

## РОБАСТНОЕ КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ПЕРЕЛЕТА С МАЛОЙ ТЯГОЙ МЕЖДУ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И КРУГОВОЙ ОРБИТАМИ

---

ПЕТУХОВ Вячеслав Георгиевич, начальник отдела Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н.  
E-mail: vgpetchukhov@gmail.com

PETUKHOV Viacheslav G., Research Institute of Applied Mechanics and Electrodynamics (RIAME), Head of department, Doctor.  
E-mail: vgpetchukhov@gmail.com

---

*Рассмотрена задача синтеза устойчивого управления с обратной связью на основе решения задачи минимизации времени многовиткового перелета между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами в ньютоновском гравитационном поле. Задача решена с использованием асимптотических свойств и симметрий оптимального управления в невозмущенной задаче. Показана устойчивость полученного управления по отношению к внешним возмущениям и отклонениям начальных условий. Полученное квазиоптимальное управление с обратной связью может использоваться для обеспечения автономности КА и при проведении проектно-баллистического анализа.*

*It is considered the synthesis of robust suboptimal feedback control based on minimum-time multi-revolution transfer between non-coplanar elliptical and circular orbits in the inverse square gravity field. The problem is solved using asymptotic nature and symmetries of optimal control on the unperturbed trajectory. It is shown stability of the feedback control with respect to perturbations and deviation of initial conditions. Derived suboptimal feedback control can be used for providing of spacecraft autonomy and for mission design purpose.*

**Ключевые слова:** малая тяга, оптимизация, управление с обратной связью.

**Key words:** low-thrust, optimization, feedback control.

### Обозначения

ГСО — геостационарная орбита

КА — космический аппарат

ЭРДУ — электроракетная двигательная установка

ка

### Введение

Рассматривается задача многовиткового перелета КА с малой тягой за минимальное время. Применяется подход, основанный на использовании равноденственных орбитальных элементов, принципа

максимума и численного осреднения уравнений оптимального движения [1]. В отличие от [1], для решения краевой задачи принципа максимума используется метод продолжения по параметру [2, 3], позволяющий существенно расширить область сходимости задачи и устойчиво получать оптимальные решения для различных краевых условий и параметров КА.

В работе [3] был рассмотрен общий случай оптимального многовиткового перелета космического аппарата (КА) с малой тягой между некомпла-

нарными эллиптическими орбитами. В настоящей статье, с использованием представленных в [2, 3] численных методов, подробно анализируется частная, но практически важная задача выведения КА с некоторой начальной эллиптической орбиты на конечную круговую орбиту. Точнее, рассматривается оптимальный по быстродействию многовитковый перелет с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами в центральном ньютоновском гравитационном поле. Рассматривается случай нерегулируемой двигательной установки малой тяги, т. е. тяга и удельный импульс предполагаются постоянными при включенной двигательной установке. Направление вектора тяги не ограничено и выбирается из условий оптимальности. Считается, что линия апсид начальной эллиптической орбиты лежит в плоскости конечной круговой орбиты. Задача перелета между такими орбитами типична при выведении КА на высокие круговые орбиты, в частности на геостационарную орбиту. Разумеется, рассматриваемая задача обратима, поэтому полученные здесь результаты применимы и для перелета с начальной круговой орбиты на конечную эллиптическую орбиту.

Для рассматриваемых задач характерны большая длительность перелета и высокая чувствительность к ошибкам в определении начального фазового вектора, к ошибкам реализации программы управления и к внешним возмущениям. Поэтому для реализации перелета требуется периодическая коррекция программы управления вектором тяги для компенсации ухода траектории под влиянием различных возмущений. Разумеется, такая коррекция может производиться с помощью периодически повторяемого решения задачи оптимизации траектории перелета с текущей оценкой фазового вектора КА, тяги и удельного импульса его двигательной установки. Однако такой подход требует больших вычислительных затрат, и поэтому труднореализуем в составе бортового программного обеспечения КА. Проведение же таких расчетов наземными средствами с последующей передачей результатов на борт КА в виде обновленного полетного задания приводит к снижению автономности КА и дополнительной нагрузке на наземные службы управления полетом. Поэтому достаточно актуальной является разработка алгоритма управления вектором тяги с обратной связью, обеспечивающего близкую к оптимальной траекторию выведения, устойчивость к ошибкам определения фазового вектора КА, к ошибкам исполнения программы управления и к внешним возмущениям траектории.

Основной целью настоящего исследования является синтез закона управления движением КА с обратной связью, близкого к оптимальному быстродействию и обеспечивающего выведение КА на заданную конечную круговую орбиту не только в центральном ньютоновском гравитационном поле, но и при наличии возмущений.

### Математическая постановка задачи оптимального управления

Следуя [1, 3], запишем уравнения управляемого движения КА в ньютоновском гравитационном поле в равноденственных элементах в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot h \cos \vartheta \cos \psi; \\ \frac{de_x}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \left\{ \xi \sin F \sin \vartheta \cos \psi + [(\xi + 1) \cos F + e_x] \cos \vartheta \cos \psi - e_y \eta \sin \psi \right\}; \\ \frac{de_y}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \left\{ -\xi \cos F \sin \vartheta \cos \psi + [(\xi + 1) \sin F + e_y] \cos \vartheta \cos \psi + e_x \eta \sin \psi \right\}; \\ \frac{di_x}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot \frac{1}{2} \tilde{\varphi} \cos F \sin \psi; \\ \frac{di_y}{dt} &= \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot \frac{1}{2} \tilde{\varphi} \sin F \sin \psi; \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\xi^2}{h^3} + \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} \cdot \eta \sin \psi; \\ \frac{dm}{dt} &= -\delta \frac{P}{w}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\delta$  — функция включения двигателя ( $\delta = 1$  при включенной ЭРДУ и  $\delta = 0$  при неработающей ЭРДУ);  $P$  — реактивная тяга;  $m$  — масса КА;  $\vartheta$  — угол тангажа (угол между проекцией вектора тяги на плоскость оскулирующей орбиты КА и трансверсальным направлением);  $\psi$  — угол рысканья (угол между вектором тяги и плоскостью оскулирующей орбиты КА);

$$h = \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \quad e_x = e \cos(\Omega + \omega),$$

$$e_y = e \sin(\Omega + \omega), \quad i_x = \text{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega, \quad i_y = \text{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega \quad \text{и}$$

$F = v + \omega + \Omega$  — равноденственные элементы;  $p$  — фокальный параметр;  $e$  — эксцентриситет;  $\omega$  — аргумент перицентра;  $i$  — наклонение;  $\Omega$  — долгота восходящего узла;  $v$  — истинная аномалия;

$$\xi = 1 + e_x \cos F + e_y \sin F, \quad \eta = i_x \sin F - i_y \cos F,$$

$\tilde{\varphi} = 1 + i_x^2 + i_y^2$ ;  $w$  — скорость истечения ЭРДУ КА;

$\mu$  — гравитационный параметр центрального тела.

Реактивная тяга  $P$  и скорости истечения  $w$  в рассматриваемой постановке принимаются постоянными.

Требуется перевести КА с начальной массой  $m_0$  с начальной орбиты

$$h = h_0, \quad e_x = e_{x0}, \quad e_y = e_{y0}, \quad i_x = i_{x0}, \quad i_y = i_{y0} \quad (2)$$

на конечную

$$h = h_k, \quad e_x = e_y = 0, \quad i_x = i_y = 0 \quad (3)$$

за минимальное время  $T$ , т. е. рассматривается задача минимизации функционала

$$J = \int_0^T dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Равенство нулю конечного значения наклонения в (3) достигается разворотом основной плоскости системы координат для обеспечения ее совпадения с плоскостью конечной орбиты.

Следуя [3], запишем гамильтониан задачи оптимального управления в виде

$$H = -1 + \frac{\xi^2}{h^3} p_F + \delta \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} (A_\tau \cos \vartheta \cos \psi + A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_n \sin \psi), \quad (5)$$

где

$$A_\tau = hp_h + [(\xi + 1) \cos F + e_x] p_{ex} + [(\xi + 1) \sin F + e_y] p_{ey};$$

$$A_r = \xi (\sin F \cdot p_{ex} - \cos F \cdot p_{ey});$$

$$A_n = \eta (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey}) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi} (\cos F \cdot p_{ix} + \sin F \cdot p_{iy}) + \eta \cdot p_F;$$

$p_h, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_F$  — переменные, сопряженные к фазовым координатам  $h, e_x, e_y, i_x, i_y$  и  $F$  соответственно.

Оптимальное управление  $\delta(t), \vartheta(t), \psi(t)$  определяется из условия максимума гамильтониана (5):

$$\cos \vartheta = \frac{A_\tau}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}; \quad \sin \vartheta = \frac{A_r}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}; \quad (6)$$

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2}}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}}; \quad \sin \psi = \frac{A_n}{\sqrt{A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2}}; \quad (7)$$

$$\delta \equiv 1. \quad (8)$$

Из условия (8) следует, что двигательная установка на оптимальной траектории постоянно включена, поэтому массу КА можно рассматривать как функцию времени:

$$m = m_0 - (P/w)t. \quad (9)$$

Подстановка выражений для оптимального управления (6)–(8) в (5) приводит к выражению для оптимального гамильтониана:

$$H = -1 + \frac{P}{m} \frac{h}{\xi} (A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2} + \frac{\xi^2}{h^3} p_F = -1 + kPA + H_F, \quad (10)$$

где  $k = \frac{1}{m} \frac{h}{\xi}$ ,  $A = (A_\tau^2 + A_r^2 + A_n^2)^{1/2}$ ,  $H_F = \frac{\xi^2}{h^3} p_F$ .

Уравнения оптимального движения при этом примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = P \left[ k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial \mathbf{p}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \mathbf{p}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \mathbf{p}} \right) A^{-1} \right]; \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_F} = \frac{\partial H_F}{\partial p_F} + P \left[ k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial p_F} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial p_F} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial p_F} \right) A^{-1} \right]; \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial H_F}{\partial \mathbf{x}} - P \left[ \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}} A + k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial \mathbf{x}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \mathbf{x}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \mathbf{x}} \right) A^{-1} \right]; \\ \frac{dp_F}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial F} = -\frac{\partial H_F}{\partial F} - P \left[ \frac{\partial k}{\partial F} A + k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial F} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial F} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial F} \right) A^{-1} \right], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\mathbf{x} = (h, e_x, e_y, i_x, i_y)^T$ ,  $\mathbf{p} = (p_h, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy})^T$ .

Так как рассматривается межорбитальный перелет, значение истинной долготы  $F$  на конечной орбите не фиксировано, поэтому  $p_F(T) = 0$ . Оптимальный гамильтониан после осреднения по истинной долготе не зависит от  $F$ , поэтому  $\frac{dp_F}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial F} = 0$ . Следовательно, на осредненном решении  $p_F \equiv 0$ . Оптимальный гамильтониан (12), с учетом предполагаемого осреднения, принимает вид

$$H = -1 + kPA, \quad (12)$$

а уравнения движения (11) при этом можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \delta P \left[ k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial \mathbf{p}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \mathbf{p}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \mathbf{p}} \right) A^{-1} \right]; \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \\ &= -\delta P \left[ \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}} A + k \left( A_\tau \frac{\partial A_\tau}{\partial \mathbf{x}} + A_r \frac{\partial A_r}{\partial \mathbf{x}} + A_n \frac{\partial A_n}{\partial \mathbf{x}} \right) A^{-1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Как и в [1], уравнения оптимального движения (13) численно осредняются в процессе интегрирования по следующей схеме:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{f}_e(\mathbf{y}, F, t) dt = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}_e(\mathbf{y}, F, t) \frac{dt}{dF} dF, \quad (14)$$

где  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T, \mathbf{p}^T)^T$ ,  $\mathbf{f}_e(\mathbf{y}, F, t)$  — правые части неосредненных дифференциальных уравнений (13);

$$n = \frac{1}{\mu} \left[ \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2} / h \right]^3 - \text{среднее движение}; \quad \frac{dt}{dF} = \frac{h^3}{\xi^2}.$$

В результате интегрирования уравнений (13) с применением схемы осреднения (14) определяются значения фазового вектора  $\mathbf{x}$  и вектора сопряженных переменных  $\mathbf{p}$  в конечный момент времени  $T$  и значения невязок решения краевой задачи:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} h(T) - h_k \\ e_x(T) - e_{xk} \\ e_y(T) - e_{yk} \\ i_x(T) - i_{xk} \\ i_y(T) - i_{yk} \\ H(T) \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Уравнения (15) необходимо решить относительно вектора неизвестных параметров краевой задачи, который имеет вид

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}(0) \\ T \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального управления сводится к краевой задаче (13)—(16), которая решается численным методом продолжения по параметру, подробно описанным в [2—4].

**Особенности оптимальных по быстродействию перелетов между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами со свободной линией апсид начальной орбиты**

В случае, если линия апсид начальной эллиптической орбиты свободна, из условий трансверсальности следует, что она должна совпадать с линией пересечения плоскостей начальной и конечной орбит [3].

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав за единицу длины и времени радиус  $r_k$  конечной орбиты и величину, обратную среднему движению  $(r_k^3 / \mu)^{1/2}$  по конечной орбите соответственно. Как следует из постановки задачи, имеются только три существенных параметра начальной орбиты, полностью определяющие краевую задачу принципа максимума с точностью до поворота системы координат: безразмерный радиус перигея  $r_p$ , безразмерный радиус апогея  $r_a$  и наклонение  $i$  начальной орбиты. В самом деле, так как линия апсид совпадает с линией пересечения плоскостей начальной и конечной орбит, всегда можно определить систему координат, в которой долгота восходящего узла и аргумент перицентра начальной орбиты равны нулю. Для этого необходимо, чтобы ось  $X$  этой системы координат была направлена в сторону перицентра начальной орбиты, а ось  $Y$  лежала в плоскости конечной орбиты.

В силу симметрии задачи, оптимальное управление определяют три существенных параметра: это начальные значения  $p_h, p_{ex}, p_{ix}$ . Начальные значения  $p_{ey}$  и  $p_{iy}$  равны 0. При этом оптимальное управление на витке симметрично относительно линии апсид.

Применение метода осреднения приводит к асимптотичности найденного оптимального решения. Это означает, что осредненное оптимальное решение применимо для различных значений тяги, удельного импульса и массы КА до тех пор, пока выполняется допущение о малости относительно изменения элементов орбиты за один виток. В этом случае, при близких значениях «медленных» орбитальных элементов и малом изменении этих элементов на витке траектории, зависимости оптимальных углов ориентации вектора тяги от истинной аномалии будут близки для КА с различными значениями текущей тяговооруженности и удельного импульса.

Наконец, найденное в рамках рассматриваемой постановки оптимальное решение является масштабируемым по планетоцентрическому удалению и гравитационному параметру центрального небесного тела. Действительно, рассмотрим перелет в центральном ньютоновском гравитационном поле небесного тела с гравитационным параметром  $\mu$  с эллиптической орбиты с радиусом перицентра  $r_{p0}$ , радиусом апоцентра  $r_{a0}$  и наклонением  $i_0$  на конечную круговую орбиту радиуса  $r_k$  с наклонением  $i_k$ . В результате решения краевой задачи оптимального управления получим безразмерные значения сопряженных переменных в начальный момент времени  $P_{h0}^*, P_{ex0}^*, P_{ix0}^*$  и безразмерное время перелета  $T^*$ . Полученная оптимальная траектория может быть отмасштабирована для перелета в ньютоновском гравитационном поле небесного тела с гравитационным параметром  $\mu_1$  с эллиптической орбиты с радиусом перицентра  $r_{p01}$ , радиусом апоцентра  $r_{a01}$  и наклонением  $i_{01}$  на конечную круговую орбиту радиуса  $r_{k1}$  с наклонением  $i_{k1}$  в случае, если

$$r_{p01} = r_{p0} r_{k1} / r_k, \quad r_{a01} = r_{a0} r_{k1} / r_k, \quad i_{k1} = i_{01} + (i_k - i_0),$$

при этом время перелета составит  $T_1 = (r_{k1}^3 / \mu_1)^{1/2} T^*$ .

### Расчет оптимальных траекторий на сетке значений радиусов перигея, апогея и наклоения начальной орбиты

С целью разработки алгоритма для быстрой оценки основных проектно-баллистических параметров КА и синтеза управления с обратной связью был проведен численный анализ оптимальных по быстрдействию многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптической орбитой и ГСО в широком диапазоне изменения параметров начальной орбиты. Для этого была рассмотрена трехмерная сетка начальных значений радиуса перигея, радиуса апогея и наклоения. В качестве начальных значений для радиусов перигея и апогея используется значение  $r_0 = 6571$  км,  $j$ -й узел сетки имеет значение

$$r_j = \exp \left[ \ln r_0 + \frac{j}{20} \ln \frac{r_{GEO}}{r_0} \right], \quad \text{где } j$$

изменяется от 0 до 39, а  $r_{GEO} = 42164$  км. Таким образом, определена сетка  $40 \times 40$  с максимальным значением радиуса перигея и апогея  $\sim 246539,565$  км. Рассматриваемый диапазон начального наклоения — от 0 до 90° с шагом 5°. Общее число узлов на рассматриваемой сетке, таким образом, составляет  $40 \times 40 \times 19$ , что с учетом ограничения  $r_p \leq r_a$  приводит к определению  $40 \times (40+1) \times 19/2 = 15580$  различных начальных орбит на рассматриваемой сетке.

Для каждой начальной орбиты, параметры которой определяются узлами введенной сетки, была решена задача определения траектории перелета за минимальное время и получены значения требуемой характеристической скорости, минимального и максимального геоцентрического удаления КА в процессе перелета и начальные значения сопряженных переменных. Значения характеристической скорости перелета на сетке параметров начальной орбиты использовались для быстрой оценки конечной массы КА и времени перелета [4, 5], а начальные значения сопряженных переменных — для синтеза квазиоптимального управления с обратной связью.

### Синтез квазиоптимального управления с обратной связью

Вычисленные на трехмерной сетке параметров начальной орбиты начальные значения сопряженных переменных  $p_h, p_{ex}, p_{ix}$  можно использовать в процедуре линейной интерполяции для оценки начальных значений этих переменных для произвольной начальной эллиптической орбиты с линией апсид, совпадающей с линией пересечения плоскостей начальной и конечной орбит. Полученные таким образом начальные значения  $p_h, p_{ex}, p_{ix}$ , дополненные нулевыми начальными значениями остальных сопряженных переменных, можно использовать при интегрировании неосредненных уравнений движения. Численное моделирование показало, что для невозмущенных траекторий в ньютоновском гравитационном поле такой подход дает хорошие результаты — оскулирующие элементы неосредненной траектории совершают малые короткопериодические колебания в окрестности осредненного решения.

Ситуация осложняется при попытке интегрирования с таким управлением траекторий, возмущенных внешними ускорениями, ошибками в определении начальных условий и в исполнении управляющего воздействия. В этом случае ошибки с течением времени накапливаются, что в итоге приводит к недопустимо большому невязкам на правом конце траектории. В качестве примера рассмотрим задачу перелета КА с малой тягой с начальной эллиптической орбиты, имеющей высоту перигея 500 км, высоту апогея 30000 км и наклонение 62,8°, на ГСО (высоты указаны относительно среднего радиуса Земли 6371 км). Начальная масса КА принята равной 1000 кг, тяга двигателя — 0,2 Н, удельный импульс — 1500 с. На рис. 1 показаны зависимости от времени большой полуоси, радиусов апогея и перигея: 1 — на осредненной траектории (пунктирная линия); 2 — на невозмущенной неосреднен-

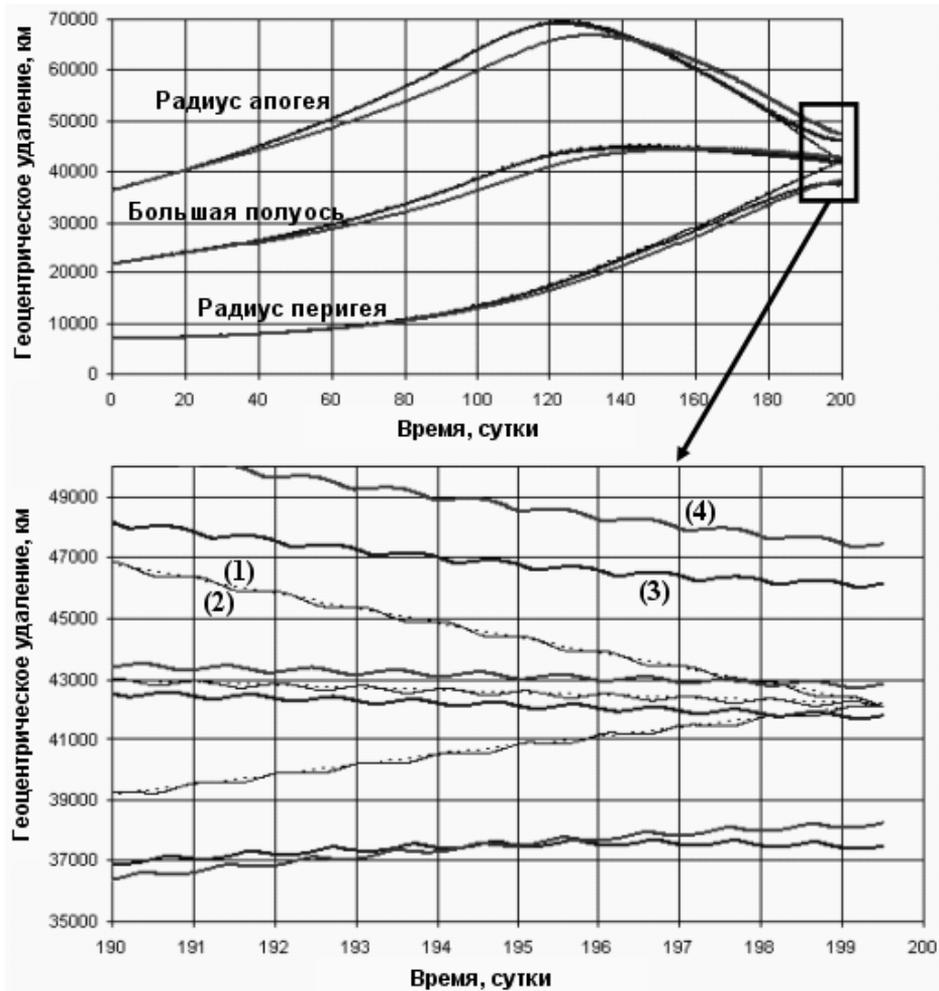


Рис. 1. Зависимость большой полуоси, радиуса перигея и радиуса апогея от времени перелета:

1 — осредненное оптимальное решение для центрального поля (пунктирная линия); 2 — интегрирование неосредненных уравнений оптимального движения в центральном поле с начальными значениями сопряженных переменных из осредненной задачи (тонкая сплошная линия); 3 — то же, что и 2, но с учетом геопотенциала Земли  $10 \times 10$  и притяжения Луны и Солнца; 4 — то же, что и 3, но с учетом выключения двигателей на теневых участках

ной траектории (сплошная тонкая черная линия); 3 — на неосредненной траектории с учетом возмущений от геопотенциала до 10-й степени и 10-го порядка и лунно-солнечных возмущений; 4 — на неосредненной траектории, на которой, кроме перечисленных возмущений, еще отключаются двигатели на теневых участках. Видно, что рассматриваемые возмущения приводят к уходу в конечных радиусах перигея и апогея на 4–5 тыс. км. Отклонение в наклонении конечной орбиты достигает  $13\text{--}14^\circ$ .

Следующий вариант использования вычисленных значений сопряженных переменных заключается в определении текущих значений сопряженных переменных по текущим значениям радиусов перигея, апогея и наклонения. В этом случае текущие значения  $p_h, p_{ex}, p_{ix}$  определяются с помощью трехмерной линейной интерполяции на трехмерной

сетке как функции текущих  $r_p, r_a$  и  $i$ . Как и прежде, значения  $p_{Fs}, p_{ey}, p_{iy}$  принимаются равными нулю. Вычисленные значения сопряженных переменных подставляются в выражения (6), (7) для вычисления углов ориентации вектора тяги. Подобный подход обеспечивает устойчивость управления по отношению к возмущениям в большой полуоси, эксцентриситете и наклонении, но остается неустойчивым к возмущениям в аргументе перигея и долготе восходящего узла. В результате на возмущенных траекториях из-за вращения линии апсид и линии узлов накапливаются ошибки во всех элементах орбиты, хотя и в меньшей степени, чем в предыдущем случае.

Для обеспечения устойчивости управления по отношению к произвольным возмущениям было использовано следующее преобразование текущих сопряженных переменных:

$$\begin{aligned}
 p_h^* &= p_h(r_a, r_p, i); \\
 p_{ex}^* &= p_{ex}(r_a, r_p, i) \cos(\omega + \Omega); \\
 p_{ey}^* &= p_{ex}(r_a, r_p, i) \sin(\omega + \Omega); \\
 p_{ix}^* &= p_{ix}(r_a, r_p, i) \cos(\Omega); \\
 p_{iy}^* &= p_{ix}(r_a, r_p, i) \sin(\Omega),
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

где  $p_h, p_{ex}, p_{ix}$  по-прежнему определяются с помощью трехмерной линейной интерполяции на трехмерной сетке как функции текущих  $r_p, r_a$  и  $i$ .

Управление (17) не зависит явно от времени, явно зависит от всех шести текущих элементов орбиты и имеет форму управления с обратной связью. Легко показать, что использование преобразованных значений текущего сопряженного вектора в выражениях (6), (7) приводит к тому, что локальные экстремумы угла рыскания достигаются в узловых точках, а угол тангажа равен 0 или 180° в перигее и апогее. В результате, даже при расхождении линий узлов и апсид под действием возмущений, управление (17) обеспечивает сходимость решения к конечной орбите. При отсутствии возмущений в аргументе перигея и долготе восходящего узла управление (17) будет совпадать с оптимальным (с точностью до ошибок осреднения и интерполяции), а при наличии таких возмущений — отличаться от оптимального тем больше, чем сильнее возмущения. Управление (17) назовем квазиоптимальным управлением с обратной связью.

На рис. 2 показана зависимость от времени радиусов перигея, апогея и большой полуоси на конечном участке траектории в рассмотренной ранее задаче перелета на ГСО для невозмущенной осредненной траектории и двух траекторий, использующих квазиоптимальное управление с обратной связью (17). В одном случае в состав возмущений введены возмущения от геопотенциала (матрица  $10 \times 10$ ) и притяжение Луны и Солнца, а в другом к этим возмущениям добавлено отключение двигателя на теневых участках орбиты.

Из рис. 2 видно, что использование управления с обратной связью обеспечивает сходимость решения к конечной орбите и достаточно близко к оптимальному решению.

Управление (17) оказалось устойчивым не только по отношению к возмущающим ускорениям, но и по отношению к большим отклонениям начальных условий. На рис. 3 показана зависимость радиусов перигея, апогея и большой полуоси для перелета с высокой эллиптической орбиты типа «Молния» на ГСО при использовании оптимального и квазиоптимального управления с обратной связью. Рассматривалась начальная орбита со следующими параметрами: высота перигея 1000 км, высота апогея 40000 км, наклонение 63,4°, аргумент перигея 250°. Несмотря на то что квазиоптимальное управление получено на основе решения задачи перелета с нулевым начальным значением аргумента перигея, оно, благодаря преобразованию (17),

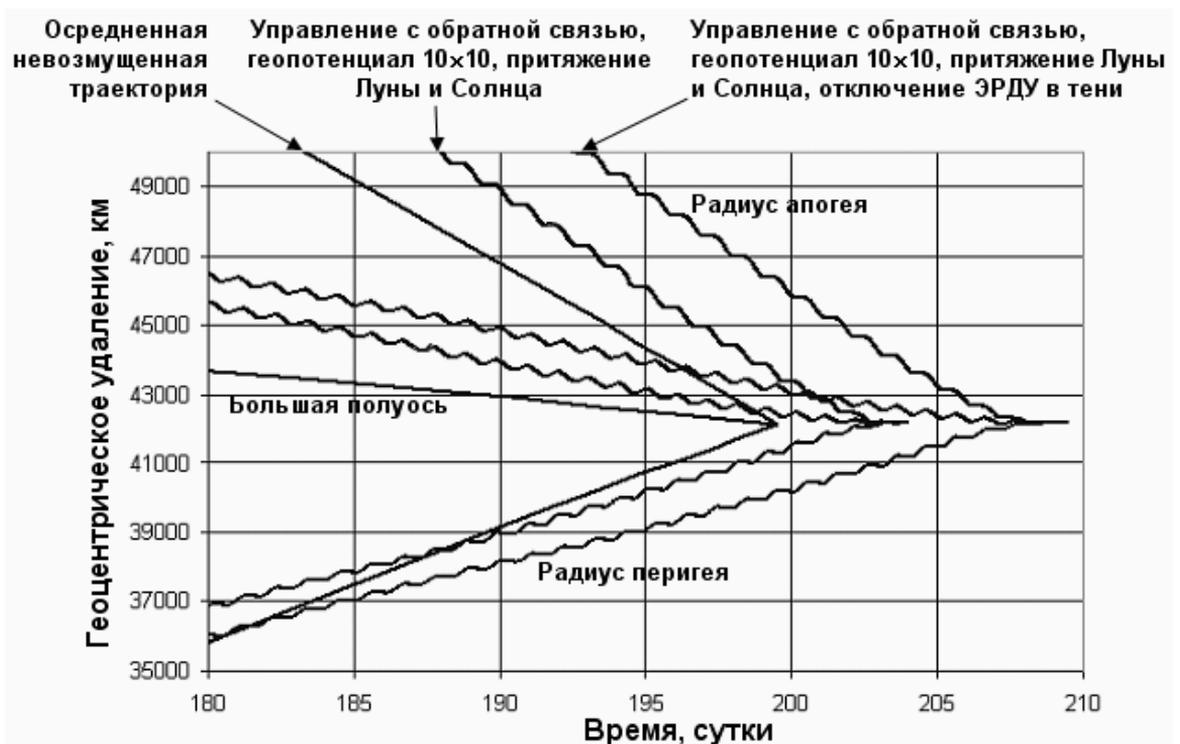


Рис. 2. Влияние возмущений на траектории с квазиоптимальным управлением с обратной связью

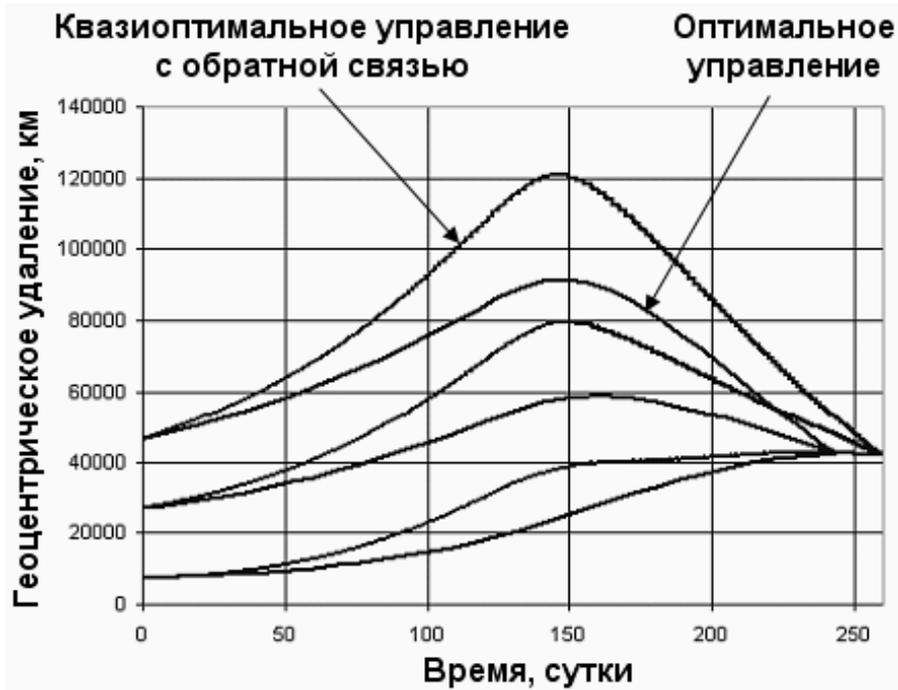


Рис. 3. Перелет с орбиты типа «Молния» на ГСО

обеспечивает сходимость к конечной орбите и при больших отклонениях линии апсид от линии узлов.

Квазиоптимальное управление с обратной связью (17) с успехом использовалось для расчета пространственных перелетов между круговыми орбитами искусственных спутников Земли и Луны в рамках ограниченной задачи четырех тел Солнце—Земля—Луна—КА, с учетом возмущений от сжатия Земли. Для проведения таких расчетов траектория разбивалась на два участка: перелет с околоземной орбиты до точки либрации L1 системы Земля—Луна и перелет от L1 до окололунной орбиты. Легко показать, что оскулирующая орбита L1 является эллиптической как в геоцентрической, так и в селеноцентрической системе координат. Это обстоятельство позволяет использовать рассматриваемую в данной статье методику при условии интегрирования геоцентрического участка в обратном времени с вектором тяги, противоположным вектору, определяемому выражениями (6), (7).

Пример квазиоптимальной траектории перелета с околоземной орбиты радиусом 42164 км и наклоном 51,6° на полярную окололунную орбиту высотой 100 км приведен на рис. 4. Масса КА в момент пролета L1 равна 100 т, тяга — 10 Н, удельный импульс — 6000 с.

**Выводы**

Получено устойчивое управление с обратной связью (17) для перелета между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами, которое мо-

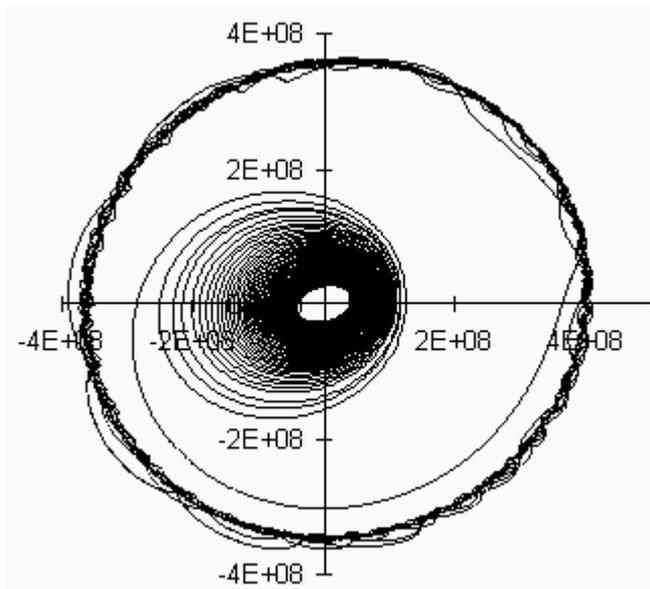


Рис. 4. Проекция траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами на плоскость геоэкватора

жет использоваться для обеспечения автономности КА и при проведении проектно-баллистического анализа. Для использования такого управления в составе бортовых алгоритмов управления движением КА необходимо иметь бортовой орбитальный прогноз, периодически обновляемый либо средствами автономной навигации, либо с помощью определения орбиты с привлечением наземных средств. Бортовая реализация рассматриваемого

алгоритма управления является достаточно простой, не требующей больших вычислительных затрат и объема машинной памяти. Предлагаемый алгоритм оказался устойчивым в широком диапазоне изменения орбитальных параметров КА и при воздействии на КА типовых возмущений. Высокая устойчивость рассматриваемого управления к возмущающим ускорениям позволяет использовать его и при проектном анализе сильновозмущенных задач, таких, как перелет КА с малой тягой на окололунную орбиту.

*Работа проведена*

*при финансовой поддержке грантов РФФИ*

*09-08-01228-а, 09-08-01140-а, 09-01-00710-а  
и 09-01-00299-а.*

#### **Библиографический список**

1. Sackett L.L., Malchow H.L., Edelbaum T.N. Solar Electric Geocentric Transfer with Attitude Constraints: Analysis. NASA CR-134927, 1975.

2. Petukhov V.G. One numerical method to calculate optimal power-limited trajectories. IEPC-95—221, Moscow, 1995.

3. Petukhov V.G. Optimization of Multi-Orbit Transfers between Noncoplanar Elliptic Orbits, Cosmic Research, 2004, vol. 42, no. 3, pp. 260—279.

4. Konstantinov M.S., Petukhov V.G. Spacecraft Insertion into High Working Orbits using Light-Class Launcher and Electric Propulsion. 17th International Symposium on Space Flight Dynamics. Proceedings. Vol. 2, Moscow, 2003

5. Konstantinov M.S., Petukhov V.G. Easy Engineering Technique of Optimal Electric Propulsion Trajectory Estimation. IAC-06-C4.4.06, 2006, 11 pp.