

УДК 536.241

## Математическое моделирование термического сопротивления в контактных парах из гомогенных и гетерогенных материалов\*

О. Р. Дорняк, В. М. Попов, Н. А. Анашкина

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, Воронеж, 394087, Россия  
e-mail: ordornyak@mail.ru

Поступила в редакцию 01.11.2018

После доработки 22.11.2018

Принята к публикации 29.11.2018

Представлены результаты теоретического исследования теплового и механического взаимодействия в контактных парах из материалов с разными текстурными свойствами. Предложена математическая модель контактного термического сопротивления, которая позволяет прогнозировать его значения в зависимости от широкого спектра теплофизических факторов.

**Ключевые слова:** контактная пара, термическое сопротивление контакта, многофазные системы, математическое моделирование.

### Введение

Проектирование узлов энергетического оборудования, а также выбор эффективных режимов его работы требуют исследования тепловых процессов в нагруженных контактных парах с учетом неидеальной температурной проводимости контакта [1, 2]. Величина контактного термического сопротивления определяется как условиями нагружения, так и комплексом физико-механических свойств контактирующих тел. В большинстве работ, изучавших закономерности контактного теплообмена для разных материалов, эти материалы представляли собой однофазные системы.

Расширение круга задач, связанных с тепловым контактированием негомогенных материалов, обусловлено применением, в частности в аэрокосмической отрасли, новых композиционных материалов, обладающих набором уникальных тепловых и прочностных характеристик. Известно, что высокопористая волокнистая керамика, например материал ТЗМК-10, создаваемый

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-08-00030).

на основе мелкодисперсного аморфного кварцевого волокна, используется для теплозащиты многоразовых авиационно-космических систем, длительно работающих в условиях высокой температуры. Имеются публикации, указывающие на эффективное использование для тепловой защиты материала, который получают на основе короткого базальтового волокна (ТИМ-Б).

Кроме того, требуют совершенствования широко распространенные процессы контактной сушки объектов различного назначения, которые предполагают взаимодействие капиллярно-пористого материала с металлической поверхностью нагревателя. В данной работе численно исследована математическая модель неидеального теплового контакта образцов, один из которых выполнен из гомогенного, а второй – из капиллярно-пористого материала.

### Математическая модель

Математическая модель контактного взаимодействия сформулирована на основе положений механики многофазных систем [3]. Предполагается, что характерный размер неоднороднос-

тей, пор и капилляров изучаемой системы много больше молекулярно-кинетических размеров, с одной стороны, и много меньше расстояний, на которых макроскопические параметры фаз меняются существенно, с другой стороны. Принято, что микродеформации и микросмещения твердой фазы малы; твердая фаза практически несжимаема; материал твердой фазы деформируется упруго; кинетической энергией мелкомасштабного движения всех фаз можно пренебречь.

Математическая модель нестационарного теплового взаимодействия металлической плиты и капиллярно-пористого образца включает уравнения переноса в двух фазах – твердой и газообразной.

Выделим три характерных зоны теплопередачи изучаемой системы: верхний слой (21) высотой  $H_{21}$  из пористого материала, нижний слой (22) высотой  $H_{22}$  из непористого материала; промежуточный тонкий слой толщиной  $h$ , который формируется за счет неровностей профиля контактирующих поверхностей (рис. 1). Области (21) и (22) не содержат твердой фазы из материала 2-го и 1-го типа соответственно. Слой толщиной  $h$  содержит фрагменты твердой фазы первого и второго материала и зоны, заполненные газом (воздухом). Наличие такого слоя связано с учетом неидеальных условий термического взаимодействия гомогенного образца и дисперсного материала.

Промежуточный контактный слой высотой  $h$  рассматривается как самостоятельная гетерогенная среда, при этом ее твердая фаза является двухкомпонентной, она содержит фрагменты вещества первого и второго материала, которые обладают разными физико-механическими свойствами.

Уравнения сохранения энергии записаны, следуя [3], для теплофизических переменных, усредненных по объемам  $V_1$  первой (газообразной) фазы и  $V_2$  второй (твердой) фазы.

Математическая модель включает уравнения сохранения массы, импульса и энергии для каждой из фаз системы.

Уравнения сохранения массы имеют вид:

$$\partial_t (\alpha_i \langle \rho'_i \rangle_i) + \nabla_k (\alpha_i \langle \rho'_i \rangle_i \langle v_i^k \rangle_i) = 0, i = 1, 2. \quad (1)$$

Уравнения сохранения количества движения для газообразной и твердой фаз записаны в квазистатическом приближении без учета массовых сил и мелкомасштабных инерционных эффектов:

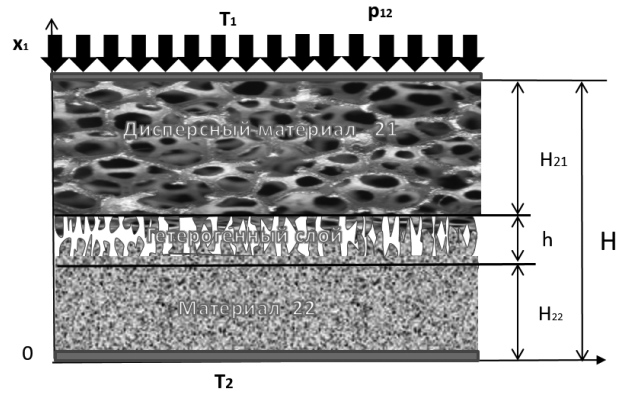


Рис. 1. Расчетная схема теплового и механического взаимодействия элементов контактной пары

$$\nabla_k (\alpha_i \langle \sigma_i^{kl} \rangle_i) + \mathbf{R}_{ji} = 0, \mathbf{R}_{ji} = -\frac{\alpha_i \mu_i (\langle \mathbf{v}'_i \rangle_i - \langle \mathbf{v}'_j \rangle_j)}{K_{ji}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{R}_{ji} = -\mathbf{R}_{ji}, \langle v_i^k \rangle_i \cong \partial_t \langle u_i^k \rangle_i; i, j = 1, 2.$$

Тензор напряжений в газовой фазе – шаровой

$$\langle \sigma_i^{kl} \rangle_i = -\langle p'_i \rangle_i \delta^{kl}. \quad (3)$$

Компоненты полного тензора напряжений выражаются через компоненты тензора напряжений в фазах:

$$\sigma_2^{kl} = \alpha_1 \langle \sigma_1^{kl} \rangle_1 + \alpha_2 \langle \sigma_2^{kl} \rangle_2. \quad (4)$$

Полный тензор напряжений можно рассматривать и как сумму так называемого фиктивного тензора и тензора напряжений в газовой фазе [3]:

$$\sigma_2^{kl} = \sigma_{f2}^{kl} - \langle p'_1 \rangle_1 \delta^{kl}, \sigma_{f2}^{kl} = \alpha_2 (\langle \sigma_2^{kl} \rangle_2 - \langle \sigma_1^{kl} \rangle_1). \quad (5)$$

Тензор фиктивных напряжений описывает силовое взаимодействие между элементами твердого скелета. Отметим, что характеристики твердой матрицы в области 21 сформированы до начала взаимодействия элементов пары. В промежуточном гетерогенном слое твердый каркас создан выступами, неровностями и включениями из твердого вещества обоих контактирующих материалов 21 и 22. В области 22 расположен материал с гомогенными свойствами, здесь  $\alpha_1=0, \alpha_2=1$ .

Для двухфазных областей контактной пары связь между деформациями  $\epsilon_2^{kl}$  и напряжениями  $\sigma_2^{kl}$  в твердой фазе основана на представлении полного тензора деформаций в виде [3]:

$$\epsilon_2^{kl} = \langle \epsilon_2^{kl} \rangle_2 + \epsilon_{f2}^{kl}, \epsilon_{f2}^{kl} = \frac{1}{2} (\nabla_k \langle u_2^l \rangle_2 + \nabla_l \langle u_2^k \rangle_2). \quad (6)$$

Здесь первое слагаемое отражает вклад в макродеформации гетерогенной среды деформаций материала «зерен» (выступов, включений). Второе слагаемое – тензор фиктивных деформаций  $\epsilon_{f2}^{kl}$  отвечает за макродеформации гетерогенного слоя за счет смещений одних элементов «скелета» относительно других.

Для материала «зерен» и для структурного каркаса приняты реологические соотношения:

$$\langle \epsilon_2^{kl} \rangle = \frac{1}{E_2^s} \left[ (1 + \nu_2^s) \langle \sigma_2^{kl} \rangle - \nu_2^s \langle \sigma_2^{ii} \rangle \delta^{kl} \right] + \Lambda_s \langle \Theta_2 \rangle \delta^{kl}, \quad (7)$$

$$\epsilon_{f2}^{kl} = \frac{1}{E_2^f} \left[ (1 + \nu_2^f) \sigma_{f2}^{kl} - \nu_2^f \sigma_{f2}^{ii} \delta^{kl} \right]. \quad (8)$$

Упругие характеристики  $E_2^s, E_2^f, \nu_2^s, \nu_2^f, \Lambda_s$  являются эффективными для двухкомпонентной твердой фазы. Они могут быть определены, например, по правилу смесей.

Для однофазных областей обобщенный закон Гука используется в виде [4]:

$$\epsilon_i^{kl} = \frac{1}{E_i^s} \left[ (1 + \nu_i^s) \sigma_i^{kl} - \nu_i^s \sigma_i^{jj} \delta^{kl} \right] + \Lambda_{si} \Theta_2 \delta^{kl}; \quad (9)$$

$i = 21, 22.$

Усреднение уравнений сохранения энергии проведено отдельно для газовой фазы по объему  $V_1$ , а также для твердой фазы первого и второго материала по объемам  $V_{21}$  и  $V_{22}$  ( $V_{21} + V_{22} = V_2$ ). Такой подход связан с тем, что температура твердых фаз в гетерогенном слое может быть существенно различна.

Уравнение теплопроводности при отсутствии фазовых переходов с учетом возможной анизотропии тепловых свойств имеет вид:

$$\langle c_{pi} \rangle_i \langle \rho_i \rangle_i \alpha_i \partial_t \langle T_i \rangle_i = \nabla_k \left( \alpha_i \lambda_i^{kl} \nabla_l \langle T_i \rangle_i \right) + \sum_{j \neq i} Q_{\Sigma i(j)}, \quad (10)$$

$i=1, 21, 22.$

Интенсивность теплообмена между фазами и компонентами определяется с помощью соотношений вида

$$Q_{\Sigma i(j)} = s_{ij} \alpha_{ij}^\Sigma \left( \langle T_i \rangle_{\Sigma ij} - \langle T_j \rangle_{\Sigma ij} \right); \quad i, j=1, 21, 22. \quad (11)$$

На внутренних межфазных поверхностях выполняются условия теплового баланса:

$$Q_{\Sigma i(j)} = -Q_{\Sigma j(i)}; \quad i, j=1, 21, 22. \quad (12)$$

Объемные концентрации фаз удовлетворяют условиям

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_{21} + \alpha_{22} = \alpha_2. \quad (13)$$

Уравнение состояния газовой фазы имеет вид:

$$\langle p' \rangle_1 = \langle \rho' \rangle_1 \langle T' \rangle_1 B_1. \quad (14)$$

Примем, что вещество обеих компонент твердой фазы несжимаемо:

$$\langle \rho' \rangle_i = \rho_i^o = \text{const}; \quad i=21, 22. \quad (15)$$

Сформулированные уравнения должны быть дополнены начальными и граничными условиями.

Начальные условия для объемной концентрации твердой фазы материалов в гетерогенном слое могут быть определены на основе опорной кривой  $t_p(e_m)$ , которая строится с использованием профилограммы и является функцией распределения вероятности того, что частицы материала находятся выше уровня  $e_m$  [5].

$$t_p(e_m) = \sum_i \frac{\Delta A_{pi}}{A_{cont}}, \quad e_m = \frac{z}{R_{max}}.$$

Здесь  $A_{pi}$  – площадь сечения выступа с номером  $i$  плоскостью на уровне  $e_m$ ;  $A_{cont}$  – контурная площадь, для которой проводится расчет;  $z$  – расстояние от выбранной плоскости до плоскости нулевого уровня, которая параллельна срединной плоскости и проходит через вершину выступа максимальной высоты.

Очевидно, что функция  $t_p(e_m)$  определяет объемную концентрацию твердой фазы на уровне  $e_m$ :

$$t_p(e_m) = \sum_i \frac{\Delta A_{pi} dh}{A_{cont} dh} = \frac{\sum_i dV_{pi}}{dV} = \alpha_2(e_m).$$

В работе [5] показано, что топологию реальных поверхностей адекватно моделирует бета-распределение, поэтому принято

$$\alpha_2(e_m) = t_p(e_m) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^{e_m} x^{(m-1)} (1-x)^{n-1} dx. \quad (16)$$

Отметим, что внутренние условия сопряжения выделенных областей представляют собой условия непрерывности для всех теплофизических переменных и их первых производных.

Начальные условия для других переменных могут, в частности, соответствовать состоянию равновесия, т. е. частицы обеих фаз находятся в покое, и их температура равняется  $T_0$ :

$$\langle \mathbf{u}' \rangle_i \Big|_{t=0} = 0, \quad i=1, 2; \quad \langle T' \rangle_i \Big|_{t=0} = T_0, \quad i=1, 21, 22. \quad (17)$$

Граничные условия зависят от конкретных условий нагружения теплообмена контактной пары. Принято

$$\begin{aligned} \sigma_2^n|_{\Gamma_1} = -p_{21} \mathbf{i}; \quad \sigma_2^\tau|_{\Gamma_1} = 0; \quad \langle \mathbf{u}'_2 \rangle_2|_{\Gamma_2} = 0; \\ \sigma_2^\tau|_{\Gamma_2} = 0; \quad \sigma_2^n|_{\Gamma_3} = 0, \quad \sigma_2^\tau|_{\Gamma_3} = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle T'_{22} \rangle_{22}|_{\Gamma_2} = T_2; \quad \langle T'_{21} \rangle_{21}|_{\Gamma_1} = T_1; \quad \langle T'_1 \rangle_1|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3} = T_c; \\ \lambda_i \frac{\partial \langle T'_i \rangle_i}{\partial n} \Big|_{\Gamma_3} = \alpha^\Gamma (T_c - \langle T'_i \rangle_i|_{\Gamma_3}), \quad i=21, 22. \end{aligned} \quad (19)$$

Математическая модель (1)–(19) позволяет изучать связанные тепловые и деформационные процессы в контактом соединении и, в частности, определить термическое сопротивление контакта:

$$R_k = \frac{\langle T'_{22} \rangle_{22}|_{x=H_{22}} - \langle T'_{21} \rangle_{21}|_{x=H_{22}+h}}{q_{21}|_{x=H_{22}+h}}. \quad (20)$$

В общем случае сформулированная математическая модель является нестационарной, трехмерной, сопряженной, нелинейной.

Исследование закономерностей контактного теплообмена с использованием предлагаемой математической модели может быть проведено с помощью численных методов. В данной работе проведено численное исследование построенной модели в одномерном стационарном приближении.

### Расчетные параметры для элементов контактных пар

Изучаемые контактные пары составлены следующим образом. Один образец является однородным, он выполнен из углеродистой стали У-8 (материал 22). Второй образец (материал 21) является двухфазным. Он выполнен из высокопористой керамики или древесины и не содержит влаги. Расчеты выполнены для параметров материалов, приведенных в таблице. Приведенные параметры получены экспериментально или расчетным путем [6–12].

Высота каждого из образцов составляла  $H_{22}=H_{21}=0.04$  м. Давление на поверхности контактной пары  $p_{12}$  изменялось в диапазоне

### Теплофизические и механические параметры элементов контактных пар

Параметр	Материал					
	Углеродистая сталь У8	Древесина дуба	Древесина сосны	Древесина березы	ТИМ-Б (основа – короткие базальтовые волокна)	ТЗМК-10 (основа – кварцевые волокна)
Начальная пористость материала, $\alpha_1$	–	0.45	0.7	0.62	0.92...0.94	0.9
Коэффициент теплопроводности сухого образца*, $\lambda$ , Вт/(м.К)	48	0.2	0.15	0.18	0.0425	0.05
Коэффициент теплопроводности вещества волокон, $\lambda_{2i}$ , Вт/(м.К)	48	0.3	0.3	0.3	3.5	61.38
Модуль упругости материала волокон, $E^s$ , Па	$2 \cdot 10^{11}$	$8 \cdot 10^{10}$	$8 \cdot 10^{10}$	$8 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{10}$	$7.4 \cdot 10^{10}$
Коэффициент Пуассона $\nu^s = \nu^f$	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
Модуль упругости структурного каркаса**, $E^f$ , Па	$2 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$	$1.1 \cdot 10^6$	$7.4 \cdot 10^6$
Начальное значение удельной площади поверхности волокон в сухом материале, $\tilde{s}_{1-2i}$ , м <sup>-1</sup>	–	$6.2 \cdot 10^5$	$4.2 \cdot 10^5$	$8.4 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$
Предел прочности при сжатии*, $\sigma_B$ , Па	$6.2 \cdot 10^8$	$5.7 \cdot 10^6$	$4.9 \cdot 10^6$	$5.2 \cdot 10^6$	$0.5 \cdot 10^6$	$0.5 \cdot 10^6$

\*Для древесины – в направлении поперек волокон.  
\*\*Для стали – в гетерогенном слое.



от 0.2 до 1 МПа. Значения температуры на внешних поверхностях  $T_1=358$  К,  $T_2=408$  К.

Коэффициент теплопроводности газа  $\lambda_1=0.0248$  Вт/(м·К). Коэффициенты теплоотдачи на межфазных поверхностях для всех контактных пар выбирались одинаково:

$$\alpha_{1_{21}}^{\Sigma} = \alpha_{1_{22}}^{\Sigma} = 2 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К});$$

$$\alpha_{21_{1}}^{\Sigma} = \alpha_{22_{1}}^{\Sigma} = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К});$$

$$\alpha_{21_{22}}^{\Sigma} = \alpha_{22_{21}}^{\Sigma} = 5000 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К}).$$

Начальное объемное содержание твердой фазы в гетерогенном слое определялось в соответствии с опорной кривой вида (16). Для параметров бета-распределения приняты значения  $m=0.5$ ,  $n=2$  (для материала 21) и  $m=2$ ,  $n=3$  (для материала 22). При этом учитывалось, что объемная концентрация твердой фазы на границах гетерогенного слоя со стороны стали  $\alpha_{22}=1$ , а со стороны капиллярно-пористого материала  $\alpha_{21} = (\alpha_{21}|_{r=0})t_p(e_m)$  (функция  $t_p(e_m)$  принимает значения от 0 до 1).

Рис. 2 иллюстрирует пример распределения объемного содержания газообразной и твердой фаз в гетерогенном слое до и после приложения нагрузки к контактной паре. Здесь же показано изменение по сечению слоя величин удельных площадей межфазных поверхностей.

Начальные значения удельной поверхности раздела компонент твердой фазы и газообразной фазы в гетерогенном слое рассчитаны в соответствии с гипотезой, согласно которой эти величины пропорциональны концентрации газа в данной точке  $s_{1_i} = (1 - \alpha_i(x_1)) \tilde{s}_{1_i}, i = 21, 22$ . Значения  $\tilde{s}_{1_i}, i = 21, 22$  определяют экспериментально [12].

В расчетах принято, что до приложения нагрузки удельная площадь контактирования частиц твердой фазы  $s_{21_{22}}$  отлична от нуля только вблизи средней линии гетерогенного слоя, а в других точках поперечного сечения этого слоя  $s_{21_{22}} = 0$ . При сжатии гетерогенного слоя все рассматриваемые текстурные характеристики гетерогенного слоя изменяются аналогично концентрациям в соответствии с рассчитываемой объемной деформацией слоя.

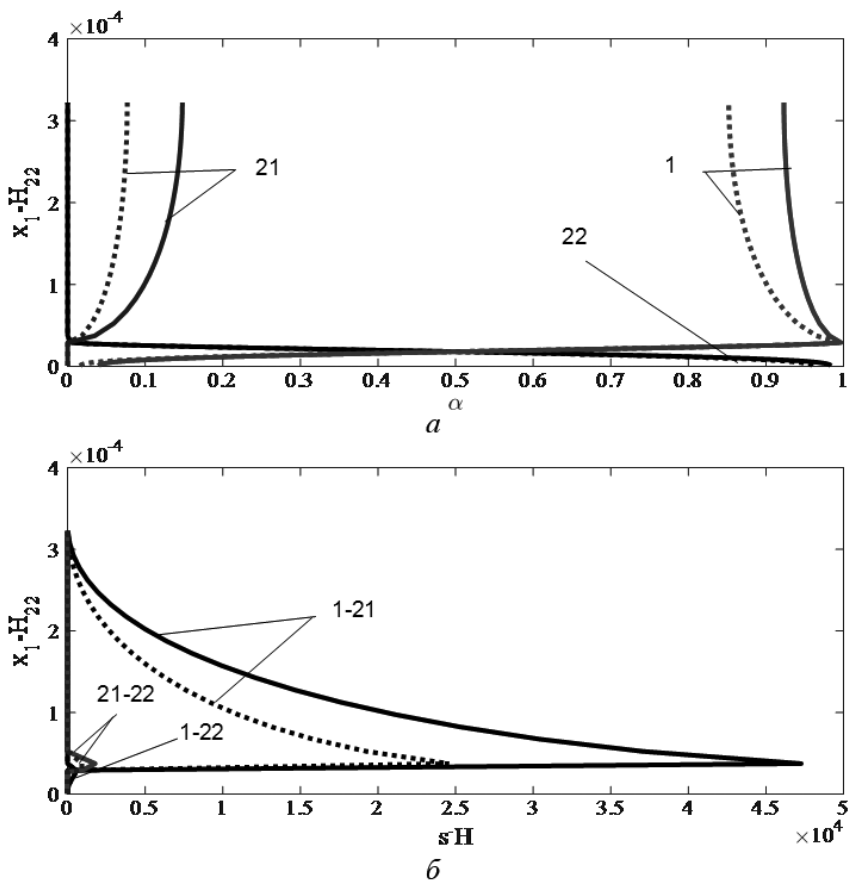


Рис. 2. Распределение по сечению гетерогенного слоя для образцов контактной пары У-8 – ТИМ-Б объемного содержания  $\alpha_i, i=21, 22$ , (а) и удельной площади межфазных поверхностей  $s_{ij}, i, j=21, 22$ , (б) после приложения нагрузки  $p_{12}=1$  МПа и в ненагруженном состоянии (сплошные и пунктирные линии соответственно)

### Результаты вычислительного эксперимента

В одномерном случае задача определения напряженно-деформированного состояния элементов контактной пары в рамках построенной математической модели может быть решена аналитически. Это позволяет получить новые текстурные характеристики гетерогенного слоя, которые определяют условия теплового взаимодействия образцов. Температурная задача исследована методом контрольного объема [13]. Верификация математической модели проведена путем сравнения результатов расчета с точным аналитическим решением задачи в предельном случае при отсутствии гетерогенного слоя. Численное и аналитическое решение хорошо согласованы. Погрешность чис-

ленного решения не превышает 0.01%. Кроме того, проведено сравнение результатов численного исследования предложенной 1D модели термического контакта с расчетными данными, полученными по известной формуле Ю. П. Шлыкова, обобщающей данные экспериментов [14]:

$$\frac{1}{R_k} = \frac{\lambda_1 Y}{2h} + 8 \cdot 10^3 \bar{\lambda}_M \left( \frac{p_{12} K}{3\sigma_g} \right)^{0.86}. \quad (21)$$

Здесь константа  $K=1$ , так как толщина гетерогенного слоя  $h=R_{\max 21}+R_{\max 22}>30$  мкм. В расчетах для стали У-8  $R_{\max 22}=30$  мкм, что соответствует обработке поверхности фрезерованием, для волокнистого материала  $R_{\max 21}=300$  мкм, что отвечает условиям обработки древесины путем дискового пиления [12]. Величина  $Y=4$  [15]. Коэффициент  $\bar{\lambda}_M$  рассчитывается как среднее геометрическое значений эффективных коэффициентов теплопроводности материалов контактной пары. Эти параметры материалов, а также значения предела прочности материалов на сжатие, которые необходимы для расчета контактного сопротивления по формуле (21), также приведены в таблице.

Из рис. 3 видно, что величина термического сопротивления, полученного для всех контактных пар при численной реализации построенной модели, адекватна результатам расчета по формуле Ю. П. Шлыкова. Для интервала нагружения контактной пары  $0.2 \text{ МПа} < p_{12} < 1 \text{ МПа}$  формула Ю. П. Шлыкова демонстрирует более существенное снижение контактного сопротивления, чем результаты численного моделирования. Однако средние значения термосопротивления, получаемые по обоим методикам, достаточно близки. Следует отметить, что формула (21) обобщает эксперименты для непористых материалов.

Анализ математической модели термомеханического контакта показывает, что на значение термического сопротивления влияет достаточ-

но широкий круг теплофизических факторов. Результаты численного моделирования, приведенные на рис. 4, показывают характер влияния некоторых из них на величину термосопротивления контакта. Эти расчеты проведены для модельных контактных пар, составленных из стального и капиллярно-пористого образца с параметрами, соответствующими древесине березы, при этом один из параметров варьировался.

Как и следовало ожидать, увеличение коэффициента теплопроводности твердой фазы ведет к снижению термосопротивления контакта. Как видно из рис. 4, а, этот эффект наиболее заметен при достаточно низких значениях  $\lambda_{21}$ . Большие величины  $\lambda_{21}$  существенного влияния на значение термического сопротивления контакта практически не оказывают, что обусловлено обратно пропорциональным характером зависимости  $R_k$  от теплового потока.

Высокопористые элементы контактной пары, характеризующиеся низкими эффективными коэффициентами теплопроводности, оказывают большее сопротивление теплопередаче в зоне контакта (рис. 4, в). При одинаковой начальной

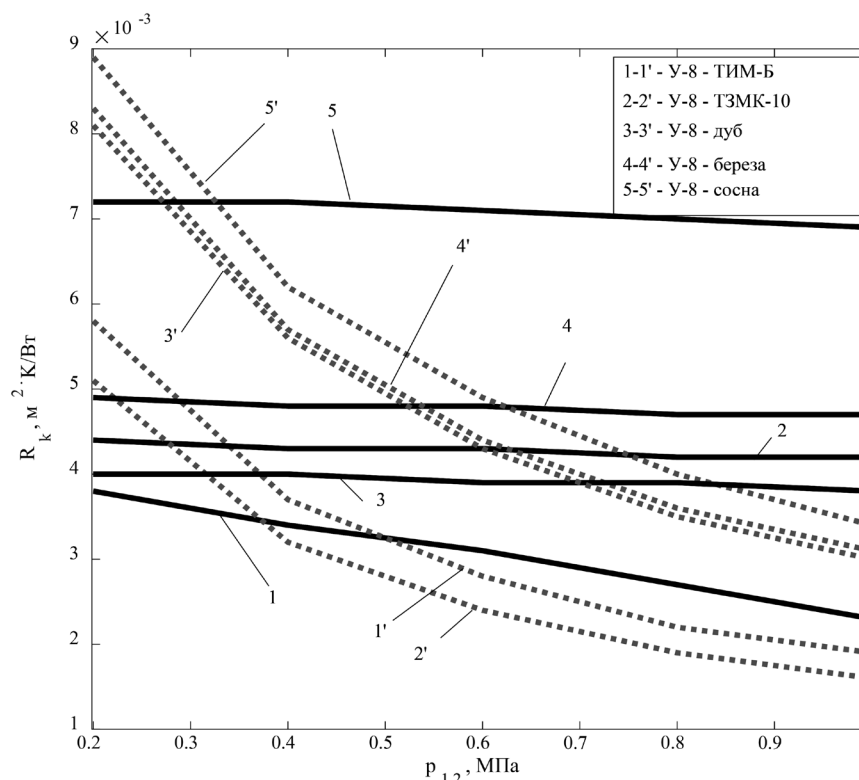
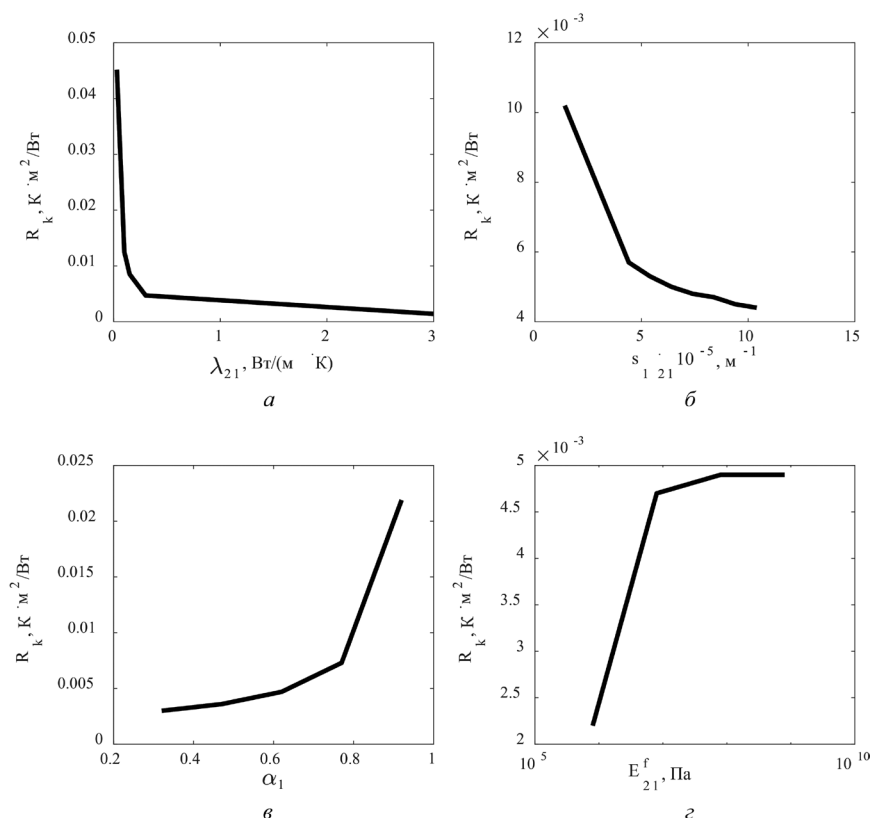


Рис. 3. Термическое сопротивление контакта в зависимости от давления. Сплошные кривые – расчет по математической модели; пунктирные – по формуле Ю. П. Шлыкова



**Рис. 4.** Зависимость контактного термического сопротивления  $R_k$  от характеристик капиллярно-пористого материала: коэффициента теплопроводности твердой фазы  $\lambda_{21}$  (а), удельной площади поверхности  $s_{1,21}$  (б), пористости капиллярно-пористого материала  $\alpha_1$  (в) и модуля упругости структурного каркаса  $E_{21f}$  (з)

пористости материал с большей удельной площадью поверхности обладает более эффективной тепловой проводимостью как в объеме, так и в контактной зоне (рис. 4, з)

Следует отметить незначительную зависимость термосопротивления от прижимного усилия  $p_{12}$  в рассмотренном диапазоне. Это связано, по-видимому, с тем что несмотря на уменьшение толщины гетерогенного слоя и определенное увеличение числа контактов между частицами твердой фазы обоих материалов после сжатия, приводящее к росту  $s_{21,22}$ , содержание газовой фазы в гетерогенном слое остается достаточно высоким, близким к начальному. Поэтому существенного вклада теплопередачи в твердой фазе гетерогенного слоя в общее значение не наблюдается. Следует ожидать, что более высокие внешние нагрузки или более деформативная структура капиллярно-пористого материала с невысокими значениями  $E_{21f}$  приведет к существенной зависимости контактного термического сопротивления от давления.

### Заключение

1. На основе механики многофазных систем построена математическая модель теплового и механического взаимодействия контактных пар из материалов с различными текстурными параметрами. Математическая модель позволяет получать прогноз термического сопротивления контакта в зависимости от широкого спектра теплофизических и структурных параметров.

2. Математическая модель в 1D-приближении в стационарном случае проанализирована численно с использованием метода контрольного объема. Исследованы контактные пары, у которых один элемент гомогенный (сталь), другой двухфазный (ТЗМК-10, ТИМ-Б, сухая древесина различных пород). Показано, что при одинаковых характеристиках гетерофазного слоя в зоне контакта

в рассмотренных температурных условиях наименьшим термическим сопротивлением обладает пара с образцом на основе базальтовых волокон, а наибольшим – с образцом из древесины сосны.

3. Результаты численного исследования модели позволяют оценить влияние физико-механических параметров элементов контактных пар на контактное термосопротивление. В частности, показано, что понижению термосопротивления способствует увеличение коэффициента теплопроводности материала дисперсной фазы и удельной площади поверхности. Термосопротивление растет при увеличении пористости материала и модуля упругости структурного каркаса капиллярно-пористой системы. Предложенная математическая модель позволяет провести интегральный учет вклада всех факторов.

### Условные обозначения

- $B$  – индивидуальная газовая постоянная, Дж/(кг К);
- $c_p$  – теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг К);
- $e_m$  – безразмерный аргумент опорной кривой;
- $E$  – модуль Юнга, Па;

$H$  – высота слоя, м;  
 $h$  – высота гетерогенного слоя, м;  
 $K_{ij}$  – коэффициент проницаемости  $i$ -ой фазы в фазе  $j$ , м<sup>2</sup>;  
 $m, n$  – параметры гамма-функции;  
 $p$  – давление, Па;  
 $p_{12}$  – интенсивность распределенной нагрузки, Па;  
 $q$  – плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>;  
 $Q_{\Sigma(i)}$  – интенсивность межфазного теплообмена между фазами или компонентами  $i$  и  $j$ , Вт/м<sup>3</sup>;  
 $R_k$  – термическое сопротивление теплопередачи, м<sup>2</sup>К/Вт;  
 $R_{\max}$  – высота неровностей профиля;  
 $s_{i,j}$  – удельная поверхность раздела фаз  $i$  и  $j$ , м<sup>-1</sup>;  
 $\tilde{s}_{i,j}$ ,  $i, j=1, 21, 22$  – константы, м<sup>-1</sup>;  
 $T$  – температура, К;  
 $t$  – время, с;  
 $t_p(e_m)$  – уравнение опорной кривой;  
 $u$  – перемещение, м;  
 $\mathbf{v}$  – вектор скорости, м/с;  
 $V$  – объем, м<sup>3</sup>;  
 $x^k$  – декартовы координаты ( $k=1, 2, 3$ ), м;  
 $z$  – размерный аргумент опорной кривой, м;  
 $\alpha$  – объемное содержание фазы;  
 $\alpha_{i,j}^s$  – коэффициент теплоотдачи между фазами  $i$  и  $j$ , Вт/(м<sup>2</sup>К);  
 $\Gamma$  – гамма-функция Эйлера;  
 $\delta^{kl}$  – единичный тензор;  
 $\varepsilon^{kl}$  – тензор деформаций;  
 $\Theta$  – разность между текущей температурой и некоторым ее начальным значением, К;  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(мК);  
 $\Lambda$  – коэффициент температурного расширения, К<sup>-1</sup>;  
 $\mu$  – вязкость, Па·с;  
 $\nu$  – коэффициент Пуассона;  
 $\Pi$  – податливость, Па<sup>-1</sup>;  
 $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  
 $\sigma^{kl}$  – тензор напряжений, Па;  
 $\sigma^k$  – вектор напряжений;  
 $\langle \dots \rangle_i$  – усреднение по объему фазы  $i$ .

Нижние индексы относятся: 1, 2 – к газообразной и твердой фазам; 21 и 22 – к компонентам твердой фазы, верхнего и нижнего элемента контактной пары соответственно; 0 – к начальным значениям;  $c$  – к окружающей среде;  $cont$  – к контурной площади;  $f$  – к эффективным (фиктивным) значениям;  $k$  – к поверхности контакта;  $s$  – к гомогенному материалу;  $\Sigma_{ij}$  – к границам раздела фаз  $i$  и  $j$ ;  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  – к внешним границам контактной пары (1 – верхняя, 2 – нижняя, 3 – боковые).

Верхние индексы: ' (штрих) относится к параметрам, являющимися средними в пределах микрообъема  $d^3V \ll h^3$ ,  $f$  – эффективное (фиктивное) значение;  $s$  – гомогенный материал.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Попов В. М.** Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений. М.: Энергия, 1971. 216 с.
2. **Меснянкин С. Ю., Викулов А. Г., Викулов Д. Г.** Современный взгляд на проблемы теплового контактирования твердых тел // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. № 9. С. 945–970. DOI: 10.3367/UFNe.0179.200909c.0945
3. **Нигматулин Р. И.** Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
4. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
5. **Демкин Н. Б.** Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
6. **Баданина Ю. В., Комков М. А., Тарасов В. А., Тимофеев М. П., Моисеев А. В.** Моделирование и экспериментальное определение технологических параметров жидкостного формования базальтовой теплоизоляции насосно-компрессорных труб // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2015. № 4. С. 13–28. DOI: 10.7463/0315.0761820
7. **Лурье С. А., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О., Бузник В. М., Лизунова Д. В.** Методика численного моделирования механических свойств пористых теплозащитных материалов на основе керамических волокон // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 4. С. 263–274. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.15
8. **Алифанов О. М., Черепанов В. В.** Математическое моделирование высокопористых волокнистых материалов и определение их физических свойств // Теплофизика высоких температур. 2009. Т. 47. № 3. С. 463–472. DOI: 10.1134/S0018151X09030183
9. **Щетанов Б. В., Ивахненко Ю. А., Бабашов В. Г.** Теплозащитные материалы // Российский химический журнал. 2010. Т. 54. № 1. С. 12–19.
10. **Падерин Л. Я., Прусов Б. В., Токарев О. Д.** Исследование теплопроводности пористых теплоизоляционных материалов при высоких температурах // Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. 42. № 4. С. 77–83.
11. **Дорняк О. Р., Свиридов Л. Т.** Структурно-механические свойства и напряженно-деформированное состояние древесины в процессах прессования. Реологическое уравнение состояния древесины // Вестник Московского государственного университета леса. Лесной вестник. 2006. № 1. С. 50–57.
12. **Уголев Б. Н.** Древесиноведение и лесное товароведение. М.: ГОУ ВПО МГУ Л, 2007. 351 с.
13. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
14. **Шлыков Ю. П., Ганин Е. А., Царевский С. Н.** Контактное термическое сопротивление. М.: Энергия, 1977. 328 с.
15. **Попов В. М., Краснобородько А. И.** К определению термического контактного сопротивления в газовой среде // Инженерно-физический журнал. 1975. Т. 28. № 5. С. 875–883.



## Mathematical modeling of thermal resistance in contact pairs of homogeneous and heterogeneous materials

O. R. Dornyak, V. M. Popov, N. A. Anashkina

*Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G. F. Morozov,  
Voronezh, 394087, Russia  
e-mail: ordornyak@mail.ru*

The mathematical model of the contact thermal resistance for two dissimilar materials is presented. One of the materials is capillary-porous, the second one is homogeneous. The thermal resistivity prediction in the contact pairs of this type is actual for the aerospace industry with reference to the usage of the highly porous ceramics for the thermal protection, as well as for chemical technologies and biotechnologies, which provided the contact drying operations. The mathematical model is based on the mechanics of the multiphase systems. The description of the transfer processes is made for the thermophysical variables averaged over the volumes of the solid and gas phases. A feature of the model is the selection in the contact zone of the intermediate heterogeneous layer, which contains the solid phase inclusions of both materials having different physical and mechanical properties and different temperatures. The mathematical model includes the conservation equations of the mass, the momentum and the energy. The rheological equation is being constructed on the assumption of the elastic nature deformation of the materials. In relation to the heterogeneous regions, one should take into account the influence on the dependence of the material deformability from the phase volume concentrations and the elastic modules as well as the structural framework and the material from which the framework was created. In the general case, the formulated model is non-stationary, three-dimensional, conjugate, non-linear. Refer to the present paper, we investigated the constructed model in the one-dimensional stationary approximation. The problem of the stressedly-deformed state for the contact pair elements is being solved analytically. This solution allows obtaining the textural characteristics of the intermediate heterogeneous layer after the contact pair compression, which specifies the thermal interaction conditions of the samples. The temperature problem was investigated by the control volume method. The thermal resistance values obtained using the mathematical model give the satisfactory agreement with the calculated values obtained using the well-known Yu. P. Shlykov empirical formula. The model numerical study results let us to evaluate the influence of the physical-mechanical parameters of the contact pair elements on the contact thermal resistance. In particular, it has been shown that a decrease in thermal resistance is being facilitated by an increase in the thermal conductivity of the dispersed phase material and the specific surface area. The thermal resistance increases with increasing of the material porosity and the structural frame elastic modulus of the capillary-porous system. The proposed mathematical model allows us to take into account the integral contribution of all these factors.

**Keywords:** thermal resistance of the contact, multiphase systems, mathematical modeling.

### REFERENCES

1. **Popov V.M.** *Teploobmen v zone kontakta raz'emnyh i neraz'emnyh soedinenij* [Heat transfer in the contact zone of detachable and undetachable connections]. Moscow: Energiya, 1971. 216 p. In Russ.
2. **Mesnyankin S.Y., Vikulov A.G., Vikulov D.G.** Solid-solid thermal contact problems: Current understanding. *Physics-USpekhi*, 2009, vol. 52, no. 9, pp. 891–914.
3. **Nigmatulin R.I.** *Osnovy mekhaniki geterogennyh sred* [Fundamentals of heterogeneous media mechanics]. Moscow: Nauka, 1978. 336 p. In Russ.
4. **Sedov L.I.** *Mekhanika sploshnoj sredy. T. 2* [Continuum Mechanics, Vol. 2]. Moscow: Nauka, 1970. 568 p. In Russ.
5. **Demkin N.B.** *Kontaktirovanie sherohovatyh poverkhnostej* [Contact of rough surfaces]. Moscow: Nauka, 1970. 227 p. In Russ.
6. **Badanina Yu.V., Komkov M.A., Tarasov V.A., Timofeev M.P., Moiseev A.V.** Modelirovanie i eksperimental'noe opredelenie tekhnologicheskikh parametrov zhidkostnogo formovaniya bazal'tovoj teploizolyacii nasosno-kompressornykh trub [Simulation and experimental determination of technological liquid molding parameters of tubing basalt insulation]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana – Science and education: a scientific publication of Bauman Moscow State Technical University*, 2015, no. 4, pp. 13–28. In Russ. DOI: 10.7463/0315.0761820
7. **Lurie S.A., Rabinskii L.N., Solyaev Y.O., Bouz-nik V.M., Lizunova D.V.** Metodika chislennogo modelirovaniya mekhanicheskikh svoystv poristykh teplozashchitnykh materialov na osnove keramicheskikh volokon [Methodology of numerical modelling of mechanical

- properties of the porous heat-shielding material based on ceramic fibers]. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika – PN-RPU mechanics bulletin*, 2016, no. 4, pp. 263–274. In Russ. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.15
8. **Alifanov O.M., Cherepanov V.V.** Mathematical simulation of high-porosity fibrous materials and determination of their physical properties. *High Temperature*, 2009, vol. 47, no. 3, pp. 438–447. DOI: 10.1134/S0018151X09030183.
  9. **Schetanov B.V., Ivakhnenko Yu.A., Babashov V.G.** Teplozashchitnye materialy [Heat-shielding materials]. *Rossiyskij himicheskij zhurnal – Russian chemical journal*, 2010, vol. 54, no. 1, pp. 12–19. In Russ.
  10. **Paderin L.Ya., Prusov B.V., Tokarev O.D.** Issledovanie teploprovodnosti poristykh teploizolyacionnykh materialov pri vysokih temperaturah [Investigation of thermal conductivity of porous heat-insulating materials at high temperatures] *Uchenye zapiski CAGI – Scientific Journal of Central Aerohydrodynamic Institute*, 2011, vol. 42, no. 4, pp. 77–83. In Russ.
  11. **Dornyak O.R., Sviridov L.T.** Strukturno-mekhanicheskie svoystva i napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie drevesiny v processah pressovaniya. Reologicheskoe uravnenie sostoyaniya drevesiny [Structural and mechanical properties and stress-strain state of wood in the processes of pressing. Rheological equation of the state of wood]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta lesa – Lesnoj vestnik – Bulletin of Moscow State Forest University. Forestry Bulletin*, 2006, no. 1, pp. 50–57. In Russ.
  12. **Ugolev B.N.** *Drevesinovedenie i lesnoe tovarovedenie* [Wood science and forestry]. Moscow: Moscow State Forest University, 2007. 351 p. In Russ.
  13. **Patankar S.V.** *Numerical Methods in Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: Hemisphere, 1980. 152 p.
  14. **Shlykov Yu.P., Ganin E.A., Carevskij S.N.** *Kontaktnoe termicheskoe soprotivlenie* [Contact thermal resistance]. Moscow: Energiya, 1977. 328 p. In Russ.
  15. **Popov V.M., Krasnoborod'ko A.I.** Thermal contact resistance in a gaseous medium. *Journal of Engineering Physics*, 1975, vol. 28, no.5. pp. 633–638.