УДК 004.052

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ИНДЕКСОВ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТИ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ РАЗНОТИПНЫХ ЗАДАЧ

Олег Михайлович БРЕХОВ родился в 1942 г. в городе Омске. Заведующий кафедрой МАИ. Доктор технических наук, профессор. Основные научные интересы — в области архитектуры, моделирования ВС, отказоустойчивых систем, качества систем и программ. Автор более 160 научных работ. E-mail:obrekhov.mail.ru

Oleg M. BREKHOV, D.Sci., was born in 1942, in Omsk. He is the Head of a Department at the MAI. His research interests are in architecture and simulation of computer systems, fault-tolerant systems, quality of systems and software. He has published 160 technical papers. E-mail:obrekhov.mail.ru

Наинг Лин АУНГ родился в 1980 г. в городе Патиу в Союзе Мьянма. Аспирант МАИ. Основные научные интересы — в области архитектуры и моделирования компьютерных сетей. Автор трех научных работ. E-mail: azin.kaf304@gmail.com

Naing Ling Aung was born in 1980 in the Union of Myanmar. He is a Postgraduate Student at the MAI. His research interests are in architecture and simulation of computer networks. He has published 3 technical papers. E-mail:azin.kaf304@gmail.com

Предложена аналитическая модель оценки индексов производительности вычислительной сети с ограниченным числом вычислительных модулей, предназначенной для выполнения разнотипных задач при динамическом изменении их числа. Рассматривается переходный и стационарный режим функционирования вычислительной сети.

An analytical model is suggested to estimate performance indexes for a computer network with a limited number of computing modules intended for execution of heterogeneous tasks with dynamic change of their quantity. Some transient and steady modes of operation are considered for the computer network.

Ключевые слова: вычислительная сеть, производительность, разнотипные задачи, аналитическая модель.

Key words: computer network, performance, heterogeneous tasks, analytical model.

1. Введение

Производительность вычислительной сети может определяться по отношению к различным уровням функционирования, в частности при выполнении команд, программ, задач и заданий. В данной работе авторы, имея в виду вычислительную сеть (ВС), производительность соотносят с уровнем выполнения задач. Выполнение задачи возможно при наступлении двух обстоятельств: 1) готовности задачи к выполнению при возникновении для нее определенного события, например, связанного с получением входных данных; 2) наличии свободного ресурса, например вычислительного модуля (ВМ). Готовность задачи к выполнению должна быть учтена при разрабртке модели функционирования ВС как системы с динамическим изменением числа задач [Л]. В этом случае каждая выполненная процессором задача приводит в состояние готовности некоторое число задач из максимально подлежащих выполнению. В статье предлагается аналитическая модель оценки индексов производительности вычислительной сети с ограниченным числом вычислительных модулей, предназначенной для выполнения разнотипных задач при динамическом изменении их числа, что обобщает результаты работы [Л], где предполагалась однотипность задач.

Наличие свободного ресурса, несомненно, зависит от распределения задач по ВМ, где они должны выполняться.

2. Постановка задачи

Пусть ВС содержит n двухтипных виртуальных ВМ, $n \geq 1$. Функционирование ВС состоит в выполнении двухтипных задач, при этом одна задача для своего выполнения требует ровно одного ВМ. Без ограничения общности положим, что максимальное число задач первого (второго) типа, требующих выполнения, равно $n + h_1$ ($n + h_2$) соответственно. Выполненная задача i-го ($i = 1, 2$) типа по завершении инициирует задачи с векторами вероятности $\overline{\tau_1}$ и $\overline{\tau_2}$ соответственно

$$\overline{\tau_1} = \{\tau_{10} + \tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{111} + \tau_{112} + \tau_{122}\} = 1;$$

$$\overline{\tau_2} = \{\tau_{20} + \tau_{21} + \tau_{22} + \tau_{211} + \tau_{212} + \tau_{222}\} = 1,$$

где

τ_{10} — вероятность того, что после выполнения задач первого типа будет выполняться 0 задач;

τ_{11} — вероятность того, что после выполнения задач первого типа будет выполняться одна задача первого типа;

τ_{12} — вероятность того, что после выполнения задач первого типа будет выполняться одна задача второго типа;

τ_{111} — вероятность того, что после выполнения задач первого типа будут выполняться две задачи первого типа;

τ_{112} — вероятность того, что после выполнения задач первого типа будут выполняться две задачи первого типа и второго типа;

τ_{122} — вероятность того, что после выполнения задач первого типа будут выполняться две задачи второго типа;

τ_{20} — вероятность того, что после выполнения задач второго типа будет выполняться 0 задач;

τ_{21} — вероятность того, что после выполнения задач второго типа будет выполняться одна задача первого типа;

τ_{22} — вероятность того, что после выполнения задач второго типа будет выполняться одна задача второго типа;

τ_{211} — вероятность того, что после выполнения задач второго типа будут выполняться две задачи первого типа;

τ_{212} — вероятность того, что после выполнения задач второго типа будут выполняться две задачи первого типа и второго типа;

τ_{222} — вероятность того, что после выполнения задач второго типа будут выполняться две задачи второго типа, каждая из которых начинает выполняться при наличии свободного ВМ.

Пусть время τ_B выполнения задач ВМ является случайной величиной с экспоненциальной функцией распределения с параметрами

$$\mu_1,\ p(\tau_B < t) = 1 - e^{-\mu_1 t} \text{ и } \mu_2,\ p(\tau_B < t) = 1 - e^{-\mu_2 t}.$$

Для оценки производительностии ВС используются различные индексы производительности. Мы получим решение для подсистемы ВС, на основании которого определяются различные индексы производительности ВС, в частности среднее число задач и среднее время выполнения задач.

Имея в виду трудность математического исследования нестационарного режима функционирования системы, с одной стороны, и интерес к характеристикам системы в условиях, когда система функционирует достаточно долго, с другой стороны, будем считать, что завершение выполняемой задачи при отсуствии в этот момент в системе других выполняемых задач обязательно приводит к инициированию одной и более задач.

Другое условие, которое мы также примем: число существующих задач в системе не можеть быть более максимального числа задач первого типа $n + h_1$ и максимального числа задач второго типа $n + h_2$.

3. Система дифференциальных уравнений для изучения переходного процесса поведения вычислительной сети

Обозначим $p_{i,j}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t система имеет i инициированных задач первого типа и j инициированных задач второго типа, $p(i) + k$, $(n - i) + l\,(t)$ — вероятность того, что в момент времени t выполняется n задач (i первого типа и $(n - i)$ второго типа), при этом ожидают k задач 1-го типа и l задач 2-го типа.

Не уменьшая общности, далее положим:

$$\mu_1 = k\mu_2,\ k = 1,\ \mu_1 = k,\ \mu_2 = 1.$$

Система дифференциальных уравнений для определения вероятностей $p_{i,j}(t)$ имеет вид

1. $$P'_{ij}(t) = (-ik - j + ik\tau_{11} + j\tau_{22})P_{ij}(t) +$$

$$+(i+1)k\tau_{10}P_{i+1,j}(t) + (j+1)\tau_{20}P_{i,j+1}(t) +$$

$$+(i-1)k\tau_{111}P_{i-1,j}(t) + (j-1)\tau_{222}P_{i,j-1}(t) +$$

$$+(i+1)k\tau_{12}P_{i+1,j-1}(t) + (j+1)\tau_{21}P_{i-1,j+1}(t) +$$

$$+(i+1)k\tau_{122}P_{i+1,j-2}(t) + (j+1)\tau_{211}P_{i-2,j+1}(t) +$$

$$+(i)k\tau_{112}P_{i,j-1}(t) + (j)\tau_{212}P_{i-1,j}(t) +$$

$$+(j+1)\tau_{211}P_{i-2,j+1}(t),\ 2 \le i + j \le n - 1.$$

2. $$P'_{10}(t)=(-k+k(\tau_{11}+\tau_{10}))P_{10}(t)+\tau_{20}P_{11}(t)+$$
$$+2k\tau_{10}P_{20}(t)+\tau_{21}P_{01}(t).$$

3. $$P'_{01}(t)=(-1+(\tau_{22}+\tau_{20}))P_{01}(t)+k\tau_{10}P_{11}(t)+$$
$$+2\tau_{20}P_{02}(t)+k\tau_{12}P_{10}(t).$$

4. $$P'_{(i),(n-i)}(t)=(-ik-(n-i)+ik\tau_{11}+$$
$$+(n-i)\tau_{22})P_{(i),(n-i)}(t)+(i)k\tau_{10}P_{(i)+1,(n-i)}(t)+$$
$$+(i+1)k\tau_{10}P_{(i+1),(n-i-1)+1}(t)+(n-i)\tau_{20}P_{i,(n-i)+1}(t)+$$
$$+(n-i+1)\tau_{20}P_{(i-1)+1,(n-i+1)}(t)+(i-1)k\tau_{111}P_{i-1,n-i}(t)+$$
$$+(n-i-1)\tau_{222}P_{i,n-i-1}(t)+(i+1)k\tau_{12}P_{i+1,n-i-1}(t)+$$
$$+(n-i+1)\tau_{21}P_{i-1,n-i+1}(t)+(i+1)k\tau_{122}P_{i+1,n-i-2}(t)+$$
$$+(n-i+1)\tau_{211}P_{i-2,n-i+1}(t)+(i)k\tau_{112}P_{i,n-i-1}(t)+$$
$$+(n-i)\tau_{212}P_{i-1,n-i}(t),\quad 0\le i\le n,\quad P_{(-1)+1,n+1}=P_{-1,n+1}=$$
$$=P_{-2,n+1}=P_{-1,n}=P_{n+1,(-1)+1}=P_{n-1,-1}=P_{n,-1}=P_{n+1,-2}=0.$$

5. $$P'_{i,(n-i)+z}(t)=(-ik-(n-i)+ik\tau_{11}+$$
$$+(n-i)\tau_{22})P_{i,(n-i)+z}(t)+ik\tau_{10}P_{(i)+1,(n-i)+z}(t)+$$
$$+(i+1)k\tau_{10}P_{(i+1),(n-i-1)+z+1}(t)+(n-i)\tau_{20}P_{i,(n-i)+z+1}(t)+$$
$$+(i+1)k\tau_{12}P_{(i+1),(n-i-1)+z}(t)+(n-i)\tau_{222}P_{i,(n-i)+z-1}(t)+$$
$$+(i+1)k\tau_{122}P_{(i+1),(n-i-1)+z-1}(t)+ik\tau_{112}P_{i,(n-i)+z-1}(t)+$$
$$+ik\tau_{122}P_{(i)+1,(n-i)+z-2}(t)+ik\tau_{12}P_{(i)+1,(n-i)+z-1}(t),$$
$$i=\overline{0,n},z=\overline{1,h_2+i-1}.$$

6. $$P'_{i,(n-i)+h_2+i}(t)=(-ik-(n-i)+ik\tau_{11}+ik\tau_{112}+$$
$$+(n-i)\tau_{22}+(n-i)\tau_{222}))P_{i,(n-i)+h_2+i}(t)+$$
$$+ik(\tau_{10}+\tau_{12}+\tau_{122})P_{(i)+1,(n-i)+h_2+i}(t)+$$
$$+(i+1)k(\tau_{10}+\tau_{12}+\tau_{122})P_{(i+1),(n-i-1)+h_2+i+1}(t)+$$
$$+(i+1)k(\tau_{12}+\tau_{122})P_{(i+1),(n-i-1)+h_2+i}(t)+$$
$$+(n-i)\tau_{222}P_{i,(n-i)+h_2+i-1}(t)+$$
$$+(i+1)k\tau_{122}P_{(i+1),(n-i-1)+h_2+i-1}(t)+ik\tau_{112}P_{i,(n-i)+h_2+i-1}(t)+$$
$$+ik\tau_{122}P_{(i)+1,(n-i)+h_2+i-2}(t)+$$
$$+ik(\tau_{12}+\tau_{122})P_{(i)+1,(n-i)+h_2+i-1}(t),\ i=\overline{0,n}.$$

7. $$P'_{(i)+k,(n-i)}(t)=\left(-ik-(n-i)+ik\tau_{11}+(n-i)\tau_{22}\right)\times$$
$$\times P_{(i)+k,(n-i)}(t)+(n-i)\tau_{20}P_{(i)+k,(n-i)+1}(t)+$$
$$+(n-i+1)\tau_{20}P_{(i-1)+k+1,(n-i+1)}(t)+ik\tau_{10}P_{(i)+k+1,n-i}(t)+$$
$$+(n-i+1)\tau_{21}P_{(i-1)+k,(n-i+1)}(t)+ik\tau_{111}P_{(i)+k-1,n-i}(t)+$$
$$+(n-i+1)\tau_{211}P_{(i-1)+k-1,(n-i+1)}(t)+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+k-1,(n-i)}(t)+$$
$$+(n-i)\tau_{21}P_{(i)+k-1,(n-i)+1}(t)+(n-i)\tau_{211}P_{(i)+k-2,(n-i)+1}(t),$$
$$i=\overline{0,n},\ k=\overline{1,h_1-i-1}+n.$$

8. $$P'_{(i)+h+n-i_1,(n-i)}(t)=(-ik-(n-i)+ik\tau_{11}+ik\tau_{111}+$$
$$+(n-i)\tau_{22}+(n-i)\tau_{212}))P_{(i)+h+n-i_1,(n-i)}(t)+$$
$$+(n-i)(\tau_{20}+\tau_{21}+\tau_{211})P_{(i)+h+n-i,(n-i)+1}(t)+$$
$$+(n-i+1)(\tau_{20}+\tau_{21}+\tau_{211})P_{(i-1)+n+h-i+1,(n-i+1)}(t)+$$
$$+(n-i+1)(\tau_{21}+\tau_{211})P_{(i-1)+n+h-i,(n-i+1)}(t)+$$
$$+ik\tau_{111}P_{(i)+n+h-i-1,n-i}(t)+$$
$$+(n-i+1)\tau_{211}P_{(i-1)+n+h-i-1,(n-i+1)}(t)+$$
$$+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+n+h-i-1,(n-i)}(t)+$$
$$+(n-i)(\tau_{21}+\tau_{211})P_{(i)+n+h-i-1,(n-i)+1}(t)+$$
$$+(n-i)\tau_{211}P_{(i)+n+h-i-2,(n-i)+1}(t),\ i=\overline{0,n}.$$

9. $$P'_{(i)+k,(n-i)+z}(t)=\left(-(n-i)-ik+(n-i)\tau_{22}+ik\tau_{11}\right)\times$$
$$\times P_{(i)+k,(n-i)+z}(t)+ik\tau_{10}P_{(i)+k+1,(n-i)+z}(t)+$$
$$+ik\tau_{112}P_{(i)+k,(n-i)+z-1}(t)+ik\tau_{122}P_{(i)+k+1,(n-i)+z-2}(t)+$$
$$+(n-i)\tau_{20}P_{(i)+k,(n-i)+z+1}(t)+(n-i)\tau_{222}P_{i+k,(n-i)+z-1}(t)+$$
$$+(n-i)\tau_{21}P_{(i)+k-1,(n-1)+z+1}(t)+ik\tau_{12}P_{(i)+k+1,(n-i)+z-1}(t)+$$
$$+ik\tau_{111}P_{(i)+k-1,(n-i)+z}(t)+(n-i)\tau_{211}P_{(i)+k-2,(n-i)+z+1}(t)+$$

$$+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+k-1,(n-i)+z}(t),$$

$$i=\overline{0,n};\;\; k=\overline{1,n+h_1-i-1};\;\; z=\overline{1,h_2+i-1}.$$

10. $$P'_{(i)+k,(n-i)+h_2+i}(t)=(-(n-i)-ik_1+(n-i)\tau_{22}+$$

$$+(n-i)\tau_{222})+ik\tau_{11}+ik\tau_{112}))P_{(i)+k,(n-i)+h_2+i}(t)+$$

$$+ik\tau_{10}P_{(i)+k+1,(n-i)+h_2+i}(t)+ik\tau_{112}P_{(i)+k,(n-i)+h_2+i-1}(t)+$$

$$+ik\tau_{122}P_{(i)+k+1,(n-i)+h_2+i-2}(t)+(n-i)\tau_{222}P_{i+k,(n-i)+h_2+i-1}(t)+$$

$$+ik\tau_{12}P_{(i)+k+1,(n-i)+h_2+i-1}(t)+ik\tau_{111}P_{(i)+k-1,(n-i)+h_2+i}(t)+$$

$$+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+k-1,(n-i)+h_2+i}(t), i=\overline{1,n}; k=\overline{1,n+h_1-i-1}.$$

11. $$P'_{(i)+n+h_1-i,(n-1)+z}(t)=(-(n-i)-ik+(n-i)\tau_{22}+$$

$$+(n-i)\tau_{212})+ik\tau_{11}+ik\tau_{111}))P_{(i)+n+h_1-i,(n-1)+z}(t)+$$

$$+ik\tau_{112}P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+z-1}(t)+(n-i)(\tau_{20}+\tau_{21}+\tau_{211})\times$$

$$\times P_{(i)+n+h_1-1,(n-i)+z+1}(t)+(n-i)\tau_{222}P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+z-1}(t)+$$

$$+(n-i)(\tau_{21}+\tau_{211})P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+z+1}(t)+$$

$$+ik\tau_{111}P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+z}(t)+$$

$$+(n-i)\tau_{211}P_{(i)+n+h_1-i-2,(n-i)+z+1}(t)+$$

$$+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+z}(t),\;\; z=\overline{1,h_2+i-1}.$$

12. $$P'_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+h_2+i}(t)=(-(n-i)-ik+(n-i)\tau_{22}+$$

$$+(n-i)\tau_{222}+(n-i)\tau_{212}+ik\tau_{11}+ik\tau_{111}+ik\tau_{112}))\times$$

$$\times P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+h_2+i}(t)+ik\tau_{112}P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+h_2+i-1}(t)+$$

$$+(n-i)\tau_{222}P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+h_2+i-1}(t)+$$

$$+ik\tau_{111}P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+h_2+i}(t)+$$

$$+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+h_2+i}(t).$$

Среднее число выполненных задач при ограниченном числе n вычислительных блоков равно к моменту времени t:

для задач 1-го типа:

$$C_1=\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} jP(t)_{ji}+\sum_{l=0}^{n-1}(n-l)\sum_{i=0}^{n-l+h_2}\sum_{j=0}^{l+h_1}P(t)_{n-l+j,l+i};$$

для задач 2-го типа:

$$C_2=\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i-1} jP(t)_{ij}+\sum_{l=0}^{n-1}(n-l)\sum_{i=0}^{n-l+h_1}\sum_{j=0}^{l+h_2}P(t)_{l+i,n-l+j};$$

для задач 1-го и 2-го типов:

$$C_{12}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1}(i+j)P(t)_{ij}+n(1-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1}P(t)_{ij})=$$

$$=n-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1}(n-(i+j))P(t)_{ij}.$$

4. Система обыкновенных уравнений для изучения поведения вычислительной сети для стацинарного случая

Обозначим $p_{i,j}$ — вероятность того, что система имеет i инициированных задач первого типа и j инициированных задач второго типа.

Система дифференциальных уравнений для определения вероятностей $p_{i,j}$ имеет вид

1. $$(ik(1-\tau_{11})+j(1-\tau_{22}))P_{ij}=$$

$$=(i+1)k\tau_{10}P_{i+1,j}+(j+1)\tau_{20}P_{i,j+1}+(i-1)k\tau_{111}P_{i-1,j}+$$

$$+(j-1)\tau_{222}P_{i,j-1}+(i+1)k\tau_{12}P_{i+1,j-1}+(j+1)\tau_{21}P_{i-1,j+1}+$$

$$+(i+1)k\tau_{122}P_{i+1,j-2}+(j+1)\tau_{211}P_{i-2,j+1}+(i)k\tau_{112}P_{i,j-1}+$$

$$+(j)\tau_{212}P_{i-1,j}+(j+1)\tau_{211}P_{i-2,j+1},\;\; 2\le i+j\le n-1.$$

2. $(1-\tau_{22}-\tau_{20})P_{01}=k\tau_{10}P_{11}+2\tau_{20}P_{02}+k\tau_{12}P_{10}.$

3. $k(1-\tau_{11}-\tau_{10})P_{10}=\tau_{20}P_{11}+2k\tau_{10}P_{20}+\tau_{21}P_{01}.$

4. $$(ik(1-\tau_{11})+(n-i)(1-\tau_{22})P_{(i),(n-i)}=$$

$$=(i)k\tau_{10}P_{(i)+1,(n-i)}+(i+1)k\tau_{10}P_{(i+1),(n-i-1)+1}+$$

$$+(n-i)\tau_{20}P_{i,(n-i)+1}+(n-i+1)\tau_{20}P_{(i-1)+1,(n-i+1)}+$$

$$+(i-1)k\tau_{111}P_{i-1,n-i}+(n-i-1)\tau_{222}P_{i,n-i-1}+$$

$$+(i+1)k\tau_{12}P_{i+1,n-i-1}+(n-i+1)\tau_{21}P_{i-1,n-i+1}+$$

$$+(i+1)k\tau_{122}P_{i+1,n-i-2}+(n-i+1)\tau_{211}P_{i-2,n-i+1}+$$

$$+(i)k\tau_{112}P_{i,n-i-1}+(n-i)\tau_{212}P_{i-1,n-i},\;\; 0\le i\le n,$$

$$P_{(-1)+1,n+1}=P_{-1,n+1}=P_{-2,n+1}=P_{-1,n}=P_{n+1,(-1)+1}=$$
$$=P_{n-1,-1}=P_{n,-1}=P_{n+1,-2}=0.$$

5. $$\big(ik(1-\tau_{11})+(n-i)(1-\tau_{22})\big)P_{i,(n-i)+z}=$$
$$=ik\tau_{10}P_{(i)+1,(n-i)+z}+(i+1)k\tau_{10}P_{(i+1),(n-i-1)+z+1}+$$
$$+(n-i)\tau_{20}P_{i,(n-i)+z+1}+(i+1)k\tau_{12}P_{(i+1),(n-i-1)+z}+$$
$$+(n-i)\tau_{222}P_{i,(n-i)+z-1}+(i+1)k\tau_{122}P_{(i+1),(n-i-1)+z-1}+$$
$$+ik\tau_{112}P_{i,(n-i)+z-1}+ik\tau_{122}P_{(i)+1,(n-i)+z-2}+$$
$$+ik\tau_{12}P_{(i)+1,(n-i)+z-1},\ i=\overline{0,n},\quad z=\overline{1,h_2+i-1}.$$

6. $$\big(ik(1-\tau_{11}-\tau_{112})+(n-i)(1-\tau_{22}-\tau_{222})\big)P_{i,(n-i)+h_2+i}=$$
$$=ik(\tau_{10}+\tau_{12}+\tau_{122})P_{(i)+1,(n-i)+h_2+i}+$$
$$+(i+1)k(\tau_{10}+\tau_{12}+\tau_{122})P_{(i+1),(n-i-1)+h_2+i+1}+$$
$$+(i+1)k(\tau_{12}+\tau_{122})P_{(i+1),(n-i-1)+h_2+i}+$$
$$+(n-i)\tau_{222}P_{i,(n-i)+h_2+i-1}+(i+1)k\tau_{122}P_{(i+1),(n-i-1)+h_2+i-1}+$$
$$+ik\tau_{112}P_{i,(n-i)+h_2+i-1}+ik\tau_{122}P_{(i)+1,(n-i)+h_2+i-2}+$$
$$+ik(\tau_{12}+\tau_{122})P_{(i)+1,(n-i)+h_2+i-1},\quad i=\overline{0,n}.$$

7. $$\big(ik(1-\tau_{11})+(n-i)(1-\tau_{22})\big)P_{(i)+k,(n-i)}=$$
$$=(n-i)\tau_{20}P_{(i)+k,(n-i)+1}+(n-i+1)\tau_{20}P_{(i-1)+k+1,(n-i+1)}+$$
$$+ik\tau_{10}P_{(i)+k+1,n-i}+(n-i+1)\tau_{21}P_{(i-1)+k,(n-i+1)}+$$
$$+ik\tau_{111}P_{(i)+k-1,n-i}+(n-i+1)\tau_{211}P_{(i-1)+k-1,(n-i+1)}+$$
$$+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+k-1,(n-i)}+(n-i)\tau_{21}P_{(i)+k-1,(n-i)+1}+$$
$$+(n-i)\tau_{211}P_{(i)+k-2,(n-i)+1},\ i=\overline{0,n},\quad k=\overline{1,h_1-i-1}+n.$$

8. $$\big(ik(1-\tau_{11}-\tau_{111})+(n-i)(1-\tau_{22}-\tau_{212})\big)P_{(i)+h+n-i_1,(n-i)}=$$
$$=(n-i)(\tau_{20}+\tau_{21}+\tau_{211})P_{(i)+h+n-i,(n-i)+1}+$$
$$+(n-i+1)(\tau_{20}+\tau_{21}+\tau_{211})P_{(i-1)+n+h-i+1,(n-i+1)}+$$
$$+(n-i+1)(\tau_{21}+\tau_{211})P_{(i-1)+n+h-i,(n-i+1)}+$$
$$+ik\tau_{111}P_{(i)+n+h-i-1,n-i}+(n-i+1)\tau_{211}P_{(i-1)+n+h-i-1,(n-i+1)}+$$
$$+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+n+h-i-1,(n-i)}+(n-i)(\tau_{21}+\tau_{211})\times$$
$$\times P_{(i)+n+h-i-1,(n-i)+1}+(n-i)\tau_{211}P_{(i)+n+h-i-2,(n-i)+1},i=\overline{0,n}.$$

9. $$\big((n-i)\mu_2(1-\tau_{22})+ik(1-\tau_{11})\big)P_{(i)+k,(n-i)+z}=$$
$$=ik\tau_{10}P_{(i)+k+1,(n-i)+z}+ik\tau_{112}P_{(i)+k,(n-i)+z-1}+$$
$$+ik\tau_{122}P_{(i)+k+1,(n-i)+z-2}+(n-i)\tau_{20}P_{(i)+k,(n-i)+z+1}+$$
$$+(n-i)\tau_{222}P_{i+k,(n-i)+z-1}+(n-i)\tau_{21}P_{(i)+k-1,(n-1)+z+1}+$$
$$+ik\tau_{12}P_{(i)+k+1,(n-i)+z-1}+ik\tau_{111}P_{(i)+k-1,(n-i)+z}+$$
$$+(n-i)\tau_{211}P_{(i)+k-2,(n-i)+z+1}+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+k-1,(n-i)+z},$$
$$i=\overline{0,n};\ k=\overline{1,n+h_1-i-1};\ z=\overline{1,h_2+i-1}.$$

10. $$\big((n-i)(1-\tau_{22}-\tau_{222})+ik(1-\tau_{11}-\tau_{112})\big)P_{(i)+k,(n-i)+h_2+i}=$$
$$=ik\tau_{10}P_{(i)+k+1,(n-i)+h_2+i}+ik\tau_{112}P_{(i)+k,(n-i)+h_2+i-1}+$$
$$+ik\tau_{122}P_{(i)+k+1,(n-i)+h_2+i-2}+(n-i)\tau_{222}P_{i+k,(n-i)+h_2+i-1}+$$
$$+ik\tau_{12}P_{(i)+k+1,(n-i)+h_2+i-1}+ik\tau_{111}P_{(i)+k-1,(n-i)+h_2+i}+$$
$$(n-i)\tau_{212}P_{(i)+k-1,(n-i)+h_2+i},\ i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,n+h_1-i-1}.$$

11. $$\big((n-i)(1-\tau_{22}-\tau_{212})+ik(1-\tau_{11}-\tau_{111})\big)P_{(i)+n+h_1-i,(n-1)+z}=$$
$$=ik\tau_{112}P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+z-1}+(n-i)(\tau_{20}+\tau_{21}+\tau_{211})\times$$
$$\times P_{(i)+n+h_1-1,(n-i)+z+1}+(n-i)\tau_{222}P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+z-1}+$$
$$+(n-i)(\tau_{21}+\tau_{211})P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+z+1}+$$
$$+ik\tau_{111}P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+z}+(n-i)\tau_{211}P_{(i)+n+h_1-i-2,(n-i)+z+1}+$$
$$(n-i)\tau_{212}P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+z},\quad z=\overline{1,h_2+i-1}.$$

12. $$\big((n-i)(1-\tau_{22}-\tau_{222}-\tau_{212})+ik(1-\tau_{11}-\tau_{111}-\tau_{112})\big)\times$$
$$\times P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+h_2+i}=ik\tau_{112}P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+h_2+i-1}+$$
$$+(n-i)\tau_{222}P_{(i)+n+h_1-i,(n-i)+h_2+i-1}+ik\tau_{111}P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+h_2+i}+$$
$$+(n-i)\tau_{212}P_{(i)+n+h_1-i-1,(n-i)+h_2+i}.$$

Среднее число выполненных задач при ограниченном числе n вычислительных блоков для стационарного случая равно:

для задач 1-го типа

$$C_1 = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} jP_{ji} + \sum_{l=0}^{n-1} (n-l) \sum_{i=0}^{n-l+h_2} \sum_{j=0}^{l+h_1} P_{n-l+j,l+i};$$

для задач 2-го типа

$$C_2 = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} jP_{ij} + \sum_{l=0}^{n-1} (n-l) \sum_{i=0}^{n-l+h_1} \sum_{j=0}^{l+h_2} P_{l+i,n-l+j};$$

для задач 1-го и 2-го типов

$$C_{12} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} (i+j)P_{ij} + n(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} P_{ij}) =$$

$$= n - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} (n-(i+j))P_{ij}.$$

5. Экспериментальные результаты

В частном случае при числе вычислительных модулей $n = 3$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, где $n + h_1$ — максимальное число задач первого типа; $n + h_2$ —максимальное число задач второго типа, имеем набор состояний, представленный в табл. 1.

Варианты набора вероятностей

$$\overline{\tau_1} = \{\tau_{10} + \tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{111} + \tau_{112} + \tau_{122}\};$$

$$\overline{\tau_2} = \{\tau_{20} + \tau_{21} + \tau_{22} + \tau_{211} + \tau_{212} + \tau_{222}\};$$

$$\tau_{10} + \tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{111} + \tau_{112} + \tau_{122} = 1;$$

$$\tau_{20} + \tau_{21} + \tau_{22} + \tau_{211} + \tau_{212} + \tau_{222} = 1$$

представлены в табл. 2.

Среднее число задач при ограниченном числе вычислительных блоков $n = 3$ при $k = 1$, $\mu_2 = 1$ представлено в табл. 3.

Среднее число задач при ограниченном числе вычислительных блоков $n = 3$ при $k = 1, \mu_2 = 0,5$ представлено в табл. 4.

Среднее число задач при ограниченном числе вычислительных блоков $n = 3$ при $k = 1$, $\mu_2 = 0,1$ представлено в табл. 5.

Таблица 1

	01	02	03	0,3+1
			0+1,3	0+1,3+1
			0+2,3	0+2,3+1
			0+3,3	0+3,3+1
			0+4,3	0+4,3+1
10	11	12	1,2+1	1,2+2
		1+1,2	1+1,2+1	1+1,2+2
		1+2,2	1+2,2+1	1+2,2+2
		1+3,2	1+3,2+1	1+3,2+2
20	21	2,1+1	2,1+2	2,1+3
	2+1,1	2+1,1+1	2+1,1+2	2+1,1+3
	2+2,1	2+2,1+1	2+2,1+2	2+2,1+3
30	3,0+1	3,0+2	3,0+3	3,0+4
3+1,0	3+1,0+1	3+1,0+2	3+1,0+3	3+1,0+4

Таблица 2

Варианты для $\overline{\tau_1}$	τ_{10}	$\tau_{11} + \tau_{12} (\tau_{11} = \tau_{12})$	$\tau_{111} + \tau_{112} + \tau_{122} (\tau_{111} = \tau_{112} = \tau_{122})$
1.1	0.15	0.7	0.15
1.2	0.30	0.4	0.30
1.3	0.45	0.1	0.45

Варианты для $\overline{\tau_2}$	τ_{20}	$\tau_{22} + \tau_{21} (\tau_{22} = \tau_{21})$	$\tau_{222} + \tau_{212} + \tau_{211} (\tau_{222} = \tau_{212} = \tau_{211})$
2.1	0.15	0.7	0.15
2.2	0.30	0.4	0.30
2.3	0.45	0.1	0.45

Таблице 3

Среднее число	1.1,2.1	1.1,2.2	1.1,2.3
C_1	0.95	0.98	0.998
C_2	0.95	1.02	1.082
C_1+C_2	1.90	2.00	2.080
C_{12}	1.90	2.00	2.080

Среднее число	1.2,2.1	1.2,2.2	1.2,2.3
C_1	1.019	1.01	1.010
C_2	0.9776	1.01	1.058
C_1+C_2	1.9966	2.02	2.068
C_{12}	1.9966	2.02	2.068

Среднее число	1.3,2.1	1.3,2.2	1.3,2.3
C_1	1.0796	1.0576	1.0368
C_2	0.9947	1.0094	1.0368
C_1+C_2	2.0743	2.067	2.0736
C_{12}	2.0743	2.067	2.0736

Таблице 4

Среднее число	1.1,2.1	1.1,2.2	1.1,2.3
C_1	0.6013	0.6244	0.6385
C_2	1.1795	1.2817	1.3614
C_1+C_2	1.7808	1.9061	1.9999
C_{12}	1.7808	1.9061	1.9999

Среднее число	1.2,2.1	1.2,2.2	1.2,2.3
C_1	0.6636	0.6576	0.6501
C_2	1.2354	1.2888	1.3436
C_1+C_2	1.899	1.9464	1.9937
C_{12}	1.899	1.9464	1.9937

Среднее число	1.3,2.1	1.3,2.2	1.3,2.3
C_1	0.7187	0.6965	0.6717
C_2	1.28	1.3009	1.3324
C_1+C_2	1.9987	1.9974	2.0041
C_{12}	1.9987	1.9974	2.0041

При числе вычислительных модулей $n = 3$, $h_1 = 1$, $h_2 = 1$, где $n + h_1$ — максимальное число задач первого типа; $n + h_2$ —максимальное число задач второго типа, имеем набор состояний, представленный в табл. 6.

Варианты набора вероятностей

$$\overline{\tau_1} = \{\tau_{10}+\tau_{11}+\tau_{12}+\tau_{111}+\tau_{112}+\tau_{122}\};$$

$$\overline{\tau_2} = \{\tau_{20}+\tau_{21}+\tau_{22}+\tau_{211}+\tau_{212}+\tau_{222}\};$$

Таблице 5

Среднее число	1.1,2.1	1.1,2.2	1.1,2.3
C_1	0.1316	0.1317	0.1307
C_2	1.2118	1.3169	1.4064
C_1+C_2	1.3434	1.4489	1.5371
C_{12}	1.3434	1.4489	1.5371

Среднее число	1.2,2.1	1.2,2.2	1.2,2.3
C_1	0.152	0.144	0.136
C_2	1.284	1.345	1.399
C_1+C_2	1.436	1.489	1.535
C_{12}	1.436	1.489	1.535

Среднее число	1.3,2.1	1.3,2.2	1.3,2.3
C_1	0.1741	0.1599	0.1442
C_2	1.3543	1.3803	1.4059
C_1+C_2	1.5284	1.5402	1.5501
C_{12}	1.5284	1.5402	1.5501

$$\tau_{10}+\tau_{11}+\tau_{12}+\tau_{111}+\tau_{112}+\tau_{122}=1;$$

$$\tau_{20}+\tau_{21}+\tau_{22}+\tau_{211}+\tau_{212}+\tau_{222}=1$$

представлены в табл. 7.

Среднее число задач при ограниченном числе вычислительных блоков $n = 5$ при $k=1,\ \mu_2=1$ представлено в табл. 8.

Среднее число задач при ограниченном числе вычислительных блоков $n = 5$ при $k=1, \mu_2=0{,}5$ представлено в табл. 9.

Среднее число задач при ограниченном числе вычислительных блоков $n = 5$ при $k=1,\ \mu_2=0{,}1$ представлено в табл. 10.

Выводы

В рамках экспоненциальной модели оценки индексов производительности вычислительной сети с ограниченным числом вычислительных модулей, предназначенной для выполнения разнотипных задач при динамическом изменении их числа, получена система дифференциальных уравнений для изучения поведения вычислительной сети для переходного процесса и система обыкновенных уравнений для изучения поведения вычислительной сети для стацинарного случая. На основании предложенной модели определяются различные индексы производительности ВС, в частности среднее число выполняемых задач.

Таблица 6

	01	02	03	04	05	0,5+1
					0+1,5	0+1,5+1
					0+2,5	0+2,5+1
					0+3,5	0+3,5+1
					0+4,5	0+4,5+1
					0+5,5	0+5,5+1
					0+6,5	0+6,5+1
10	11	12	13	14	1,4+1	1,4+2
				1+1,4	1+1,4+1	1+1,4+2
				1+2,4	1+2,4+1	1+2,4+2
				1+3,4	1+3,4+1	1+3,4+2
				1+4,4	1+4,4+1	1+4,4+2
				1+5,4	1+5,4+1	1+5,4+2
20	21	22	23	2,3+1	2,3+2	2,3+3
			2+1,3	2+1,3+1	2+1,3+2	2+1,3+3
			2+2,3	2+2,3+1	2+2,3+2	2+2,3+3
			2+3,3	2+3,3+1	2+3,3+2	2+3,3+3
			2+4,3	2+4,3+1	2+4,3+2	2+4,3+3
30	31	32	3,2+1	3,2+2	3,2+3	3,2+4
		3+1,2	3+1,2+1	3+1,2+2	3+1,2+3	3+1,2+4
		3+2,2	3+2,2+1	3+2,2+2	3+2,2+3	3+2,2+4
		3+3,2	3+3,2+1	3+3,2+2	3+3,2+3	3+3,2+4
40	41	4,1+1	4,1+2	4,1+3	4,1+4	4,1+5
	4+1,1	4+1,1+1	4+1,1+2	4+1,1+3	4+1,1+4	4+1,1+5
	4+2,1	4+2,1+1	4+2,1+2	4+2,1+3	4+2,1+4	4+2,1+5
50	5,0+1	5,0+2	5,0+3	5,0+4	5,0+5	5,0+6
5+1,0	5+1,0+1	5+1,0+2	5+1,0+3	5+1,0+4	5+1,0+5	5+1,0+6

Таблица 7

Варианты для $\overline{\tau_1}$	τ_{10}	$\tau_{11}+\tau_{12}\,(\tau_{11}=\tau_{12})$	$\tau_{111}+\tau_{112}+\tau_{122}\,(\tau_{111}=\tau_{112}=\tau_{122})$
1.1	0.15	0.7	0.15
1.2	0.30	0.4	0.30
1.3	0.45	0.1	0.45

Варианты для $\overline{\tau_2}$	τ_{20}	$\tau_{22}+\tau_{21}\,(\tau_{22}=\tau_{21})$	$\tau_{222}+\tau_{212}+\tau_{211}\,(\tau_{222}=\tau_{212}=\tau_{211})$
2.1	0.15	0.7	0.15
2.2	0.30	0.4	0.30
2.3	0.45	0.1	0.45

Таблица 8

Среднее число	1.1,2.1	1.1,2.2	1.1,2.3
C_1	1.160	1.2688	1.3424
C_2	1.160	1.3077	1.4216
C_1+C_2	2.32	2.5765	2.764
C_{12}	2.32	2.5765	2.764

Продолжение табл. 8

Среднее число	1.2,2.1	1.2,2.2	1.2,2.3
C_1	1.2952	1.3379	1.3704
C_2	1.2553	1.3379	1.4152
C_1+C_2	2.5505	2.6758	2.7856
C_{12}	2.5505	2.6758	2.7856

Окончание табл. 8

Среднее число	1.3,2.1	1.3,2.2	1.3,2.3
C_1	1.4071	1.408	1.4087
C_2	1.3285	1.3625	1.4087
$C_1 + C_2$	2.7356	2.7705	2.8174
C_{12}	2.7356	2.7705	2.8174

Таблица 9

Среднее число	1.1,2.1	1.1,2.2	1.1,2.3
C_1	0.6951	0.7639	0.817
C_2	1.3654	1.5551	1.7092
$C_1 + C_2$	2.0605	2.319	2.5262
C_{12}	2.0605	2.319	2.5262

Среднее число	1.2,2.1	1.2,2.2	1.2,2.3
C_1	0.7984	0.8235	0.8422
C_2	1.504	1.6114	1.7164
$C_1 + C_2$	2.3024	2.4349	2.5586
C_{12}	2.3024	2.4349	2.5586

Среднее число	1.3,2.1	1.3,2.2	1.3,2.3
C_1	0.8897	0.886	0.8774
C_2	1.6191	1.6707	1.7314
$C_1 + C_2$	2.5088	2.5567	2.6088
C_{12}	2.5088	2.5567	2.6088

Таблица 10

Среднее число	1.1,2.1	1.1,2.2	1.1,2.3
C_1	0.1372	0.1423	0.1468
C_2	1.2588	1.3937	1.5179
$C_1 + C_2$	1.393	1.536	1.6647
C_{12}	1.393	1.536	1.6647

Среднее число	1.2,2.1	1.2,2.2	1.2,2.3
C_1	1.1624	0.1587	0.1535
C_2	1.3676	1.4568	1.5382
$C_1 + C_2$	1.53	1.6155	1.6917
C_{12}	1.53	1.6155	1.6917

Среднее число	1.3,2.1	1.3,2.2	1.3,2.3
C_1	0.1904	0.1787	0.1657
C_2	1.4812	1.5263	1.5712
$C_1 + C_2$	1.6716	1.705	1.7369
C_{12}	1.6716	1.705	1.7369

Библиографический список

Брехов О.М. Аналитическая оценка производительности многопроцессорных вычислительных систем с динамическим изменением вычисляемых процессов // А и Т. 1995. № 2. С. 141-154.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 15.03.2009