_l; \widetilde{y}_r]$ и части $[\widetilde{y}_r; y_r]$. Для такого интервала инвертор выработает непустое множество и интервал будет дальше использоваться алгоритмом. Приближение к $\widetilde{y}_l$ будет происходить справа.

Таким образом, целевой интервал вне зависимости от своей структуры будет сходиться к интервалу, содержащему $\widetilde{y}_l$. Множество, выработанное инвертором, примененным к такому целевому интервалу, будет содержать точку глобального минимума.

Алгоритм метода дихотомии прямого образа

Шаг 1. Задать $[S]$ – область поиска, ε – параметр точности, отвечающий за размер параллелотопа во множестве $\mathcal{P}$, которое будет вырабатываться инвертором, и ζ – параметр точности остановки алгоритма. Рекомендуется выбирать ε и ζ одного порядка, так как в противном случае, точность ответа будет снижена вследствие того, что либо произойдет окончание работы алгоритма по критерию малости инвертируемого интервала, либо найденный параллелотоп, содержащий точку глобального минимума, будет слишком большим.

Шаг 2. С помощью естественной функции включения $[f]$ найти прямой образ $[Y]$ функции f на области поиска $[S]$.

Шаг 3. Дихотомически разделить интервал $[Y] = [y_l; y_r]$ на два интервала $[Y_l] = \left[y_l; \frac{y_l+y_r}{2}\right]$ и $[Y_r] = \left[\frac{y_l+y_r}{2}; y_r\right]$.

Шаг 4. Инвертировать интервал $[Y_l]$. В ходе данного шага выработается множество параллелотопов $\mathcal{P} = \mathcal{Inv}(f, [S], [Y_l], \varepsilon)$.

Шаг 5. Если множество $\mathcal{P}$, вырабатываемое инвертором непустое, перейти к шагу 6, если пустое – к шагу 7.

Шаг 6. Если $\omega([Y_l]) < \zeta$, то произвольный элемент из множества $\mathcal{P}$ гарантированно содержит точку глобального минимума искомой функции. Если $\omega([\mathrm{Y_l}]) \geq \zeta$, то положить интервал $[Y]$ равным $[Y_l]$ и вернуться к шагу 3.

Шаг 7. Положить интервал $[Y]$ равным $[Y_r]$ и вернуться к шагу 3.

Стратегия метода отсечки мнимых значений

Данный метод относится к реальным методам. Его стратегия схожа со стратегией метода дихотомии прямого образа. Единственное отличие – наличие стадии сжимания прямого образа. После вычисления прямого образа функции на области поиска к нему применяется оператор сжатия, который удаляет из прямого образа часть мнимых значений, уменьшая тем самым целевой интервал.

Алгоритм метода отсечки мнимых значений

Шаг 1. Задать $[S]$ – область поиска, δ - параметр сетки ($\zeta \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), ζ - параметр разбиения и ε – параметр точности при инвертировании. Рекомендуется выбирать параметр сетки δ не превышающим 5, так как количество параллелотопов, образуемых на шаге 2 алгоритма равно $2^{n^{\delta}}$, где n – размерность параллелотопа. Параметры разбиения и точности при инвертировании определяются так же, как и в методе дихотомии прямого образа.

Шаг 2. Вследствие наличия зависимости количества мнимых значений от размера области поиска и структуры функции (промежутков монотонности, точек разрыва и т.п.) строится разбиение области поиска, для последующего сжатия множества мнимых значений, следующим образом:

Шаг 2.1. Создать множество параллелотопов Ξ, состоящее из единственного элемента $[X]$.

Шаг 2.2. Если δ равно нулю, закончить построение разбиения и перейти к шагу 3. Иначе перейти к шагу 2.3.

Шаг 2.3. Создать временное множество параллелотопов $T = \emptyset$.

Шаг 2.4. Для каждого параллелотопа из Ξ выполнить следующую процедуру:

Шаг 2.4.1. Поместить в параллелотоп точку (положение точки может определяться случайным образом или оговариваться заранее).

Шаг 2.4.2. Разделить относительно помещенной точки параллелотоп на 2^n непересекающихся параллелотопов. Пусть $\tau = \tau_1 \times \tau_2 \times \ldots \times \tau_n$ – точка разбиения, $[X]$ – делимый параллелотоп. Процедура деления состоит из n шагов. На первом шаге исходный параллелотоп делится на два параллелотопа $[X_1] = [x_{1_l}; \tau_1] \times [x_{2_l}; x_{2_r}] \times \ldots \times [x_{n_l}; x_{n_r}]$ и $[X_2] = [\tau_1; x_{1_r}] \times [x_{2_l}; x_{2_r}] \times \ldots \times [x_{n_l}; x_{n_r}]$. На втором шаге каждый из полученных на первом шаге параллелотопов делится на два других. Получаем 4 параллелотопа: $[X_{11}] = [x_{1_l}; \tau_1] \times [x_{2_l}; \tau_2] \times \ldots \times [x_{n_l}; x_{n_r}]$, $[X_{12}] = [x_{1_l}; \tau_1] \times [\tau_2; x_{2_r}] \times \ldots \times [x_{n_l}; x_{n_r}]$, $[X_{21}] = [\tau_1; x_{1_r}] \times [x_{2_l}; \tau_2] \times \ldots \times [x_{n_l}; x_{n_r}]$, $[X_{22}] = [\tau_1; x_{1_r}] \times [\tau_2; x_{2_r}] \times \ldots \times [x_{n_l}; x_{n_r}]$. И так далее.

Шаг 2.4.3. Каждый из полученных параллелотопов добавить в множество T.

Шаг 2.5. Заменить содержимое множества $\varXi$ содержимым множества T.

Шаг 2.6. Уменьшить δ на единицу и вернуться к шагу 2.2.

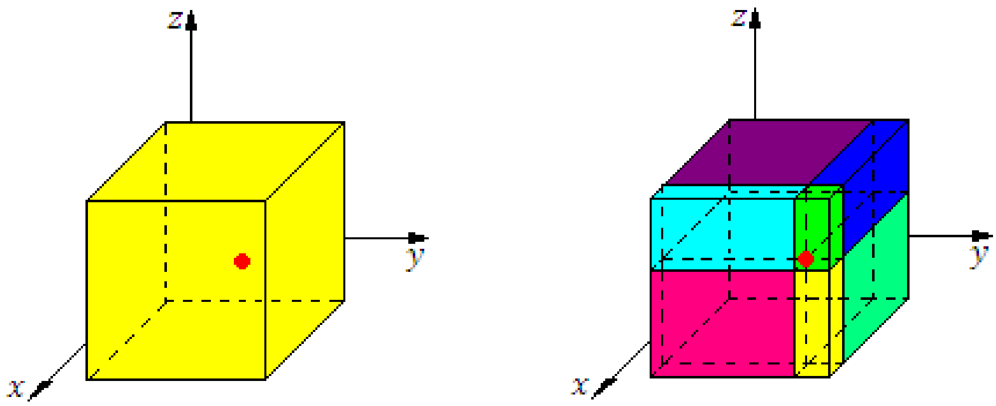

Рис.5. Пример деления параллелотопа

Шаг 3. Положить начальный образ $[\varUpsilon] = \emptyset$.

Шаг 4. Последовательно перебирая все параллелотопы $[\xi] \in [\varXi]$, выполнить: $[\varUpsilon] = [\varUpsilon] \cup [f]([\xi])$.

Шаг 5. Разбить образ $[\varUpsilon]$ на непересекающиеся интервалы шириной ζ: $[\varUpsilon] = [y_1] \times [y_2] \times \ldots [y_l]$, где l – число полученных интервалов.

Шаг 6. Поочередно инвертировать каждый из полученных на шаге 5 интервалов $(\mathcal{P}_i = \mathcal{Inv}(f, [S], [y_i], \varepsilon), i = \overline{1, l})$. Как только выработанное инвертором множество $\mathcal{P}_i$ будет непустым, произвольный параллелотоп из полученного множества гарантированно будет содержать точку глобального минимума.

Программное обеспечение методов дихотомии прямого образа и отсечки мнимых значений

С помощью среды разработки Microsoft Visual Studio 2010 на языке C# создана программа, реализующая методы дихотомии прямого поиска и отсечки мнимых значений.

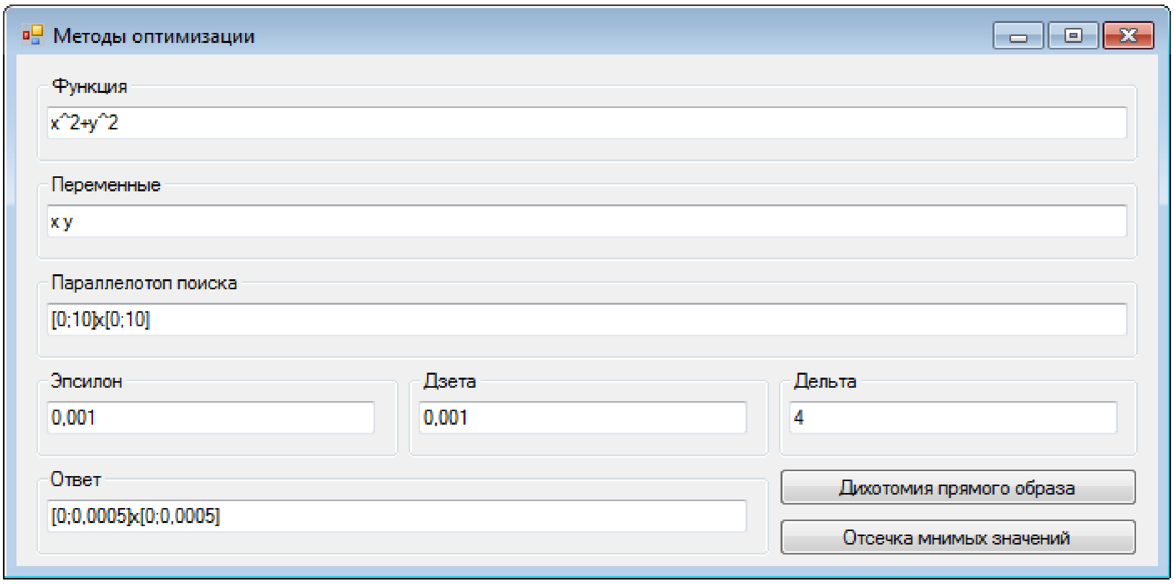

Рис.6. Основное окно программы

В поле «Функция» пользователь вводит функцию, глобальный минимум которой необходимо найти (программа производит автоматический разбор выражения с помощью написанного автором парсера – составляющей, выполняющей лексический анализ); в поле «Переменные» вводятся переменные, от которых зависит функция; в поле «Параллелотоп поиска» вводится исходная область, которая будет исследоваться; в поля «Эпсилон», «Дзета» и «Дельта» вводятся параметры точности ε, ζ и δ соответственно. По нажатию кнопок с названием методов происходит поиск точки глобального минимума соответствующим методом. Как только параллелотоп, гарантированно содержащий точку глобального минимума будет получен, он будет выведен в соответствующее поле «Ответ». Кроме того, листинг работы программы выводится в текстовый файл, что позволит при необходимости разобрать процесс работы метода.

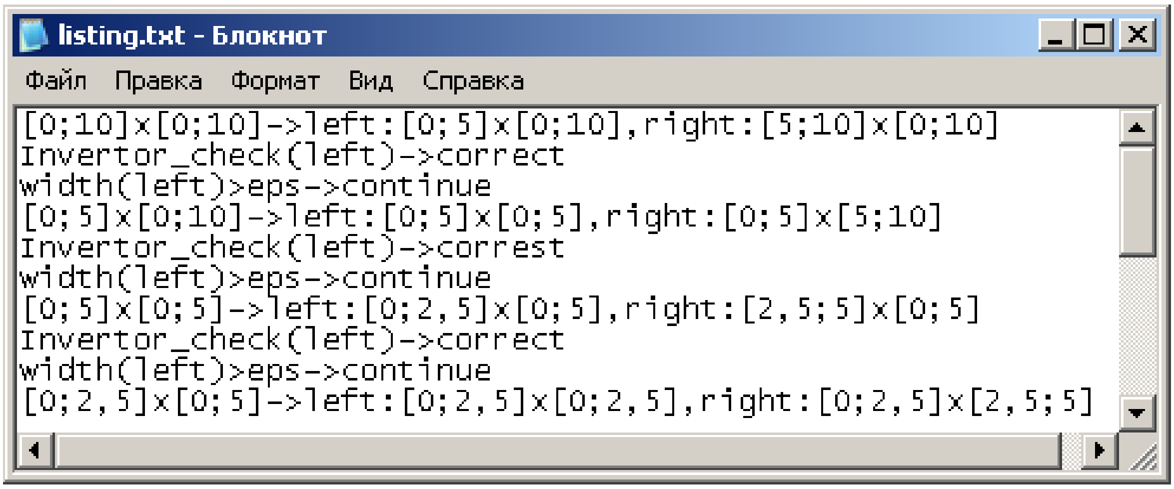

Рис.7. Пример листинга, генерируемого программой

Стратегия метода колоний

В основе метода колоний лежит принцип поиска лучшего места обитания. На некоторую землю (аналог области поиска) заселяется группа людей, которая, взаимодействуя внутри себя, ищет наилучшее место обитания. Критерием, по которому определяется, насколько хорошо жить на том или ином участке земли является значение целевой функции на нем (чем меньше – тем лучше). В настоящем методе поиск ведется за счет взаимодействия трех типов людей:

- королей (занимают пригодную для обитания местность, именно в них может находиться точка глобального минимума);

- разведчиков (исследуют неизведанные местности с помощью естественной функции включения);

- ученых (глубокое исследование неизведанных местностей).

Каждый из участков земли может принадлежать одному из типов земель:

- неизведанный (ни разу не подвергнут анализу, точка глобального минимума может как находиться внутри, так и отсутствовать);

- пригодный (предположительно содержит точку глобального минимума);

- запрещенный (земля была проверена и гарантированно не содержит точку глобального минимума).

Сам алгоритм состоит из нескольких стадий:

- создание мира (задается область поиска, параметры точности, количество людей);

- расселение;

- действие;

- анализ и перегруппировка земель;

В алгоритме есть 6 стратегий расселения людей:

-«all to one (rouges+scientists)» – заселяет всех людей в одну подобласть (в этом случае область делится на всех людей, каждая из полученных подобластей исследуется отдельным человеком);

-«all to one (rouges)» – заселяет всех разведчиков в одну подобласть (в этом случае область делится на всех разведчиков, каждая из полученных подобластей исследуется с помощью построения прямого образа);

-«all to one (scientists)» – заселяет всех ученых в одну подобласть (в этом случае область делится на всех ученых, каждая из полученных подобластей исследуется с помощью построения непрямого образа);

-«simple spread (rouges+scientists)» – распределяет всех людей на все подобласти (каждая из областей исследуется отдельным человеком; если число людей меньше, чем количество неизведанных подобластей, то некоторые подобласти останутся незаселенными);

- «simple spread (rouges)» – распределяет всех разведчиков на все подобласти (каждая из областей исследуется с помощью построения прямого образа; если число разведчиков меньше, чем количество неизведанных подобластей, то некоторые подобласти останутся незаселенными);

- «simple spread (scientists)» – распределяет всех ученых на все подобласти (каждая из областей исследуется с помощью построения непрямого образа; если число ученых меньше, чем количество неизведанных подобластей, то некоторые подобласти останутся незаселенными);

Алгоритм метода колоний

Шаг 1. Создание мира.

Шаг 1.1. Задать $[X]$ – область поиска, r - число разведчиков, s - число ученых, δ - число областей, ε – параметр точности, отвечающий за размер параллелотопа, содержащего точку минимума. Число королей изначально равно одному.

Шаг 1.2. Исходная область разбивается на 2^{δ} подобластей (см. шаг № 2.4.2 метод отсечки мнимых значений).

Шаг 1.3. Начальное расселение всех людей в произвольную подобласть, которая будет считаться наилучшей. На данном шаге считается что одна единственная область, на которой находятся все люди является пригодной, остальные участки – неизведанные.

Шаг 2. Вторичное расселение. На этой стадии ученые и разведчики меняют свое местоположение (местоположение не меняют только короли, так как они служат индикатором земли, потенциально содержащей точку глобального минимума).

Шаг 3. Действие. Разведчики и ученые исследуют область, определяя прямой и непрямой образы (непрямым образом является прямой образ, к которому применена операция сжимания множества мнимых значений).

Шаг 4. Анализ и перегруппировка земель. Возможно несколько вариантов:

- образ пересекается с одним из образов земель, где находится король (в этом случае земле присваивается статус пригодной, туда заселяется король);
- образ не пересекается ни с одним из образов земель, где находится король и содержит большие значения (в этом случае земле присваивается статус запрещенной);
- образ не пересекается ни с одним из образов земель, где находится король и содержит меньшие значения (в этом случае земле присваивается статус пригодной, туда заселяется король, все оставшиеся земли со статусом пригодных становятся запрещенными и их короли уничтожаются).

Шаг 5. Если остались неизведанные земли – переход к шагу 2, если неизведанных земель нет – отсортировать пригодные параллелотопы по возрастанию их прямых образов (пересекающиеся параллелотопы упорядочиваются по ширине, начиная с большего). Если размер первого меньше ε - закончить работу алгоритма (полученный параллелотоп содержит точку глобального минимума), в противном случае перейти к шагу 1, взяв полученный параллелотоп как новую область поиска.

Программное обеспечение метода колоний

С помощью среды разработки Microsoft Visual Studio 2010 на языке C# создана программа, реализующая метод колоний.

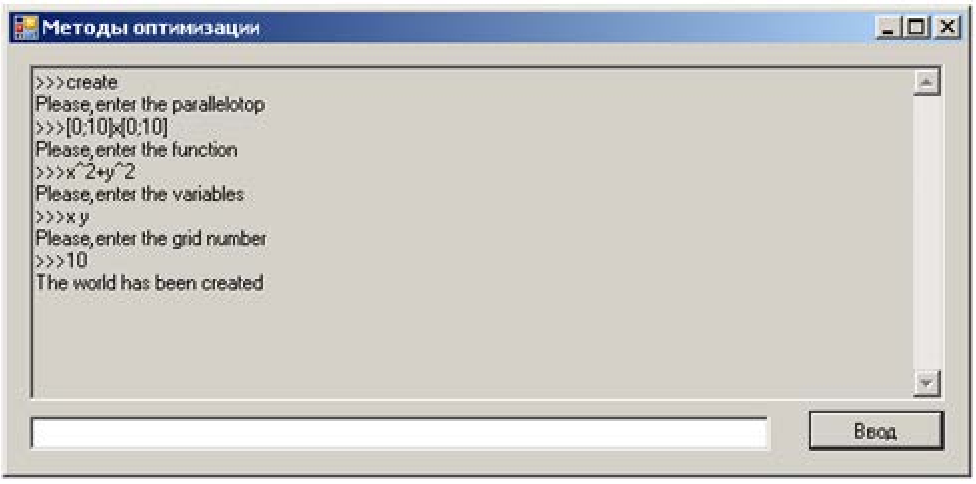

Рис.8. Основное окно программы

В активное текстовое поле пользователь вводит команды, управляя тем самым работой алгоритма.

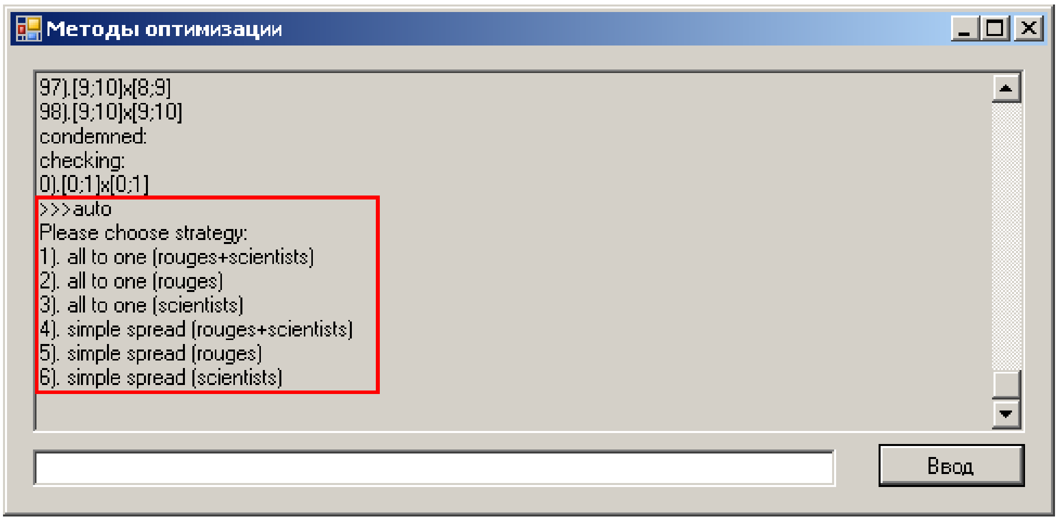

Рис.9. Автоматическое расселение

Реализовано как ручное расселение (команда «transfer»), так и автоматическое в соответствии с выбранной стратегией. Это было сделано, чтобы пользователь мог подстраивать алгоритм под решение конкретных задач. Например, «simple spread (rouges)» выгодно применять в случае функций, где каждая переменная в выражении для функции f(x) встречается один раз, так как в этом случае эффект обертывания минимален и сжатия множества мнимых значений не является необходимым.

Как и в случае с программной компонентой, реализующей методы дихотомии прямого образа и отсечки мнимых значений, листинг работы алгоритмов выводится в отдельный текстовый файл.

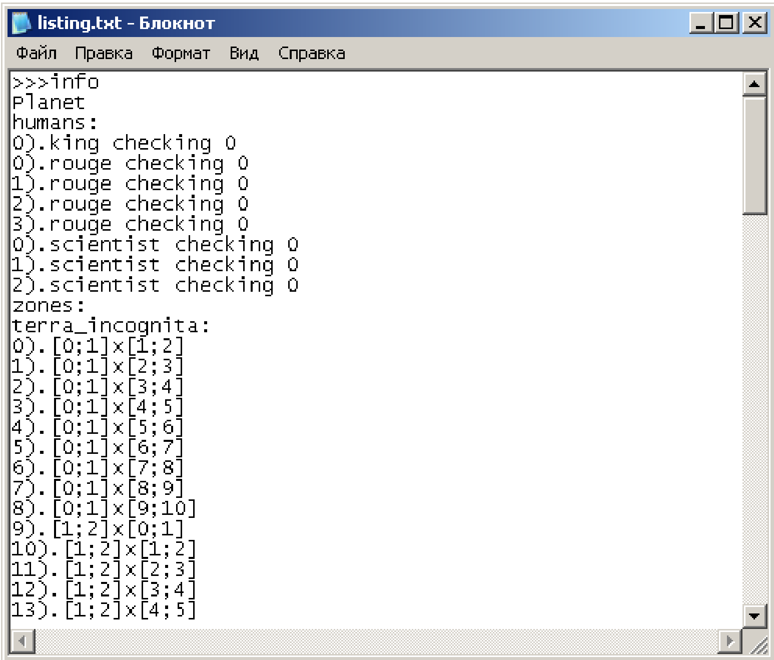

Рис.10. Пример листинга, генерируемого программой

Дополнительно, создается графический файл, который хранит историю перемещений людей после стадии «расселение».

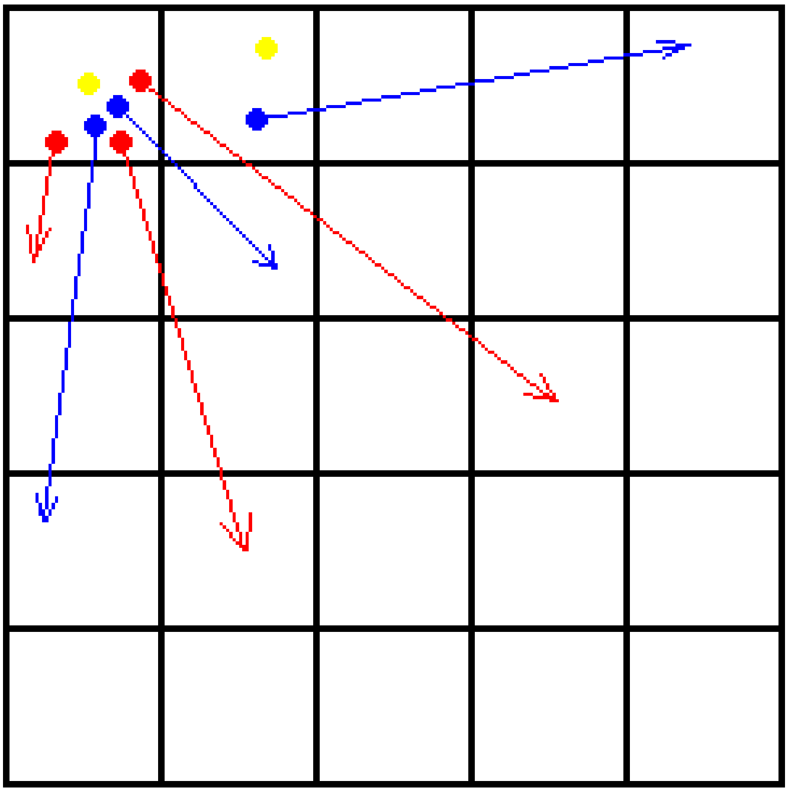

Рис. 11. Стадия расселения

Тесты

С помощью разработанных программ были получены результаты минимизации различных функций. Таблично оформлены результаты работы методов для различных параметров точности.

Пример 1. Целевая функция $f(x) = x^2 + y^2$, область поиска $[X] = [-100; 100] \times [-100; 100]$. Точное решение: $x_1 = x_2 = 0$.

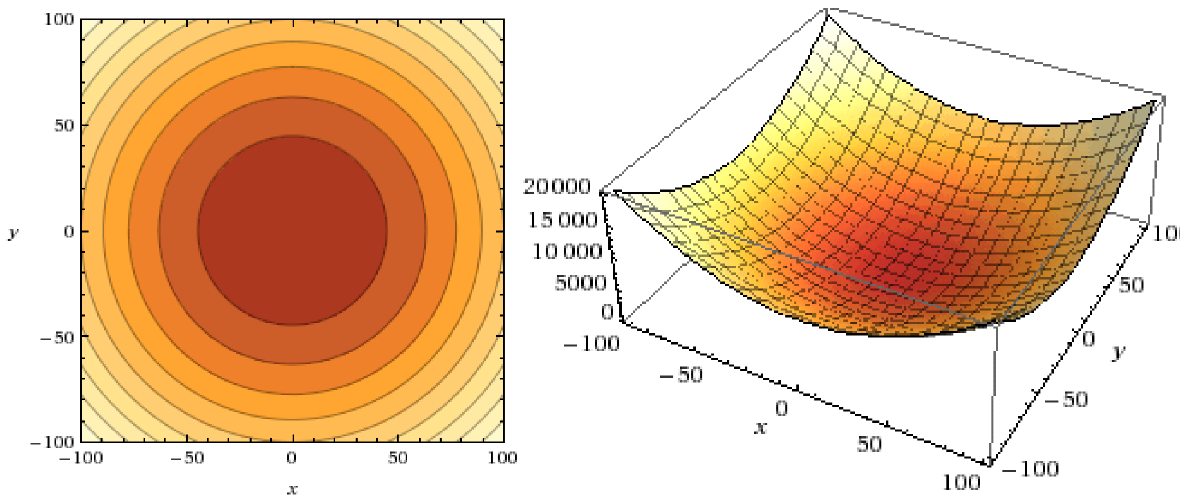

Рис.12. Линии уровня и график функции $f(x, y) = x^2 + y^2$

Результаты работы методов №1

Название метода	Параметры точности	Параллелотоп, содержащий точку глобального минимума	
		первая составляющая	вторая составляющая
Метод дихотомии прямого образа	$\varepsilon = 0{,}001$	$[0; 0{,}0005]$	$[0; 0{,}0005]$
Метод отсечки мнимых значений	$\zeta = 10, \delta = 0{,}001, \varepsilon = 0{,}001$	$[-0{,}0002; 0{,}0003]$	$[-0{,}0004; 0{,}0001]$
Метод колоний	$r = 5, s = 2, \delta = 100, \varepsilon = 0{,}001$	$[-0{,}00023; 0{,}0004]$	$[0; 0{,}00967]$

Пример 2. Целевая функция $f(x) = x^2 + (x + y)^2$, область поиска $[X] = [-100; 100] \times [-100; 100]$. Точное решение: $x_1 = x_2 = 0$.

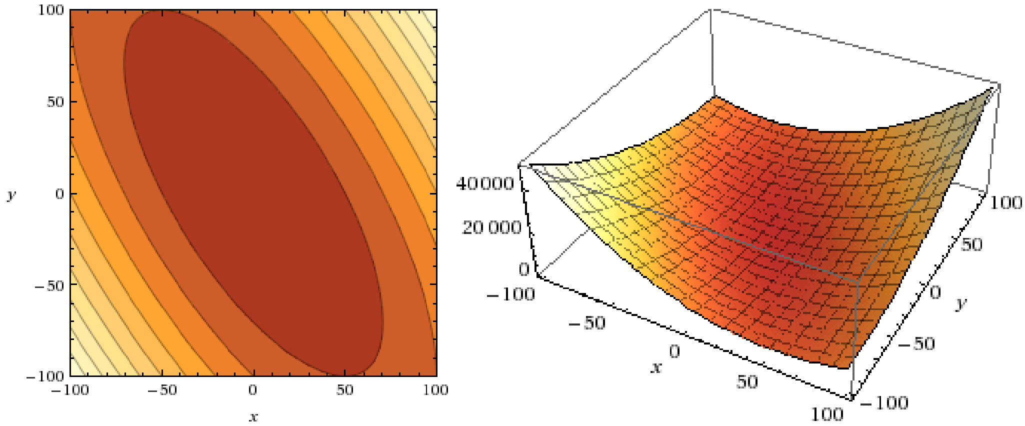

Рис.13. Линии уровня и график функции $f(x, y) = x^2 + (x + y)^2$

Результаты работы методов №2

Название метода	Параметры точности	Параллелотоп, содержащий точку глобального минимума	
		первая составляющая	вторая составляющая
Метод дихотомии прямого образа	$\varepsilon = 0{,}001$	$[-0{,}00025; 0{,}00025]$	$[-0{,}001; 0]$
Метод отсечки мнимых значений	$\zeta = 10, \delta = 0{,}001, \varepsilon = 0{,}001$	$[-0{,}0001; 0{,}0004]$	$[-0{,}0004; 0{,}0001]$
Метод колоний	$r = 5, s = 2, \delta = 100, \varepsilon = 0{,}001$	$[-0{,}000178; 0{,}0004]$	$[-0{,}0003; 0{,}006627]$

Пример 3. Целевая функция $f(x) = -x \cdot sin\left(\sqrt{|x|}\right) - y \cdot sin(\sqrt{|y|})$, область поиска $[X] = [-500; 500] \times [-500; 500]$. Точное решение: $x_1 = x_2 = 420{,}96$.

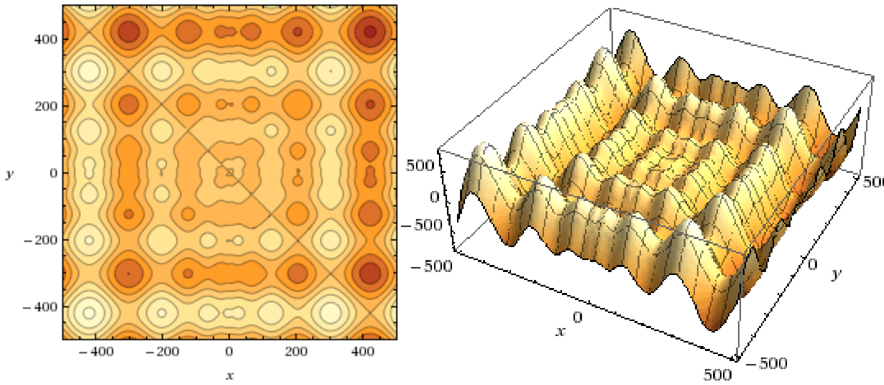

Рис.14. Линии уровня и график функции $f(x, y) = -x \cdot sin\left(\sqrt{|x|}\right) - y \cdot sin(\sqrt{|y|})$

Результаты работы методов №3

Название метода	Параметры точности	Параллелотоп, содержащий точку глобального минимума	
		первая составляющая	вторая составляющая
Метод дихотомии прямого образа	$\varepsilon = 0{,}001$	$[420{,}9599; 420{,}9606]$	$[420{,}9592; 420{,}9601]$
Метод отсечки мнимых значений	$\zeta = 10, \delta = 0{,}001, \varepsilon = 0{,}001$	$[420{,}9593; 420{,}9602]$	$[420{,}959; 420{,}96]$
Метод колоний	$r = 5, s = 2, \delta = 100, \varepsilon = 0{,}001$	$[420{,}9597; 420{,}9603]$	$[420{,}9597; 420{,}9606]$

Пример 4. Целевая функция $f(x) = 5 \cdot (y - x^2)^2 + (x - 1)^2$, область поиска $[X] = [-5; 5] \times [-5; 5]$. Точное решение: $x_1 = x_2 = 1$.

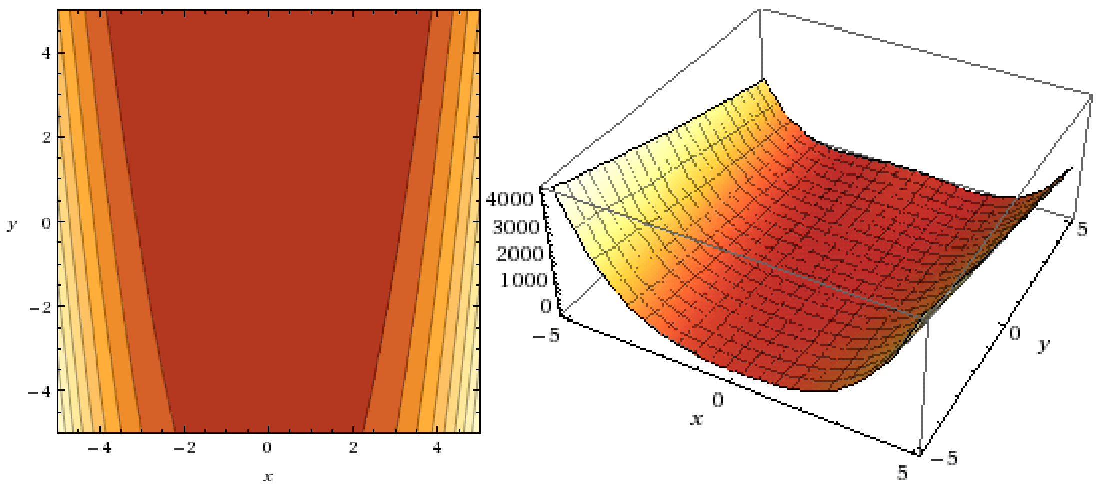

Рис.15. Линии уровня и график функции $f(x, y) = 5 \cdot (y - x^2)^2 + (x - 1)^2$

Результаты работы методов №4

Название метода	Параметры точности	Параллелотоп, содержащий точку глобального минимума	
		первая составляющая	вторая составляющая
Метод дихотомии прямого образа	$\varepsilon = 0{,}001$	$[0{,}9999; 1{,}0006]$	$[0{,}9999; 1{,}0006]$
Метод отсечки мнимых значений	$\zeta = 10, \delta = 0{,}001, \varepsilon = 0{,}001$	$[0{,}9997; 1{,}000643]$	$[0{,}9998; 1{,}0006]$
Метод колоний	$r = 5, s = 2, \delta = 100, \varepsilon = 0{,}001$	$[1; 1{,}000346]$	$[0{,}9991; 1{,}00004]$

Пример 5. Целевая функция $f(x) = 20 - (-x^2 + 10 \cdot cos(2\pi x)) - \left(-y^2 + 10 \cdot cos(2\pi y)\right)$, область поиска $[X] = [-5; 5] \times [-5; 5]$. Точное решение: $x_1 = x_2 = 0$.

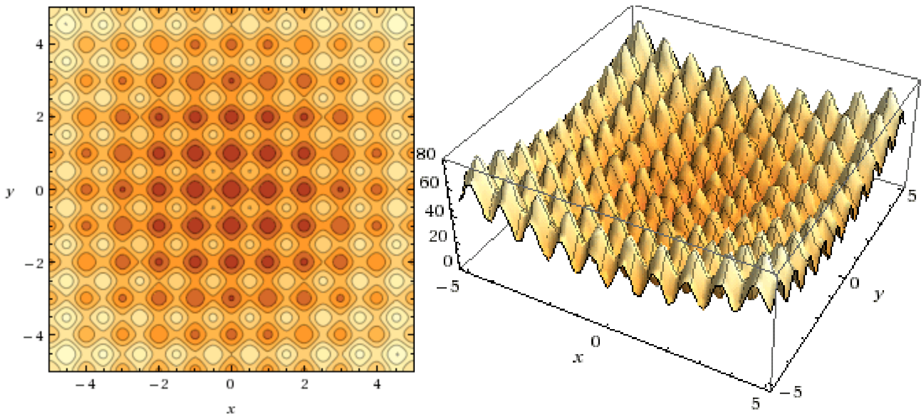

Рис.16. Линии уровня и график функции

$$f(x, y) = 20 - (-x^2 + 10 \cdot cos(2\pi x)) - \left(-y^2 + 10 \cdot cos(2\pi y)\right)$$

Результаты работы методов №5

Название метода	Параметры точности	Параллелотоп, содержащий точку глобального минимума	
		первая составляющая	вторая составляющая
Метод дихотомии прямого образа	$\varepsilon = 0{,}001$	$[-0{,}0002; 0{,}0007]$	$[-0{,}0001; 0{,}0005]$
Метод отсечки мнимых значений	$\zeta = 10, \delta = 0{,}001, \varepsilon = 0{,}001$	$[-0{,}00053; 0{,}0003]$	$[-0{,}00043; 0{,}00055]$
Метод колоний	$r = 5, s = 2, \delta = 100, \varepsilon = 0{,}001$	$[-0{,}00013; 0{,}0007]$	$[-0{,}0009; 0{,}00067]$

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что разработанные алгоритмы достаточно эффективно применяют аппарат интервального анализа, позволяя гарантированно с заданной точностью определить параллелотоп, содержащий точку глобального минимума. Кроме того, хочется отметить, что результаты работы методов можно улучшить, используя новые функции включения и альтернативные способы проверки.

Заключение

Итогом данной исследовательской работы является подтверждение возможности эффективного применения аппарата интервального анализа как базовой составляющей методов глобальной оптимизации, решения выявленных в ходе исследования проблем и разработка алгоритмического и программного обеспечения новых методов глобальной оптимизации, использующих аппарат интервального анализа. Эффективность методов продемонстрирована на нескольких модельных примерах, обладающих как простой, так и сложной структурой линий уровня. Таким образом, полученные результаты позволяют надеяться на успешное применение методов при проектировании конструкций самолетов и космических аппаратов. В дальнейшем планируется улучшить разработанные методы, создав новые алгоритмы построения функций включения, что позволит повысить эффективность уже разработанных методов и создать совершенно другие методы, которые могут динамически подстраиваться под конкретные задачи, используя синтаксический анализ.

Библиографический список

1. Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. Прикладной интервальный анализ. – М-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. - 468 с.

2. E. Hansen, G.W. Walster. Global optimization using interval analysis. – New York: Marcel Dekker, 2004. – 515 c.

3. В. Н. Пановский. Прикладное применение интервальных алгоритмов sivia и imagesp//9-я Международная конференция «Авиация и космонавтика - 2010». Тезисы докладов. – СПб.: Мастерская печати, 2010. – 354с. – с.323-324.

4. В. Н. Пановский. Интервальный анализ. Прикладное применение алгоритмов обращения и оценивания образов функций//Конкурс научно-технических работ и проектов «Молодежь и будущее авиации и космонавтики - 2010». Москва. Аннотации работ. – СПб.: Мастерская печати, 2010. – 162с. – с.130-131.

Сведения об авторах

Пановский Валентин Николаевич; студент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), тел.: +7-916-326-23-06;

e-mail: wol4aravio@yandex.ru