УДК 539.3:534.1

Динамическая неустойчивость тонкостенного трубчатого стержня при солнечном нагреве

И.Н. Воробьев

В работе рассмотрена плоская задача динамической неустойчивости тонкостенного трубчатого стержня при солнечном нагреве с учетом внешнего и внутреннего теплоизлучения. Для решения связанной задачи термоупругих колебаний стержня и нестационарной теплопроводности использовался метод конечных элементов. Выполнены расчеты нелинейных термоупругих колебаний и динамической неустойчивости стержня при нестационарном солнечном нагреве.

Ключевые слова: термоупругость; колебания; нелинейная динамика; метод конечных элементов, динамическая неустойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-08-00577)

Введение

На космических аппаратах (КА) в качестве удлинителей для различных грузов и приборов, а также штанг гравитационной стабилизации, могут использоваться выдвигаемые тонкостенные стержни, изготовленные из предварительно напряженной навитой на барабан металлической ленты. Когда два слоя ленты, сваренных по боковым кромкам, после схода с барабана выгибаются в разные стороны, то получается трубчатый стержень с замкнутым контуром поперечного сечения, близким по форме к окружности. Такие стержни могут иметь большую длину и под воздействием солнечных лучей могут испытывать значительный термоупругий изгиб, вынужденные колебания (при изменении ориентации и освещения) и автоколебания (вследствие динамической неустойчивости, обусловленной влиянием упругих деформаций на углы падения лучей и приток тепла). Вследствие высокой гибкости таких стержней их колебания могут быть геометрическими нелинейными и могут иметь большие амплитуды перемещений и углов поворота. Данные явления могут приводить к серьезным проблемам, таким как «раскачивание» спутника на орбите, вследствие сильных термоупругих колебаний штанг гравитационной стабилизации и как следствие вывод данного спутника из строя.

Плоская задача изгиба стержня

Рассмотрим изгиб кругового нерастяжимого стержня в своей плоскости (рис. 1). Запишем уравнения равновесия для элементарного участка криволинейного стержня длиной *ds* (рис. 2).

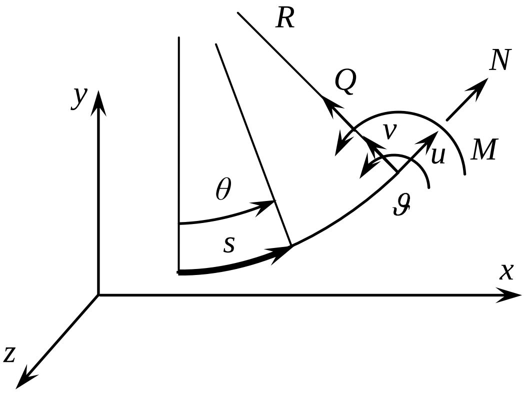

Рис. 1

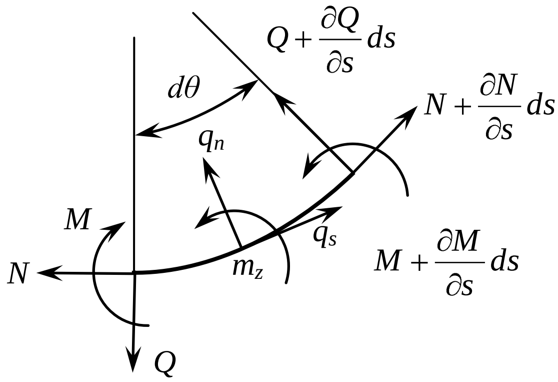

Рис. 2

Уравнения равновесия записываются в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N}{\partial S}ds - Qd\varphi + q_s ds = 0;\\
&\frac{\partial Q}{\partial S}ds + Nd\varphi + q_n ds = 0;\\
&\frac{\partial M}{\partial S}ds + Qds + m_z ds = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь q_s, q_n, m_z – распределенные внешние усилия и момент, действующие на стержень, N, Q, M - нормальная, перерезывающая силы и изгибающий момент.

Перепишем данные уравнения с учетом того, что $ds=Rd\theta$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N}{\partial \theta} - Q + q_s R = 0;\\
&\frac{\partial Q}{\partial \theta} + N + q_n R = 0;\\
&\frac{\partial M}{\partial \theta} + QR + m_z R = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Из условия нерастяжимости стержня ($\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R} = 0$), получим

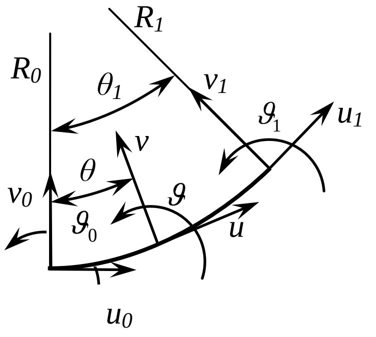

Рис. 3

$$v = \frac{\partial u}{\partial \theta} \ \text{ и } \ \vartheta = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R} = \frac{1}{R}\left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \tag{3}$$

Используя соотношения (3) и $M = EI\dfrac{\partial \vartheta}{\partial s}$, полагая внешние нагрузки равные нулю, из (2) получим дифференциальное уравнение в перемещениях

$$\frac{d^6 u}{d\theta^6} + 2\frac{d^4 u}{d\theta^4} + \frac{d^2 u}{d\theta^2} = 0. \tag{4}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2\theta + \alpha_3 \sin\theta + \alpha_4 \cos\theta + \alpha_5\theta\sin\theta + \alpha_6\theta\cos\theta; \tag{5}$$

тогда

$$\begin{gathered} v = \alpha_2 + \alpha_3 \cos\theta - \alpha_4 \sin\theta + \alpha_5(\sin\theta + \theta\cos\theta) + \alpha_6(\cos\theta - \theta\sin\theta); \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\alpha_3 \sin\theta - \alpha_4 \cos\theta + \alpha_5(\cos\theta + \cos\theta - \theta\sin\theta) + \alpha_6(-\sin\theta - \sin\theta - \theta\cos\theta); \\ R\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} = \alpha_2 - 2\alpha_5 \sin\theta - 2\alpha_6 \cos\theta. \end{gathered} \tag{6}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ - неизвестные коэффициенты.

Пусть в пределах конечного элемента (КЭ) радиус кривизны R меняется незначительно от R_0 при $\theta = \theta_0 = 0$ до R_1 при $\theta = \theta_1$ (рис. 3), тогда $R = \overline{R} = \dfrac{1}{2}(R_0 + R_1) = const.$

Вектор коэффициентов $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5\,\alpha_6]^T$, выражается через вектор обобщенных координат КЭ $\mathbf{q}^{(k)} = [u_0\,v_0\,\vartheta_0\,u_1\,v_1\,\vartheta_1]^T$ с помощью матрицы преобразования

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{q} \tag{7}$$

где

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{R_0} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{2}{R_0} & 0 \\ 1 & \theta_1 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & \theta_1\sin\theta_1 & \theta_1\cos\theta_1 \\ 0 & 1 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & \begin{matrix}\sin\theta_1 + \\ +\theta_1\cos\theta_1\end{matrix} & \begin{matrix}\cos\theta_1 - \\ -\theta_1\sin\theta_1\end{matrix} \\ \dfrac{1}{R_1} & \dfrac{\theta_1}{R_1} & 0 & 0 & \dfrac{2}{R_1}\cos\theta_1 & -\dfrac{2}{R_1}\sin\theta_1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Потенциальная энергия КЭ стержня записывается в виде:

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{2}\int_0^{s_1} M \frac{\partial\vartheta}{\partial s} ds = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_1} M \frac{\partial\vartheta}{\partial\theta} d\theta = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)}\boldsymbol{\alpha}. \tag{9}$$

где

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)} = 2\frac{EI}{\overline{R}^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\theta_1}{2} & 0 & 0 & -(1-c_1) & -s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-c_1) & 0 & 0 & (\theta_1 - s_1 c_1) & s_1^2 \\ 0 & -s_1 & 0 & 0 & s_1^2 & (\theta_1 + s_1 c_1) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Подставляя преобразования (7) в (9), запишем потенциальную энергию криволинейного КЭ при его изгибе в плоскости через вектор обобщенных координат КЭ:

$$\Pi_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{k})}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2}\mathbf{q}^{(\mathbf{k})\mathbf{T}}\mathbf{K}_{\mathbf{k}}\mathbf{q}^{(\mathbf{k})}; \quad \mathbf{K}_{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{A}_{\mathbf{1}}^{-1}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{K}_{\boldsymbol{\alpha}}^{(\mathbf{k})}\mathbf{A}_{\mathbf{1}}^{-1}. \tag{11}$$

где $\mathbf{K}_{\mathrm{k}}$ - матрица жесткости 1- го элемента.

Потенциальная энергия всего стержня получается путем суммирования по всем КЭ.

$$\Pi = \sum_{k=1}^{N}\Pi_k . \tag{12}$$

Кинетическую энергию системы запишем в форме метода сосредоточенных масс, учитывая дополнительно приведенные к узлам моменты инерции:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[m_k\left(\dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2\right) + J_k\dot{\vartheta}_k^2 + 2S_{x,k}\dot{u}_k\dot{\vartheta}_k + 2S_{y,k}\dot{v}_k\dot{\vartheta}_k\right] \tag{13}$$

где m_k , $S_{x,k}, S_{y,k}$, J_k - приведенные к k-му сечению сосредоточенная масса, статические моменты относительно оси x и y и массовый момент инерции.

Задача нестационарной теплопроводности при солнечном нагреве стержня

Представим безразмерную температуру в виде, ограничиваясь в разложение в ряд Фурье только двумя слагаемыми:

$$\tau = \tau_0 + \tau_1\cos\theta \tag{14}$$

Выражение для температуры входит в уравнение теплопроводности [6] в четвертой степени:

$$\tau^4 = \tau_0^4 + 4\tau_0^2\tau_1^2\cos^2\theta + \tau_1^4\cos^4\theta + 4\tau_0^3\tau_1\cos\theta + 2\tau_0^2\tau_1^2\cos^2\theta + 4\tau_1^3\tau_0\cos^3\theta =$$
$$\tau_0^4 + 4\tau_0^2\tau_1^2\frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) + \tau_1^4\frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3) + 4\tau_0^3\tau_1\cos\theta + \tag{15}$$
$$2\tau_0^2\tau_1^2\frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1) + 4\tau_1^3\tau_0\frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta);$$

Пренебрегая слагаемыми с $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\cos 4\theta$, получим

$$\tau^4 \approx \left(\tau_0^4 + 3\tau_0^2\tau_1^2 + \frac{3}{8}\tau_1^4\right) + (4\tau_0^3\tau_1 + 3\tau_1^3\tau_0)\cos\theta \tag{16}$$

В возмущенном движении выражение для коэффициентов τ_0, τ_1 представляется в виде:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau_0^0 + \tau_0^1; \\ \tau_1 &= \tau_1^0 + \tau_1^1. \end{aligned} \tag{17}$$

где τ_0^0, τ_1^0 - значения коэффициентов, полученные при решении статической задачи термоупругого изгиба стержня; τ_0^1, τ_1^1 - неизвестные температурные коэффициенты, обусловленные колебаниями стержня.

Подставим выражения (15) в (14) и вычислим его с точностью до линейных членов:

$$\tau^4 = F_0^0 + F_1^0\cos\theta + (\overline{F}_{00}^1\tau_0^1 + \overline{F}_{01}^1\tau_1^1) + (\overline{F}_{10}^1\tau_0^1 + \overline{F}_{11}^1\tau_1^1)\cos\theta; \tag{18}$$

где

$$\begin{gathered} F_0^0 = \tau_0^{0^4} + 3\tau_0^{0^2}\tau_1^{0^2} + \frac{3}{8}\tau_1^{0^4}; \quad F_1^0 = 4\tau_0^{0^3}\tau_1^0 + 3\tau_0^0\tau_1^{0^3}; \\ \overline{F}_{00}^1 = 4\tau_0^{0^3} + 6\tau_0^0\tau_1^{0^2}; \quad \overline{F}_{01}^1 = \frac{3}{2}\tau_1^{0^3} + 6\tau_0^{0^2}\tau_1^0; \\ \overline{F}_{10}^1 = 3\tau_1^{0^3} + 12\tau_0^{0^2}\tau_1^0; \quad \overline{F}_{11}^1 = 4\tau_0^{0^3} + 9\tau_0^0\tau_1^{0^2}. \end{gathered} \tag{19}$$

Тогда с учетом полученных соотношений линеаризованные уравнения теплопроводности в возмущениях для *k*-го сечения записывается в виде:

$$\begin{gathered} \dot{\tau}_{n,k}^1 + \frac{n^2\lambda}{r^2 c\rho}\tau_{n,k}^1 + \frac{c_0}{c\rho h 100^\circ}\left(\varepsilon^e + \frac{4n^2\varepsilon^i}{4n^2 - \varepsilon^i}\right)(\overline{F}_{n0,k}^1\tau_{0,k}^1 + \overline{F}_{n1,k}^1\tau_{1,k}^1) = \\ = \frac{g_n q_*}{c\rho h 100^\circ}\left\langle \cos(\gamma - \vartheta_k^0) + \vartheta^1\sin(\gamma - \vartheta_k^0)\right\rangle \\ (n = 0, 1;\ k = 1, \ldots, N) \end{gathered} \tag{20}$$

где ρ, c, λ – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала оболочки; ε^e, ε^i – коэффициент черноты внешней и внутренней поверхности оболочки; *r, h* – радиус и толщина оболочки, $q_* = A_s S_0 L_0^2 / L^2$, A_s – коэффициент поглощения внешней поверхности стержня; $S_0 = 1400\ Вт/м^2$; $L_0 = 149 \cdot 10^6\ км$ – среднее расстояние от Земли до Солнца; $L\,[км]$ – расстояние от объекта до Солнца.

$$g_0 = \frac{1}{\pi}, \quad g_1 = \frac{1}{2}, \quad g_n = -\frac{2}{(n^2-1)\pi}\cos\frac{n\pi}{2} \qquad \text{при} \quad n \geq 2; \tag{21}$$

Эти уравнения должны решаться совместно с линеаризованными уравнениями колебаний стержня, которые получаются на основе уравнения Лагранжа в обобщенных координатах. В формуле (9) для потенциальной энергии КЭ необходимо использовать выражения для изгибающего момента для нагретого тонкостенного стержня:

$$M = EI\kappa \tag{22}$$

где $\kappa = \frac{1}{\overline{R}^2}\left(\frac{du}{d\theta} + \frac{d^3u}{d\theta^3} + \frac{\overline{R}\alpha}{r}T_1^1\right)$ - кривизна стержня.

Таким образом, связанная задача термоупругих колебаний стержня описывается системой уравнений для векторов $\mathbf{q} = \left[u_1 v_1 \vartheta_1 u_2 v_2 \vartheta_2 \ldots u_s v_s \vartheta_s\right]^T$ и $\boldsymbol{\tau} = \left[\tau_{0.1}^1 \tau_{1.1}^1 \tau_{0.2}^1 \tau_{1.2}^1 \ldots \tau_{0.s}^1 \tau_{1.s}^1\right]^T$:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{S}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}; \\ \dot{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{P}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{N}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{23}$$

$$\mathbf{S}_\mathrm{k} = \frac{\alpha 100^\circ EI}{r\overline{R}^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\Delta\vartheta_k^0 & 0 & \frac{1}{2}\Delta\vartheta_k^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2(\Delta\vartheta_k^0 - s_k)}{\Delta\vartheta_k^0} & 0 & \frac{-2(c_k\Delta\vartheta_k^0 - s_k)}{\Delta\vartheta_k^0} \\ 0 & \frac{-2(-1+c_k)}{\Delta\vartheta_k^0} & 0 & \frac{-2(-1+c_k+s_k\Delta\vartheta_k^0)}{\Delta\vartheta_k^0} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$c_k = \cos(\theta_k)$, $s_k = \sin(\theta_k)$, $\Delta\vartheta_k^0 = \vartheta_k^0 - \vartheta_{k-1}^0$.

$$\mathbf{P}_\mathrm{k} = \frac{c_0}{c\rho h 100^\circ}\begin{bmatrix} \left(4{\tau_{0,k}^0}^3 + 6\tau_{0,k}^0{\tau_{1,k}^0}^2\right)\varepsilon^e & \left(\frac{3}{2}{\tau_{1,k}^0}^3 + 6{\tau_{0,k}^0}^2\tau_{1,k}^0\right)\varepsilon^e \\ \left(\varepsilon^e + \frac{4\varepsilon^i}{4-4\varepsilon^i}\right)\left(3{\tau_{1,k}^0}^3 + 12{\tau_{0,k}^0}^2\tau_{1,k}^0\right) & \frac{h\lambda 100^\circ}{c_0 r^2} + \left(\varepsilon^e + \frac{4\varepsilon^i}{4-4\varepsilon^i}\right)\left(3{\tau_{1,k}^0}^3 + 12{\tau_{0,k}^0}^2\tau_{1,k}^0\right) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\mathbf{N}_\mathrm{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{g_0 q_*}{c\rho h 100^\circ}\sin(\gamma - \vartheta_k^0) \\ 0 & 0 & \frac{g_1 q_*}{c\rho h 100^\circ}\sin(\gamma - \vartheta_k^0) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

Для исследования устойчивости системы однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (25), ее можно свести к системе уравнений первого порядка, если наряду с вектором обобщенных координат $\mathbf{q}$ рассматривать в качестве неизвестных вектор обобщенных скоростей $\mathbf{p} = \dfrac{d\mathbf{q}}{dt}$. Тогда получим матричное уравнение в блочном виде

$$\mathbf{A}\frac{d\mathbf{z}}{dt} + \mathbf{C}\mathbf{z} = \mathbf{0}\,, \tag{27}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} D & K & -S \\ -E & 0 & 0 \\ -N & 0 & P \end{bmatrix}; \mathbf{z} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ \tau \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \cdot e^{\lambda t}. \tag{28}$$

E – единичная матрица.

Решение уравнения (29) ищется в виде $\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}e^{\lambda t}$ и сводится к проблеме собственных значений пары матриц $[\lambda\mathbf{A} + \mathbf{C}]\mathbf{Z} = \mathbf{0}$, которая может быть решена с помощью стандартных компьютерных программ.

Собственные значения этой проблемы или действительные числа $\lambda_\nu = \alpha_\nu$ или комплексно-сопряженные $\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\omega_\nu$, $\overline{\lambda}_\nu = \alpha_\nu - i\omega_\nu$. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную действительную часть $\alpha_\nu > 0$, то система неустойчива по форме Z_ν . При $\alpha_\nu > 0$ и $\omega_\nu \neq 0$ имеет место динамическая неустойчивость. На границе динамической неустойчивости $\alpha_\nu = 0$ и $\omega_\nu \neq 0$, т.е. $\lambda_\nu = +i\omega_\nu$, $\overline{\lambda}_\nu = -i\omega_\nu$.

Пример расчета

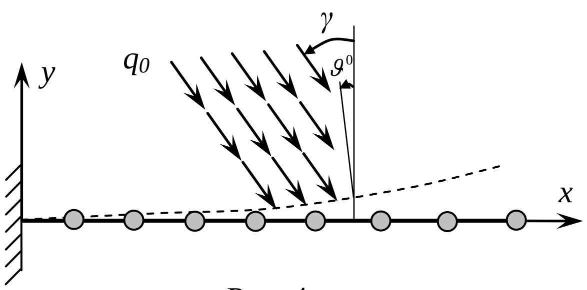

Рис. 4

В качестве примера рассмотрим термоупругие колебания и динамическую неустойчивости стержня в плоскости падения солнечных лучей. Для расчета выберем следующие значения параметров: $l = 35$ м, $r = 0{,}025$ м, h = 0.0001 м, материал стержня алюминиевый сплав, $L_0 = 149 \cdot 10^6$ км – среднее расстояние от Земли до Солнца, L [км] - расстояние от объекта до Солнца, $A_S = 0.5$ - коэффициент поглощения внешней поверхности стержня, $L_0 / L = 1$, $100^\circ\lambda = 5 \cdot 10^3$ Вт/м, $100^\circ\alpha = 1.1 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon^e = \varepsilon^i = 0.025$, $\eta = 1 \cdot 10^{-7}$, $\gamma = -10^\circ, -30^\circ, -60^\circ, -80^\circ$ - угол падения солнечных лучей.

При проведении расчетов стержень разбивался на 50 КЭ (N = 50).

Для уменьшения времени расчета и «плавности» решения, так как наличие в системе продольного перемещения накладывает эффект «дрожания» на результат решения, задача решалась в линейной постановке.

На рис. 5 приведены графики изменения поперечного прогиба на конце стержня $v_N(t)$ при различных углах падения солнечных лучей.

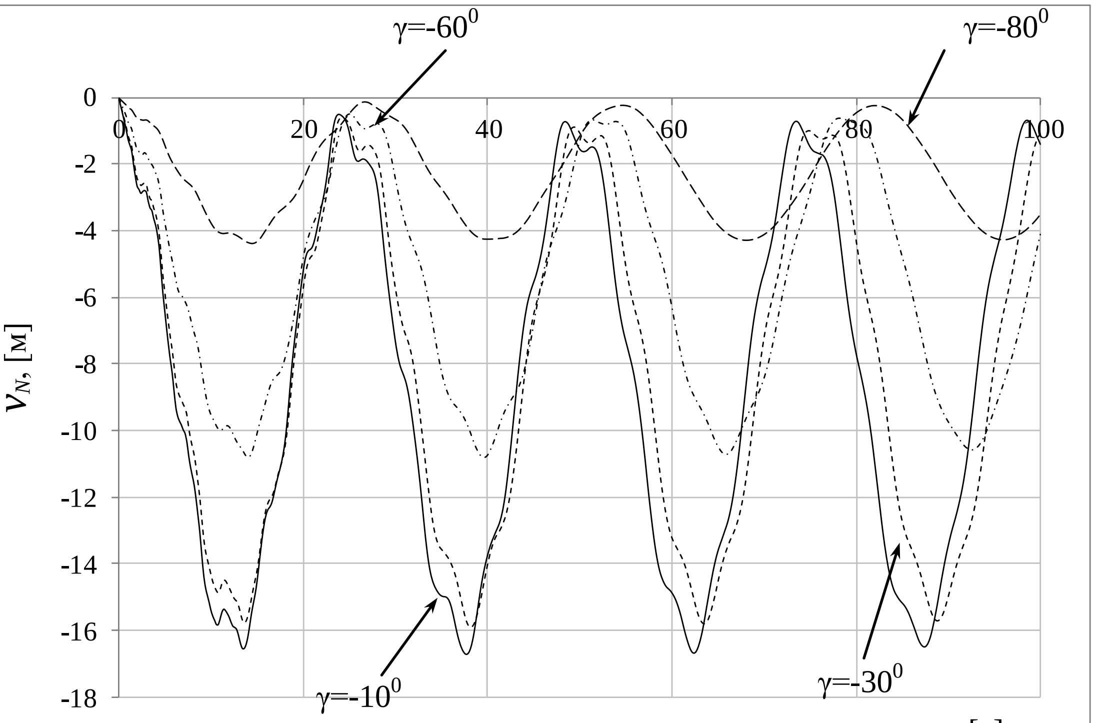

Рис. 5

Расчеты на устойчивость колебаний стержня показали, что явления динамической неустойчивости возникают при углах падения солнечных лучей $\gamma=-10^0$ и $\gamma=-30^0$. При углах падения $\gamma=-60^\circ,-80^\circ$ колебания стержня устойчивые. В таблице 1 приведены собственные значения соответствующие 5-ти формам колебаний Z_ν, по которым происходит потеря устойчивости.

Таблица 1

ν	γ=-10^0	γ=-30^0
1	11654417.53	16175014.97
2	11276832.18	0.035 + 2068i
3	8489056.44	3.06e-06 + 2095i
4	2.9e-07 + 1993i	8.3e-05 + 2107i
5	4.7e-06 + 2038i	1.76e-04 + 2118i

Метод перебора углов падения солнечных лучей γ, был найден «критический» угол $\gamma \approx -36^\circ$ после которого динамической неустойчивости не возникает.

Библиографический список

1. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Нелинейные и параметрические колебания упругих систем.. - М.: МАИ, 1993, 68 с..

2. Гришанина Т.В. Задачи по теории колебаний упругих систем. М.: Изд-во МАИ, 1998, 48 с.

3. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.

4. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Связанная задача термоупругого изгиба и теплопроводности тонкостенного круглого стержня при солнечном нагреве// МТТ 2000, №6, с. 161-166.

5. Воробьев И. Н., Гришанина Т.В, Шклярчук. Ф. Н. Нелинейные колебания спутника с упругим тонкостенным стержнем при солнечном нагреве// Вестник МАИ 2012, т. 19, №3, с. 160-170.

6. Марченко В.М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 298 с.

7. Florio F.A., Hobls R.B.Jr. An analytical representation of temperature distribution in gravity gradient rods // AIAA J. 1968. V. 6. No. 1. P. 99–102.

Сведения об авторах

ВОРОБЬЕВ Илья Николаевич, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; e-mail: ivorobyev@inbox.ru