УДК 517.927.2

Дробное исчисление и малые колебания механических систем

Алероева Х.Т.

Московский технический университет связи и информатики, МТУСИ,

ул. Авиамоторная, 8А, Москва, 111024, Россия

e-mail: binsabanur@gmail.com

Аннотация

В работе изучается двухточечная задача Дирихле для уравнения движения осциллятора с вязкоупругим демпфированием в случае, когда порядок демпфирования $1<\alpha<2$. Такие задачи моделируют различные физические процессы. В частности, колебание струны в вязкой среде, изменение деформационно-прочностных характеристик полимербетона при нагружении и др. Показано, что оператор, порождаемый рассматриваемой задачей, является диссипативным оператором келдышевского типа. Также показано, что этот оператор обладает некоторыми осцилляционными свойствами.

Ключевые слова. асфальтобетон, колебания струны в вязкой среде, дробная производная, осцилляционные свойства, операторы келдышевского типа.

Математическая постановка задачи

Многие задачи механики и математической физики [1],[2],[3], связанные с возмущением нормальных операторов с дискретным спектром, приводят к рассмотрению в гильбертовом пространстве Н компактного оператора

$$A=(I+S)H\ ,$$

называемого, при компактном S, слабым возмущением H или оператором келдышевского типа.

В данной работе рассматривается оператор B, порожденный дифференциальным уравнением

$$u''+\sum_{j=1}^{n}a_j(x)D_{0x}^{\alpha_j}u+q(x)u=\lambda u \qquad (1)$$

где $0<\alpha_n<...<\alpha_1=\alpha<2$, а

$$D_{0+}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt$$

- оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α, (здесь, $n=[\alpha]+1$ и $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α) и краевыми условиями

$$u(0)=0,\ \ u(1)=0. \qquad (2)$$

Впервые, при $0<\alpha_n<...<\alpha_1=\alpha<1$, этот оператор был рассмотрен в [4] в связи с изучением потока газа Трикоми на звуковой линии. Там было установлено, что к задаче (1)-(2) эквивалентно редуцируются многие прямые и обратные задачи, ассоциированные с вырождающимся гиперболическим уравнением и уравнением смешанного гиперболо-параболического типа. В частности [5], к задаче (1)-(2) сводится аналог задачи Трикоми для уравнения

$$|y|^{mH(-y)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^{1+H(-y)}u}{\partial y^{1+H(-y)}}$$

где $m = const > 0,$ $H(y)$ функция Хевисайда, $u = u(x, y)$.

Чуть позже, в 1984 году появилась работа [6] где исследуются задачи строительной механики с помощью задачи (1)-(2). Но только недавно, задача (1)-(2) оказалась в центре внимания многих авторов [4],[7],[8],[9],[10],[11]. И это связано, в первую очередь с тем, что задача (1)-(2) моделирует многие физические процессы. Так, например, дробное уравнение Ланжевена, которое остается в центре внимания многих авторов (см., например, [9, 10])

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F(x)-\gamma D^{\alpha}x+\xi(t),$$

а в [7] с помощью задачи (1)-(2) исследуется движение осциллятора под действием упругих сил, характерных для вязкоупругих сред. Особо отметим, что решение первой краевой задачи для уравнения колебаний струны в среде с фрактальной геометрией, т.е. задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}},\quad (0<\alpha<1)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x);\ u_t'(x,0)=\psi(x)$$

также сводится (методом разделения переменных) к задаче (1)-(2).

И наконец, совсем недавняя работа [11], где моделируется изменение деформационно-прочностных характеристик асфальтобетона при нагружении с помощью дробного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах.

Основные результаты

В данной работе, оператор B изучается, в основном, для случая $1 < \alpha < 2$. В случае, когда $0 < \alpha < 1$, спектральная структура оператора $\tilde{B}$,

$$u'' - \varepsilon D_{0x}^{\alpha} u = \lambda u \qquad (3)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \qquad (4)$$

порождённого задачей (3)-(4), достаточно подробно изучена в наших работах [12],[13],[14]. В частности, в этих работах показано:

1. что оператор B обладает основными осцилляционными свойствами (так как оператор B описывает движение осциллятора, то этот оператор должен обладать целым комплексом осцилляционных свойств). В частности,

   а) что при $|\varepsilon| \le (2{,}1)^{-1}$, все собственные числа задачи (3)-(4) простые (из чего следует, что задача (3)-(4) не порождает присоединенных функций) ;

   б) что основной тон этой задачи не имеет узлов;

2. что число λ является собственным значением задачи (A):

$$u'' + \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}u + \lambda u = 0$$

$$u(0) = 0, \; u(1) = 0$$

тогда и только тогда, когда λ является нулем функции

$$\omega(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n} \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha + 2)}.$$

Собственные функции задачи (A) имеют вид

$$\chi_i(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n} \frac{C_n^m \lambda_i^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha + 2)} x^{2n - m\alpha + 1},$$

где λ_i - нули функции $\omega(\lambda)$.

3. что число λ является собственным значением сопряженной задачи

$$u'' + \frac{d^{\alpha}}{d(1-x)^{\alpha}}u + \lambda u = 0$$

$$u(0) = 0, \; u(1) = 0,$$

тогда и только тогда, когда λ является нулем функции

$$\omega(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n} \frac{C_n^m \lambda^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha + 2)}.$$

Собственные функции сопряженной задачи имеют вид

$$\overline{\chi}_i(x) = 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n+1} \frac{C_n^m \lambda_i^{n-m}}{\Gamma(2n - m\alpha)}(1-x)^{2n - m\alpha},$$

где λ_i - нули функции $\omega(\lambda)$.

4. система всех собственных функций задачи (3)-(4) образует базис в $L_2(0,1)$;

5. оператор $\tilde{B}$, сопутствующий задаче (3)-(4) диссипативный (так как всякий линейный оператор B, сопутствующий механической системе, в котором имеется диссипация энергии, должен удовлетворять условию [19] $\operatorname{Re}(Bf, f) \le 0$);
6. оператор $\tilde{B}$, сопутствующий задаче (3)-(4) является оператором келдышевского типа.

Следует отметить, что в случае $1 < \alpha < 2$, оператор $\tilde{B}$, к сожалению, не обладает всеми вышеперечисленными свойствами. Отчасти, это объясняется тем, что физические системы, описываемые уравнением (1), очень чувствительны к изменениям порядка дробного демпфирования. Так, например, если речь идет о дробном затухающем уравнении ван дер Поля [7],[8]

$$x''(t) + \mu(x^2 - 1)D_{0t}^{\alpha}x(t) + x(t) = \sin(at), \qquad (5)$$

то [7],[8] периодические, квази-периодические и хаотические движения существуют, когда порядок дробной производной меньше единицы. Когда порядок дробной производной $1 < \alpha < 2$, то существуют только хаотические движения.

Данная работа, в основном, посвящена изучению следующих проблем:

1) является ли оператор B оператором келдышевского типа (в случае $1 < \alpha < 3/2$)?

2) является ли оператор B диссипативным (в случае $1 < \alpha < 2$)?

3) является ли оператор B осцилляционным (в случае $1 < \alpha < 2$)?

Теорема 1. Если $\varepsilon < 0{,}24$, то все собственные числа задачи

$$u'' + \varepsilon D_{0x}^{\alpha_1} u + \varepsilon D_{0x}^{\alpha_2} u = \lambda u, \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in (0{,}1)),$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0$$

простые и вещественные.

Доказательство. Рассмотрим семейство $T(\varepsilon) = T + \varepsilon T_1$, где T - дифференцируемый оператор

$$Tu = \begin{cases} -u'' \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases},$$

а оператор $T_1 = D_{0x}^{\alpha_1} + D_{0x}^{\alpha_2}$. Так как все собственные числа оператора T изолированы и имеют кратность равную 1, то соответствующие собственные числа $\lambda_m(\varepsilon)$ и собственные функции $\varphi_m(\varepsilon)$, голоморфные, по крайней мере, для малых ε [15]

$$\lambda_m(\varepsilon) = \lambda_m^{(0)} + \varepsilon \lambda_m^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda_m^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n \lambda_m^{(n)} + \ldots \qquad (6)$$

$$\varphi_m(\varepsilon) = \varphi_m^{(0)} + \varepsilon \varphi_m^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi_m^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n \varphi_m^{(n)} + \ldots \qquad (7)$$

Имеются различные формулы для вычислений нижней границы радиуса сходимости r_0 рядов Тейлора (6)-(7). Воспользуемся формулой [15, стр. 475]

$$r_0 = \min_{\varsigma \in \Gamma} \left(a \| R(\varsigma, T) \| + b \| TR(\varsigma, T) \| + c \right)^{-1}. \qquad (8)$$

В формуле (8) в качестве контура Γ возьмем окружность $\left| \varsigma - \frac{1}{\pi^2} \right| = \frac{\rho}{2}$, где ρ - расстояние от $\frac{1}{\pi^2}$ до множества остальных собственных чисел оператора T, а параметры a, b, c будут вычислены ниже.

В нашем случае, $c = 0$ [15, стр. 475]. Чтобы найти параметры a, b, c воспользуемся формулами

$$\left\| I^{\alpha} \varphi \right\|_p \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|\varphi\|_p .$$

Здесь, I^{α} - оператор дробного интегрирования Римана-Лиувилля порядка α. Известно, что [15, стр. 244]

$$\left\| D_x^{\alpha} u \right\|_p \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|u'\|_p \le \frac{1}{n-1} \|u''\|_p + \frac{2n(n+1)}{n-1} \|u\|_p . \qquad (9)$$

Так как здесь n - любое положительное число, то T - границу возмущения T_1 можно выбрать сколь угодно малой. Поэтому в формуле (8) за значение параметра a можно взять число $\frac{2m(m+1)}{m-1}$ а за b - число, равное $\frac{1}{m-1}$.

Выбрав в формуле (9) в качестве Γ окружность $\left| \varsigma - (m\pi)^2 \right| = \frac{\rho}{2}$, где ρ - расстояние от $(m\pi)^2$ до множества остальных собственных чисел оператора T получим

$$r_0 \le \frac{1}{\dfrac{2m(m+1)}{(m-1)\left(m-\dfrac{1}{2}\right)} + 1 + \dfrac{(m+1)^2}{(m-1)\left(m-\dfrac{1}{2}\right)}}.$$

Здесь, мы воспользовались тем, что

$$R(\varsigma) = \frac{1}{dist(\varsigma; \sum(T))},$$

$$TR(\varsigma) = I + \varsigma R(\varsigma).$$

Осталось доказать, что все собственные числа задачи (3)-(4) вещественны. Обратимся к формулам (6), (7)

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1^{(0)} + \varepsilon\lambda_1^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\lambda_1^{(n)} + \ldots \quad (10)$$

$$\varphi_1(\varepsilon) = \varphi_1^{(0)} + \varepsilon\varphi_1^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_1^{(2)} + \ldots + \varepsilon^n\varphi_1^{(n)} + \ldots \quad (11)$$

Коэффициенты $\lambda_1^{(n)}$ и $\varphi_1^{(n)}$ будем вычислять по формулам, указанным в работе [16]

$$\lambda_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{A}_k\varphi_1^{(n-k)}, \varphi_1^{(0)}\right), \qquad \varphi_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} R\left(\lambda_1^{(k)} - \tilde{A}_k\right)\varphi_1^{(n-k)}. \quad (12)$$

Здесь, R - приведенная резольвента оператора T, соответствующая собственному значению $\lambda_1^{(0)}$, является интегральным оператором с ядром $S(x,y)$

$$S(x,y) = \left[-y\cos\sqrt{\lambda_1^{(0)}}y\sin\sqrt{\lambda_1^{(0)}}x + (1-x)\sin\sqrt{\lambda_1^{(0)}}y\cos\sqrt{\lambda_1^{(0)}}x + \frac{1}{2}\sin\sqrt{\lambda_1^{(0)}}y\sin\sqrt{\lambda_1^{(0)}}x\right],$$

$$y \le x,$$

(при $x \le y$ в правой части этой формулы нужно поменять местами x и y). Ясно, что R преобразовывает взаимнооднозначно H_0 (H_0 - ортогональное дополнение функции $\sin\sqrt{\lambda_1^{(0)}}x$) в себя и аннулирует $\sin\sqrt{\lambda_1^{(0)}}x$, а $\tilde{A}_1 = T_1$, $\tilde{A}_k = 0$ при $k = 2,3,...$ Из (10) следует, что

$$\lambda_1^{(1)} = \left(T_1\varphi_1^{(0)}, \varphi_1^{(0)}\right).$$

Так как ядро оператора T_1 является вещественнозначным, то $\operatorname{Im}\lambda_1^{(1)} = 0$. Далее из (12) следует, что $\varphi_1^{(1)} = R(\lambda_1^{(1)} - B_1)\varphi_1^{(0)}$. Так как ядра операторов R и T_1 вещественнозначные, то $\operatorname{Im}\lambda_1^{(1)} = 0$. Таким образом, последовательно можно установить, что $\operatorname{Im}\lambda_1^{(n)} = \operatorname{Im}\varphi_1^{(n)} = 0$ для всех $n(n = 1,2,3,...)$. Итак, если ε вещественное, то $\lambda_1(\varepsilon)$ также вещественное число.

Теорема 2. Система собственных функций задачи

$$u'' + \varepsilon_1 D_{0x}^{\alpha_1} u + \varepsilon_2 D_{0x}^{\alpha_2} u = \lambda u, \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)),$$

(13)

$$u(0) = 0, u(1) = 0 \qquad (14)$$

образует базис в $L_2(0,1)$.

Доказательство. Изучение спектра оператора B сводится к изучению спектра линейного операторного пучка $L(\lambda) = J + M - \lambda N$, где

$$Mu = \int_0^1 G(x,t)\left[\varepsilon_1 D_{0x}^{\alpha_1} + \varepsilon_2 D_{0x}^{\alpha_2}\right]u(t)dt\,, \quad Nu = \int_0^1 G(x,t)u(t)dt\,,$$

$$G(x,t) = \begin{cases} t(x-1), t \le x, \\ x(t-1), t > x \end{cases}.$$

Покажем, что оператор M компактен. Можно показать, что

$$Mu = \sum_{j=1}^{2} \frac{\varepsilon}{\Gamma\left(1-\alpha_j\right)}\left[x\int_x^1 u(\xi)d\xi \int_\xi^1 \frac{\{(1-t)\}}{\left(t-\xi\right)^{\alpha_j}} + \int_0^x u(\xi)\left\{(1-x)\int_\xi^x \frac{1}{\left(t-\xi\right)^{\alpha_j}}dt - x\int_x^1 \frac{1}{\left(t-\xi\right)^{\alpha_j}}dt\right\}d\xi\right].$$

Так как $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, то оператор $M \in G_\infty$G (т.е. компактен), а оператор N, очевидно, самосопряженный. Поэтому, из теоремы Келдыша [1] следует полнота системы собственных и присоединенных функций. В силу теоремы 1, задача не порождает присоединенных функций. Так как [17] оператор B является оператором келдышевского типа, то в силу [17], данная система образует базис в $L_2(0,1)$.

Покажем, что оператор B порождаемый задачей (13)-(14) является диссипативным.

Теорема 3. Оператор B диссипативен при $\varepsilon < 0$.

Доказательство. Известно [18], что $\operatorname{Re}(D_{0x}^{\alpha}u, \bar{u}) \ge 0$ при $0 < \alpha < 1$,

поэтому

$$\operatorname{Re}(D_{0x}^{\alpha_1}u, \bar{u}) \ge 0\,, \qquad \operatorname{Re}(D_{0x}^{\alpha_2}u, \bar{u}) \ge 0\,. \tag{15}$$

Отсюда следует, $\operatorname{Re}(u'' + \varepsilon_1 D_{0x}^{\alpha_1} + \varepsilon_2 D_{0x}^{\alpha_2}, \bar{u}) \ge 0$, что и доказывает теорему 3.

Заключение

В заключении отметим, что полученные в данной статье результаты могут быть использованы в теории фильтрации жидкости и газа в средах с фрактальной структурой, а также при изучении движения осциллятора с вязкоупругим демпфированием.

Библиографический список

1. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений //Доклады АН СССР. Т. 77. № 1. 1951. С. 11–14.
2. Зверяев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ, 2014, № 78: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53459
3. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ, 2015, № 79: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=55762
4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 273 с.

5. Aleroev T.S., Aleroeva H.T., Ning-Ming Nie, Yi-Fa Tang. Boundary Value Problems for Differential Equations of Fractional Order //Mem. Differential Equations Math. Phys. 49 (2010), pp. 19-82.
6. Цейтлин А.И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. – М.: Стройиздат, 1984. - 334 с.
7. Ingman D., Suzdalnitsky J. Iteration method for equation of viscoelastic motion with fractional differential operator of damping//Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. 190 (2001), pp. 5027–5036.
8. Chen J.-H., Chen W.-C. Chaotic dynamics of the fractionally damped van der Pole equation// Chaos, Solitons and Fractals 35 (2008), pp. 188–198.
9. Coffey W.T., Kalmykov Yu.P., Waldron J.T. The Langevin Equation (World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics. Vol. 10, 2004. 704 pages).
10. Yang H., Luo G., Karnchanaphanurach P., Louie T.M., Rech I., Cova S., Xun L., Xie X.S. Science, 2003, 302, pp. 262–266.
11. Кехарсаева Э.Р., Пирожков В.Г. Моделирование изменения деформационно-прочностных характеристик асфальтобетона при нагружении с помощью дробного исчисления // Труды 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» имени И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. Москва, 16-18 ноября, 2016. С. 104-109.

12. Aleroev T.S., Aleroeva H.T. Erratum to: “On the Eigenfunctions and Eigenvalues of a Class of Non-Selfadjoint Operators”// Lobachevskii Journal of Mathematics, 2016, Vol. 37, No. 6, p. 815.
13. Aleroev T.S., Aleroeva H.T. On the Eigenfunctions and Eigenvalues of a Class of Non-Selfadjoint Operators // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2016, Vol. 37, No. 3, pp. 227–230.
14. Aleroev T.S., Kirane M., Tang Y.-F. Boundary-value problems for differential equations of fractional order//Journal of Mathematical Sciences, Vol. 10 (2013), no. 2, pp. 158 – 175.
15. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.: Мир, 1972. – 739 с.
16. Логинов Б.В. К оценке точности метода возмущений // Известия АН УзССР. Физико-математические науки. 1963. №6. С. 14-19.
17. Ларионов Е.А., Зверяев Е.М., Алероев Т.С. К теории слабого возмущения нормальных операторов. – М: Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, № 14, 2014. - С.31.
18. Алероев Т.С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными: Дисс. доктора физ.-мат. наук. - М.: МГУ, 2000. - 120 с.
19. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Наука, 1965. – 448.