УДК 519.85

Двухуровневая задача стохастического программирования с несколькими последователями и её приложение к оптимизации энергосберегающих проектов

Иванов С.В.,* Наумов А.В.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: sergeyivanov89@mail.ru*

***e-mail: naumovav@mail.ru*

Аннотация

Предлагается постановка двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием при наличии нескольких последователей. Для случая дискретного распределения случайных параметров строится эквивалентная задача смешанного математического программирования. Разработанная методика применяется для определения оптимального инвестирования проектов, направленных на экономию энергоресурсов в транспортных, втом числе в авиационных компаниях. Для данной прикладной задачи эквивалентная задача сводится к смешанной целочисленной задаче линейного программирования. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: стохастическое программирования, двухуровневые задачи, квантильный критерий, экономия энергоресурсов.

Введение

Многие технические и экономические системы имеют иерархическую структуру. Для их моделирования используется аппарат двухуровневых задач [1, 2, 3]. В двухуровневых задачах предполагается наличие двух субъектов, принимающих решения: лидера и последователя. Последователь принимает решение, когда известна стратегия лидера, исходя из собственного критерия оптимальности. Лидер при выборе своей стратегии учитывает оптимальный ответ последователя. Изучение сложных систем, как правило, требует рассмотрения нескольких последователей. Обычно такая ситуация возникает при моделировании деятельности организации, каждое подразделение или субподрядные организации которой принимают решение, исходя из собственных интересов. В этом случае в качестве лидера рассматривается руководство организации, принимающее решение о развитии компании, а в качестве последователей — подразделения или субподрядные организации, реализующие общую стратегию развития предприятия.

При моделировании сложных систем также необходимо учитывать воздействие случайных факторов на систему. Для этого предназначен аппарат двухуровневых задач стохастического программирования. Изучению данных задач с критерием в форме математического ожидания посвящена, например, работа [4]. Однако использование критерия в форме математического ожидания не является оправданным для систем, к надёжности функционирования которых предъявляются высокие требования. Для их моделирования используется, как правило, квантильный критерий [5], представляющих собой уровень потерь, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью.

В данной статье рассматривается двухуровневая задача стохастического программирования с квантильным критерием, являющаяся обобщением задачи, рассмотренной в [6]. В отличие от [6] в предлагаемой формулировке задача лидера является нелинейной, а задача последователя является линейной только по по стратегии последователя. Кроме того предполагается наличие нескольких последователей. С помощью приёма, аналогичного предложенному в [7], в случае дискретного распределения случайных параметров, задача сводится к смешанной целочисленной задаче математического программирования.

Как приложение разработанной методики рассматривается прикладная двухуровневая модель оптимизации эффективности проектов, направленных на экономию энергоресурсов на транспорте. В качестве задачи лидера выступает задача поиска глобальной стратегии развития энергетических систем транспортной компании, а в качестве последователей — организации, занимающиеся реализацией проектов и имеющие собственные интересы. Данная модель может успешно применяться для многих транспортных систем. В частности, задача экономии энергоресурсов актуальна для авиационных компаний, поскольку экономия авиационного топлива позволяет значительно сократить издержки компании. Также данная задача может быть применена для оптимизации энергопотребления на железнодорожном транспорте.

Постановка задачи

Пусть $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ — стратегия лидера, X — случайный вектор с реализациями x, $\mathbf{P}\{\cdot\}$ — вероятностная мера, порождённая распределением случайного вектора X. Носитель меры $\mathbf{P}\{\cdot\}$ обозначим через $\mathcal{X}$. Предполагается наличие M последователей. Задача i-го последователя имеет линейную относительно стратегии последователя структуру и формулируется следующим образом:

$$c_i^{\mathrm{T}}(u,x)y_i \to \min_{y_i \in Y_i(u,x)}, \quad i = \overline{1,M}, \tag{1}$$

где $Y_i(u,x) \triangleq \left\{ y_i \in \mathbb{R}^{k_i} \mid A_i(u,x)y_i \geqslant b_i(u,x), y_i \geqslant 0 \right\}$, y_i — стратегия i-го последователя при фиксированных u и x, $c_i(u,x) \in \mathbb{R}^{k_i}$ — вектор коэффициентов целевой функции задачи последователя, $A_i(u,x) \in \mathbb{R}^{m_i \times k_i}$, $b_i(u,x) \in \mathbb{R}^{m_i}$ — матрица и вектор, задающие ограничения задачи i-го последователя. Через

$$Y_i^*(u,x) \triangleq \operatorname{Arg} \min_{y_i \in Y_i(u,x)} c_i^{\mathrm{T}}(u,x)y_i$$

обозначим множество оптимальных решений задачи (1), которое в общем случае может быть и пустым. Пусть $W_i \triangleq \{(u,x) \in U \times \mathcal{X} \mid Y_i^*(u,x) \neq \varnothing\}$ — множество пар (u,x), при которых множество оптимальных стратегий i-го последователя непусто, $W \triangleq \bigcap_{i=1}^{M} W_i$. Поскольку оптимальная стратегия последователя y_i^* зависит от стратегии лидера u и реализации случайного вектора x, стратегию i-го последователя будем рассматривать как функцию $y_i(\cdot,\cdot)$, определённую на множестве W_i со значениями во множестве $\mathbb{R}^{k_i}$. Через $y(\cdot,\cdot)$ обозначим вектор, составленный из стратегий последователей, т.е. $y(\cdot,\cdot)=\left(y_1^{\mathrm{T}}(\cdot,\cdot),\ldots,y_M^{\mathrm{T}}(\cdot,\cdot)\right)^{\mathrm{T}}$, при этом $y(\cdot,\cdot)$ является функцией, определённой на W со значениями в $\mathbb{R}^k$, где $k=\sum_{i=1}^{M}k_i$. Множество оптимальных стратегий последователей при фиксированных u и x обозначим через $Y^*(u,x)=Y_1^*(u,x)\times\ldots\times Y_M^*(u,x)$. При этом функция $y(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу функций

$$\mathcal{Y}\triangleq\{y(\cdot,\cdot):W\to\mathbb{R}^k \mid \forall(u,x)\in W \quad y(u,x)\in Y^*(u,x)\}. \qquad (2)$$

Потери лидера, связанные с реализацией оптимальных стратегий последователей, для любой пары $(u,x)\in W_i$ и $y^*\in Y^*(u,x)$ обозначим через $\Phi(u,x,y^*)$. Будем считать, что потери $\Phi(u,x,y^*)$ являются значениями функции $\Phi(\cdot)$, определённой на множестве $U\times\mathcal{X}\times Y$ со значениями в $\mathbb{R}^1$, где $Y\triangleq Y_1\times\ldots\times Y_M$, $Y_i\triangleq\bigcup_{u\in U,x\in\mathcal{X}}Y_i(u,x)$. Если $(u,x)\notin W$, будем считать, что $\Phi(u,x,y^*)=+\infty$.

Рассмотрим функцию квантили потерь лидера при выборе стратегии лидера u и стратегиях последователей, задаваемых вектором $y(\cdot,\cdot)$.

$$\varphi_\alpha(u,y(\cdot,\cdot))\triangleq\min\left\{\varphi \mid \mathbf{P}\left\{\Phi(u,X,y(u,X))\leqslant\varphi,\quad Q(u,X,y(u,X))\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha\right\}, \qquad (3)$$

где $Q(\cdot):U\times\mathcal{X}\times Y\to\mathbb{R}^1$ — функция, задающая дополнительные ограничения задачи, $\alpha\in(0,1]$ — фиксированный уровень надёжности. Как было отмечено выше, $\Phi(u,x,y(u,x))=+\infty$, если $(u,x)\notin W$. Если при заданной паре стратегии лидера $u\in U$ и стратегии последователей $y(\cdot,\cdot)\in\mathcal{Y}$ при любом $\varphi\in\mathbb{R}^1$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\Phi(u,X,y(u,X))\leqslant\varphi,\quad Q(u,X,y(u,X))\leqslant 0\right\}<\alpha,$$

то будем считать, что $\varphi_\alpha(u,y(\cdot,\cdot))=+\infty$.

Двухуровневая задача стохастического программирования с квантильным критерием и M последователями в оптимистической постановке формулируется в виде

$$\mathcal{U}\triangleq\operatorname{Arg}\min_{u\in U,\,y(\cdot,\cdot)\in\mathcal{Y}}\varphi_\alpha(u,y(\cdot,\cdot)). \tag{4}$$

Под $\mathcal{U}$ понимается множество пар, составленных из оптимальной стратегии лидера и соответствующей оптимальной стратегии последователя. Множество оптимальных стратегий лидера u данной задачи обозначим через U^*, а соответствующее значение критериальной функции — через φ_α^*. Если $\varphi_\alpha(u,y(\cdot,\cdot))\equiv+\infty$ для всех $u\in U$, $y(\cdot,\cdot)\in\mathcal{Y}$, будем считать, что $U^*=\varnothing$.

В дальнейшем будет рассматривается случай дискретного распределения вектора случайных параметров. Будем считать, что случайный вектор X имеет конечное число реализаций x^ν с вероятностями $p_\nu\triangleq\mathbf{P}\{X=x^\nu\}$, $\nu=\overline{1,N}$.

Анализ задачи

Рассмотрим задачу, в которой в отличие от исходной задачи установлен порядок минимизации и стратегии последователей зависят только от реализации случайных параметров:

$$\tilde{U}^* \triangleq \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \psi_\alpha(u), \tag{5}$$

где

$$\psi_\alpha(u) \triangleq \min_{\tilde{y}(\cdot) \in \tilde{\mathcal{Y}}(u)} \tilde{\varphi}_\alpha(u, \tilde{y}(\cdot)) \tag{6}$$

$$\tilde{\mathcal{Y}}(u) \triangleq \{\tilde{y}(\cdot) = \left(\tilde{y}_1^{\mathrm{T}}(\cdot), \ldots, \tilde{y}_M^{\mathrm{T}}(\cdot)\right)^{\mathrm{T}} : \mathcal{X}(u) \to \mathbb{R}^k \mid \forall (u, x) \in W \quad \tilde{y}(x) \in Y^*(u, x)\}, \tag{7}$$

$$\tilde{\varphi}_\alpha(u, \tilde{y}(\cdot)) \triangleq \min\left\{\varphi \mid \mathbf{P}\left\{\Phi(u, X, \tilde{y}(X)) \leqslant \varphi, \quad Q(u, X, \tilde{y}(X)) \leqslant 0\right\} \geqslant \alpha\right\}, \tag{8}$$

$\mathcal{X}(u)$ — множество тех реализаций x случайного вектора X, для которых $(u, x) \in W$.

Ввиду того, что порядок минимизации в задаче (4) не имеет значения, множество U^* оптимальных значений переменной u в задаче (4) совпадает со множеством $\tilde{U}^*$, определённом в (5).

Получим эквивалентную задаче (5), а значит и (4), смешанную целочисленную задачу математического программирования.

Поскольку задача последователя при фиксированных (u, x) является задачей линейного программирования, стратегия последователя $\tilde{y}_i(x)$, определённая в (7), при реализации x случайного вектора X является оптимальной в том и только том случае, когда существует вектор $\lambda_i(x) \in \mathbb{R}^{m_i}$, удовлетворяющий системе уравнений и неравенств [2]

$$A_i^{\mathrm{T}}(u, x)\lambda_i(x) \leqslant c_i(u, x), \tag{9}$$

$$(A_i(u, x)\tilde{y}_i(x) - b_i(u, x))^{\mathrm{T}} \lambda_i(x) = 0, \tag{10}$$

$$(A_i^{\mathrm{T}}(u,x)\lambda_i(x) - c_i(u,x))^{\mathrm{T}}\tilde{y}_i(x) = 0, \tag{11}$$

$$\lambda_i \geqslant 0. \tag{12}$$

Обозначим множество пар $(\tilde{y}_i(x), \lambda_i(x))$ таких, что $\tilde{y}_i(x) \in Y_i(u,x)$, а $\lambda_i(x)$ удовлетворяет системе ограничений (9)–(12), через $\Lambda_i(u,x)$. Введём также обозначения $\Lambda(u,x) \triangleq \Lambda_1(u,x) \times \ldots \times \Lambda_M(u,x)$, $\quad \Lambda \triangleq \bigcup_{u \in U, x \in \mathcal{X}} \Lambda(u,x)$, $\quad \lambda(\cdot) \triangleq \left(\lambda_1^{\mathrm{T}}(\cdot), \ldots, \lambda_M^{\mathrm{T}}(\cdot)\right)^{\mathrm{T}} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^m$, $m = \sum_{m=1}^{M} m_i$. Введём множество пар функций

$$\tilde{\Lambda}(u) \triangleq \left\{(\tilde{y}(\cdot), \lambda(\cdot)) \mid \forall (u,x) \in W \quad (\tilde{y}(x), \lambda(x)) \in \Lambda(u,x)\right\}. \tag{13}$$

Предположим, что для каждого $u \in U$ известна константа $\gamma_1(u) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathcal{X}$, $y \in Y$ удовлетворяющая условию

$$\gamma_1(u) \geqslant \Phi(u,x,y) - \bar{\psi}_\alpha(u), \tag{14}$$

где $\bar{\psi}_\alpha(u) \triangleq \inf_{\tilde{y}(\cdot) \in \tilde{\mathcal{Y}}(u)} \tilde{\varphi}_\alpha(u, \tilde{y}(\cdot))$. Также предположим, что для каждой пары $u \in U$ и $y \in Y$ известна константа $\gamma_2(u,y) \geqslant 0$, при всех $x \in \mathcal{X}$ удовлетворяющая соотношению

$$\gamma_2(u,y) \geqslant Q(u,x,y). \tag{15}$$

Получение этих констант в частном случае рассматриваемой задачи продемонстрировано в следующем разделе.

Пусть также известна функция $\chi(\cdot)$, определённая на множестве $U \times \mathcal{X} \times \Lambda$, для которой

$$\chi(u,x,y,\lambda) \leqslant 0, \quad \textit{если}\ (y,\lambda) \in \Lambda(u,x), \tag{16}$$

$$\chi(u,x,y,\lambda) > 0, \quad \text{если } (y,\lambda) \notin \Lambda(u,x). \tag{17}$$

Например, данная функция может иметь следующий вид:

$$\chi(u,x,y,\lambda) = \max_{i=\overline{1,M}}\{b_i(u,x) - A_i(u,x)y_i, A_i^{\mathrm{T}}(u,x)\lambda_i - c_i(u,x),$$

$$(A_i(u,x)y_i - b_i(u,x))^{\mathrm{T}}\lambda_i, (A_i^{\mathrm{T}}(u,x)\lambda_i - c_i(u,x))^{\mathrm{T}} y_i\}, \tag{18}$$

где $y = (y_1^{\mathrm{T}},\ldots,y_M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k$, $y_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, $\lambda = (\lambda_1^{\mathrm{T}},\ldots,\lambda_M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $i = \overline{1,M}$.

Введём переменные $y^1,\ldots,y^N \in \mathbb{R}^k$, $\lambda^1,\ldots,\lambda^N \in \mathbb{R}^m$, соответствующие значениям функций $\tilde{y}(\cdot)$ и $\lambda(\cdot)$ при аргументах $x^1,\ldots,x^N$. Также введём вектор бинарных переменных $\delta \triangleq (\delta_1,\ldots,\delta_N) \in \{0,1\}^N$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\varphi \to \inf_{\varphi\in\mathbb{R}^1, u\in U, y^1,\ldots,y^N, \lambda^1,\ldots,\lambda^N, \delta\in\{0,1\}^N} \tag{19}$$

при ограничениях

$$\Phi(u,x^\nu,y^\nu) - \gamma_1(u)(1-\delta_\nu) \leqslant \varphi, \quad \nu = \overline{1,N}, \tag{20}$$

$$Q(u,x^\nu,y^\nu) - \gamma_2(u,y^\nu)(1-\delta_\nu) \leqslant 0, \quad \nu = \overline{1,N}, \tag{21}$$

$$\delta_\nu \chi(u,x^\nu,y^\nu,\lambda^\nu) \leqslant 0, \quad \nu = \overline{1,N}; \tag{22}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} p_\nu \delta_\nu \geqslant \alpha; \tag{23}$$

$$y^i \geqslant 0, \lambda^i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,N}. \tag{24}$$

Эквивалентность задачи (4) и задачи (19) в смысле определения эквивалентности, данного в [7], устанавливает следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) случайный вектор X имеет конечное число реализаций x^{ν} с вероятностями p_{ν}, $\nu = \overline{1, N}$;

2) для каждого $u \in U$ известна константа $\gamma_1(u) \geqslant 0$, при всех $x \in \mathcal{X}$, $y \in Y$ удовлетворяющая условию (14);

3) для каждой пары $u \in U$, $y \in Y$ известна константа $\gamma_2(u, y) \geqslant 0$, при всех $x \in \mathcal{X}$ удовлетворяющая условию (15);

4) известна функция $\chi(\cdot)$, удовлетворяющая соотношениям (16) и (17).

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) все оптимальные значения переменной u задачи (4) являются оптимальными значениями переменной u задачи (19);

2) все оптимальные значения переменной u задачи (19) являются оптимальными решениями задачи (4);

3) оптимальные значения критериальных функций задач (4) и (19) совпадают, при этом они достигаются или не достигаются одновременно в двух задачах;

4) если оптимальные значения критериальных функций задач (4) и (19) не достигаются, то минимизирующие последовательности переменной u в обеих задачах совпадают.

Доказательство. С учётом введённых выше обозначений задача поиска множества U^* оптимальных значений переменной u задачи (4) может быть записана следующим образом:

$$U^* = Arg \min_{u\in U} \min_{(\tilde{y}(\cdot),\lambda(\cdot))\in\tilde{\Lambda}(u)} \tilde{\varphi}_\alpha(u,\tilde{y}(\cdot)). \tag{25}$$

Пусть $(u,\ \tilde{y}(\cdot),\ \lambda(\cdot))$ — допустимое решение задачи (25), которому соответствует значение критериальной функции ψ. Построим по данному решению задачи (25) решение, являющееся допустимым в задаче (19) и обеспечивающее не большее ψ значение её критериальной функции. Пусть

$$\hat{\varphi} \triangleq \psi, \quad \hat{u} \triangleq u, \tag{26}$$

$$\hat{\delta}_\nu \triangleq \begin{cases} 1, & \text{\textit{если}}\ \Phi(u,x^\nu,\tilde{y}(x^\nu))\leqslant\psi\ \text{\textit{и}}\ Q(u,x^\nu,\tilde{y}(x^\nu))\leqslant 0, \\ 0, & \text{\textit{иначе.}} \end{cases} \tag{27}$$

$$\hat{\delta} \triangleq (\hat{\delta}_1,\ldots,\hat{\delta}_N)^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$

$$\hat{y}^\nu \triangleq \tilde{y}(x^\nu), \hat{\lambda}^\nu \triangleq \lambda(x^\nu)\ \text{\textit{для}}\ x^\nu \in \mathcal{X}(u), \tag{29}$$

для $x^\nu \notin \mathcal{X}(u)$ определим $\hat{y}^\nu$ таким образом, чтобы $\hat{y}^\nu \in Y$ и при $u = \hat{u}$, $x = x^\nu$, $y = \hat{y}^\nu$ были выполнены неравенства (14), (15). Нетрудно видеть, что решение $\left(\hat{\varphi},\hat{u},\hat{y}^1,\ldots,\hat{y}^N,\hat{\lambda}^1,\ldots,\hat{\lambda}^N,\hat{\delta}\right)$ удовлетворяет всем ограничениям задачи (19). Кроме того $\hat{\varphi}$ является оценкой сверху критериальной функции задачи (19).

Пусть теперь $\left(\varphi,u,y^1,\ldots,y^N,\lambda^1,\ldots,\lambda^N,\delta\right)$ — некоторое допустимое решение задачи (19). Построим функции $\tilde{y}(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ по правилу: $\tilde{y}(x^\nu) = y^\nu$, $\lambda(x^\nu) = \lambda^\nu$ для $x^\nu \in \mathcal{X}(u)$. Так как выполнено ограничение (23) на сохранение вероятностной меры,

$$\mathbf{P}\left\{\Phi(u,X,\tilde{y}(X))\leqslant\varphi, \quad Q(u,X,\tilde{y}(X))\leqslant 0\right\}\geqslant\alpha. \tag{30}$$

Из полученного соотношения следует, что $\varphi_\alpha(u,\tilde{y}(\cdot))\leqslant\varphi$, то есть φ обеспечивает оценку сверху критериальной функции задачи (25).

Согласно лемме, доказанной в [7], задачи и эквивалентны в смысле определения [7], что и составляет заключение теоремы. ■

Замечание. Если для всех $(u,x)\in U\times\mathcal{X}$ выполнено $Y^*(u,x)\neq\varnothing$ (а также когда множество $Y^*(u,x)$ не зависит от x), ограничение (22) можно заменить на более простое ограничение

$$(y^\nu,\lambda^\nu)\in\Lambda(u,x^\nu),\quad \nu=\overline{1,N}. \tag{31}$$

Полученная задача (19) в общем случае является задачей смешанного целочисленного нелинейного программирования. Общие методы решения подобных задач рассмотрены, например, в [8]. В следующем разделе будет представлен прикладной пример, для которого эквивалентная задача (19) может быть сведена к смешанной целочисленной задаче линейного программирования.

Оптимизация проектов по экономии энергоресурсов

Приведём описание прикладной задачи, являющейся частным случаем сформулированной задачи (4). Данная задача обобщает рассмотренную в [9] двухэтапную задачу инвестирования проектов, направленных на экономию энергоресурсов на железнодорожном транспорте.

Пусть имеется n проектов, направленных на экономию энергоресурсов в течение L плановых периодов. Потребность в j-м энергоресурсе в l-й плановый период предполагается случайной величиной X_{lj} с реализациями x_{lj}, $l=\overline{1,L}$, $j=\overline{1,J}$.

Случайный вектор, составленный из случайных величин X_{lj}, обозначим через $X \triangleq (X_{11},\dots,X_{1J},X_{21},\dots,X_{LJ})^{\mathrm{T}}$. Поскольку указать точное распределение случайного вектора X представляется затруднительным, будем использовать сценарный подход, заключающийся в замене непрерывного распределения дискретным. Будем считать, что случайный вектор X имеет дискретное распределение с конечным числом реализаций x^{ν}, $\nu = \overline{1,N}$, вероятности которых оцениваются экспертами. Реализации координат данного вектора обозначим через x_{lj}^{ν}. В качестве стратегии лидера рассмотрим вектор $u = (u_1,\dots,u_n) \in \mathbb{R}^n$, в котором u_i — объём инвестирования i-го проекта, $i = \overline{1,n}$. Реализацию i-го проекта осуществляет i-й последователь. Таким образом, количество последователей M совпадает с размерностью n вектора стратегии лидера. Поэтому в дальнейшем будем считать $i = \overline{1,M}$. В качестве стратегии i-го последователя выступает вектор $y_i \triangleq (y_i^1,\dots,y_i^{k_i})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{k_i}$, в котором y_i^q — объём q-го закупаемого ресурса, необходимого для реализации проекта, $q = \overline{1,k_i}$. Введём дополнительные переменные векторы $z_i^l(y_i) \triangleq (z_i^{l1}(y_i),\dots,z_i^{lJ}(y_i))^{\mathrm{T}}$, где $z_i^{lj}(y_i)$ — экономия j-го энергоресурса в l-й плановый период,

$$z_i^l(y_i) = B_i^l y_i, \quad l = \overline{1,L}, \tag{32}$$

где B_i^l — технологическая матрица i-го проекта в l-й плановый период, связывающая объёмы закупаемых ресурсов с объёмами экономии энергоресурсов. Задача i-го последователя имеет следующий вид:

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} c_i^{lj} z_i^{lj}(y_i) \to \max_{y_i \in \mathbb{R}^{k_i}} \tag{33}$$

при ограничениях

$$\sum_{q=1}^{k_i} g_i^q y_i^q \leqslant u_i, \tag{34}$$

$$0 \leqslant y_i^q \leqslant \overline{y}_i^q, \quad q = \overline{1, k_i}, \tag{35}$$

где c_i^{lj} — премия i-го последователя за экономию единицы j-го энергоресурса в l-й плановый период, g_i^q — стоимость q-го ресурса при реализации i-го проекта, $\overline{y}_i^q$ — максимально доступный объём q-го ресурса при реализации i-го проекта, $\overline{y}_i \triangleq (\overline{y}_i^1, \ldots, \overline{y}_i^{k_i})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{k_i}$ Очевидно, что после подстановки (32) в критериальную функцию (33) задача последователя (33) становится частным случаем задачи (1).

Задача лидера состоит в оптимальном распределении инвестиций в различные проекты и имеет вид (4). Функции, входящие в описание функции квантили (3), имеют следующий вид:

$$\Phi(u, x, y) = \sum_{i=1}^{M} u_i + \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} \max\{0, (x_{lj} - z^{lj}(y)) s_{lj}\}, \tag{36}$$

$$Q(u, x, y) = \max_{l=\overline{1,L},\, j=\overline{1,J}} \left\{ z^{lj}(y) - x_{lj} \right\}, \tag{37}$$

где

$$z^{lj}(y) = \sum_{i=1}^{M} z_i^{lj}(y_i), \tag{38}$$

s_{lj} — стоимость j-го энергоресурса в l-й плановый период.

Таким образом, значение критериальной функции задачи (4) представляет собой суммарный уровень затрат на финансирование проектов и затрат на закупку энергоресурсов, непревышение которых гарантируется с вероятностью α.

Множество U допустимых стратегий лидера описывается системой ограничений

$$\sum_{i=1}^{M} u_i \leqslant \bar{u}, \tag{39}$$

$$u_i \geqslant 0, i = \overline{1, M}, \tag{40}$$

где $\bar{u}$ — максимально допустимый объём инвестирования.

Согласно теореме и замечанию к ней данная задача эквивалентна следующей:

$$\varphi \to \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^1, u \in U, y^1, \dots, y^N, \lambda^1, \dots, \lambda^N, \delta \in \{0,1\}^N} \tag{41}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{M} u_i + \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \max\{0, (x_{lj}^{\nu} - z^{lj}(y^{\nu})) s_{lj}\} - \gamma_1(u)(1 - \delta_\nu) \leqslant \varphi, \quad \nu = \overline{1, N}, \tag{42}$$

$$z^{lj}(y^{\nu}) - x_{lj}^{\nu} - \gamma_2(u, y^{\nu})(1 - \delta_\nu) \leqslant 0, \quad \nu = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}, j = \overline{1, J}; \tag{43}$$

$$(y^{\nu}, \lambda^{\nu}) \in \Lambda(u, x^{\nu}), \quad \nu = \overline{1, N}; \tag{44}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} p_\nu \delta_\nu \geqslant \alpha; \tag{45}$$

$$y^i \geqslant 0, \lambda^i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, M}, \tag{46}$$

где $\gamma_1(u) = \max\limits_{\nu=\overline{1,N}} \left\{ \bar{u} + \sum\limits_{l=1}^{L}\sum\limits_{j=1}^{J}(x_{lj}^{\nu} + \sum\limits_{i=1}^{M} z_i^{lj}(\bar{y}_i))s_{lj} \right\}$, $\gamma_2(u, y) = \max\limits_{\nu=\overline{1,N}, l=\overline{1,L}, j=\overline{1,J}} \left\{ x_{lj}^{\nu} + \sum\limits_{i=1}^{M} z_i^{lj}(\bar{y}_i) \right\}$.

Ограничение (42) может быть преобразовано в линейное с помощью введения дополнительных вещественных переменных φ_{lj}^{ν}, $l = \overline{1, L}$, $j = \overline{1, J}$, $\nu = \overline{1, N}$, после чего задачу (41) можно записать в виде

$$\varphi \to \inf_{\varphi, \varphi_{11}^1, \ldots, \varphi_{LJ}^N \in \mathbb{R}^1, u \in U, y^1, \ldots, y^N, \lambda^1, \ldots, \lambda^N, \delta \in \{0,1\}^N} \tag{47}$$

при ограничениях (43)–(46), а также

$$\sum_{i=1}^{M} u_i + \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} \varphi_{lj}^{\nu} - \gamma_1(u)(1 - \delta_\nu) \leqslant \varphi, \quad \nu = \overline{1, N}, \tag{48}$$

$$(x_{lj}^{\nu} - z^{lj}(y^{\nu}))s_{lj} \leqslant \varphi_{lj}^{\nu}, \quad l = \overline{1, L}, j = \overline{1, J}, \nu = \overline{1, N}, \tag{49}$$

$$\varphi_{lj}^{\nu} \geqslant 0, \quad l = \overline{1, L}, j = \overline{1, J}, \nu = \overline{1, N}. \tag{50}$$

Равновесные ограничения (44) также могут быть преобразованы в линейные [2]. Для этого вводятся дополнительные оптимизационные векторы целочисленных переменных $\eta_i \in \mathbb{R}^{1+k_i}$, $\zeta_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, которые должны удовлетворять системе ограничений

$$\lambda_i \leqslant L(e_{1+k_i} - \eta_i), \tag{51}$$

$$\begin{pmatrix} g_i^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix} y_i - \begin{pmatrix} u_i \\ \bar{y}_i \end{pmatrix} \geqslant -L\eta_i, \tag{52}$$

$$y_i \leqslant L(e_{k_i} - \zeta_i), \tag{53}$$

$$\begin{pmatrix} g_i & I \end{pmatrix} \lambda_i - c_i \leqslant L\zeta_i, \tag{54}$$

где e_k — вектор размерности k, составленный из единиц, c_i — вектор коэффициентов целевой функции задачи i-го последователя (33), I — единичная матрица соответствующей размерности, L — достаточно большая константа. Таким образом, рассматриваемая прикладная задача может быть сведена к смешанной целочисленной задаче линейного программирования.

Результаты численных экспериментов

Приведём результат решения задачи для некоторого типичного участка железнодорожной сети. В качестве проектов по экономии энергоресурсов рассмотрим строительство аккумулирующих подстанций, установку систем рекуперации электроэнергии на электровозы и замену устаревших тепловозов на современные модели. Первые два проекта направлены на экономию электроэнергии, а третье — на экономию дизельного топлива. Технологии реализаций проектов в данном модельном примере упрощены, технические характеристики проектов подробно не описываются. Технологические матрицы проектов не зависят от периода и имеют следующий вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2{,}4 & 0{,}3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}032 \end{pmatrix}.$$

Ограничения на объёмы доступных ресурсов при реализации проектов задаются следующими векторами:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}_3 = \begin{pmatrix} 45 \\ 67{,}5 \end{pmatrix}.$$

Стоимости ресурсов при реализации проектов:

$$g_1^1 = 3,2, g_1^2 = 3,2, g_2^1 = 4,24, g_2^2 = 4,8, g_3^1 = 3,44, g_3^2 = 4,72.$$

Премии последователей не зависят от планового периода и имеют следующий вид:

$$c_1^1 = c_2^1 = c_3^1 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Стоимости единиц энергоресурсов также не зависят от планового периода и имеют следующий вид:

$$s_1 = 1,5\ \text{руб./кВт} \cdot \text{ч}, \quad s_2 = 30\ \text{тыс.руб./т.}$$

На выполнение данных проектов может быть выделено финансирование, не превышающее $\bar{u} = 450$ млн рублей.

Данная задача была решена для различного количества плановых периодов. Предполагается, что потребности в энергоресурсах независимы. В случае одного планого периода рассматриваются три сценария спроса на электроэнергию: 680, 700 и 720 млн кВт$\cdot$ч с вероятностями $0,25$, $0,5$, $0,25$ — и три сценария спроса на дизельное топливо: 80, 85, 90 тыс. т с такими же вероятностями. Для случая двух плановых периодов сценарии строятся аналогично. При этом общее количество сценариев равно 81. Для трёх плановых периодов спрос в первый плановый период предполагается известным: 700 млн кВт$\cdot$ч электроэнергии и 85 тыс. т дизельного топлива. Для второго и третьего планового периода сценарии строятся аналогично предыдущим случаям. Общее количество сценариев в этом случае также равно 81.

Уровень надёжности α установлен на уровне $0,9$.

Зависимость решения данной задачи от количества плановых периодов приведена в таблице. В качестве планового периода рассматривается один год.

Таблица

L	u_1, млн руб.	u_2, млн руб.	u_3, млн руб.	Затраты, млн руб.	Затраты без реализации проектов, млн руб.
1	0	0	0	3 750,0	3 750,0
2	0	190,8	0	7 246,8	7 380,0
3	104,4	190,8	154,8	10 617,0	10 980,0

Из таблицы видно, что реализацию проектов целесообразно осуществлять при количестве плановых периодов не менее двух. При двух плановых периодах инвестиции осуществляются только в замену тепловозов. При большем количестве плановых периодов также целесообразно строить аккумулирующие подстанции и устанавливать системы рекуперации.

Сравнение затрат при реализации всех проектов и при нереализации проектов приведено на на рисунке. Сплошная линия соотвествует затратам при реализации всех трёх проектов. Пунктирная линия соответсвует затратам при нереализации проектов. Точка пересения двух кривых соответствует сроку окупаемости проектов, который примерно равен двум годом.

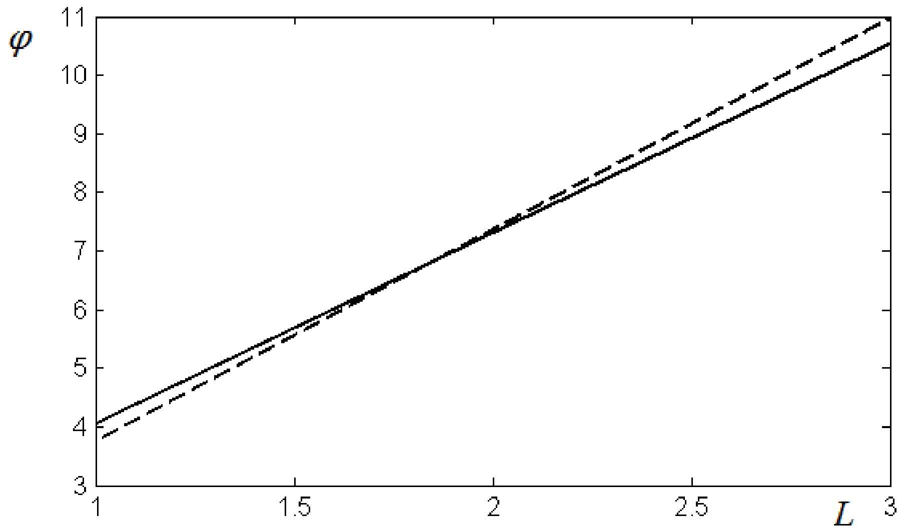

Рис. 1. Сравнение затрат.

Заключение

В статье рассмотрена задача двухуровневого программирования с квантильным критерием при наличии нескольких последователей. Доказано, что при линейной по стратегии последователя структуре задачи последователя рассматриваемая задача может быть сведена к смешанной целочисленной задаче математического программирования. Рассмотрена прикладная задача планирования инвестиций в проекты, направленные на экономию энергоресурсов на транспорте. Показано, что в данном частном случае эквивалентная задача может быть сведена к смешанной целочисленной задаче линейного программирования. Результаты численных экспериментов показали, что при увеличении количества плановых периодов количество финансируемых проектов увеличивается. Предложенная методика может быть применена для многих транспортных систем, в том числе в авиации и на железнодорожном транспорте.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 13-07-13100-офи_м_РЖД и 14-07-00006 А.

Библиогафический список

1. Bard J. Practical Bilevel Optimization: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.

2. Dempe S. Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

3. Dempe S. Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints // Optimization. 2003. V. 52. No. 3. P. 333–359.

4. Christiansen S., Patriksson M., Wynter L. Stochastic Bilevel Programming in Structural Optimization // Structural Multidisciplinary Optim. 2001. V. 21. No. 5. P. 361–371.

5. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. - М.: Физматлит, 2009. – 372 с.

6. Иванов С.В. Двухуровневые задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. 2014. № 1. С. 130–144.

7. Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И. О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 66–86.

8. Duan Li, Xiaoling Sun. Nonlinear Integer Programming. New York: Springer. International Series in Operations Research & Management Science. 2006. V. 84.

9. Наумов А.В., Иванов С.В. Программно-алгоритмический комплекс для оценки эффективности проектов по экономии электроэнергии на железнодорожном транспорте // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2013. № 12. С. 3–9.