

Научная статья  
УДК 517.67  
DOI: [10.34759/trd-2022-123-25](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-25)

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА

**Людмила Александровна Кондратьева**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Волоколамское шоссе,

Москва, Россия

[liudmila.kondratieva@inbox.ru](mailto:liudmila.kondratieva@inbox.ru)

*Аннотация.* Рассматривается трёхмерная модель движения спутника с тремя скалярными управляющими параметрами и двумя типами управляющих функций. Эта модель описывает плоское движение летательного аппарата вокруг объекта пренебрежимо малой массы, которым может быть другой летательный аппарат или небесное тело небольших размеров. Центр орбиты может даже не представлять собой материальный объект, а быть фиксированной геометрической точкой в пространстве. При определённых условиях на управление в трёхмерном фазовом пространстве данной модели существует двумерное инерциальное многообразие  $M$  – гладкая инвариантная поверхность, экспоненциально притягивающая при  $t \rightarrow +\infty$  произвольные решения системы. Более того, инерциальное многообразие содержит

асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл – замкнутую траекторию, притягивающую при  $t \rightarrow +\infty$  все траектории из некоторой своей окрестности. Наличие  $k$ -мерного инерциального многообразия для  $n$ -мерной динамической системы позволяет, фактически, выделить  $k$  ( $k < n$ ) степеней свободы, полностью определяющих поведение системы при большом времени. Для рассматриваемой трёхмерной модели выделяем две определяющие степени свободы. Явно (аналитически) найти циклы, а тем более инерциальное многообразие конкретных динамических систем удаётся лишь в исключительных случаях. Целью данной работы является приближённая аналитическая аппроксимация инерциального многообразия и предельного цикла для системы ОДУ, описывающей модель движения спутника. Предлагается итеративная процедура аналитического приближения многообразия  $M$ , отличная от ранее известных. С помощью пакета Maple строятся вещественно-аналитические поверхности  $S_k$ , всё более точно приближающие инерциальное многообразие с ростом числа итераций  $k$ . При этом предельный цикл «всё лучше укладывается» на  $S_k$  при возрастании  $k$ . Численные эксперименты дают основания считать, что построенная последовательность приближённых инерциальных многообразий сходится к точному инерциальному многообразию. В работе представлены примеры пошагового приближённого вычисления инерциального многообразия для двух вариантов выбора управляющей функции в модели движения спутника. Предложенный итерационный метод применим к широкому классу конечномерных динамических систем. Данный подход выглядит проще традиционных, его теоретическое обоснование должно составить предмет последующих публикаций.

**Ключевые слова:** модель движения спутника; инерциальное многообразие;  
устойчивый предельный цикл

**Для цитирования:** Кондратьева Л.А. Аналитическое приближение инерциального многообразия для модели движения спутника // Труды МАИ. 2022. № 123. DOI: [10.34759/trd-2022-123-25](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-25)

## ANALYTICAL APPROXIMATION OF INERTIAL MANIFOLDS FOR THE SATELLITE MOTION MODEL

**Ludmila A. Kondratieva**

Moscow Aviation Institute (National Research University)

Moscow, Russia

[liudmila.kondratieva@inbox.ru](mailto:liudmila.kondratieva@inbox.ru)

**Abstract.** A three-dimensional satellite motion model with three scalar control parameters and two types of control functions is considered. This model describes the plane motion of a flying vehicle around an object of negligible mass, which may be another satellite or a small celestial body. The center of the orbit may not even be a material object, but be a fixed geometric point in space. Under certain conditions on the control in the three-dimensional phase space of this model, there exists a two-dimensional inertial manifold  $M$  – a smooth invariant surface that exponentially attracts arbitrary solutions of the system as  $t \rightarrow +\infty$ . Moreover, the inertial manifold contains an asymptotically orbitally stable limit cycle – a closed trajectory that attracts as  $t \rightarrow +\infty$  all trajectories from some of its neighborhood. The presence of a  $k$ -dimensional inertial manifold for an  $n$ -dimensional dynamical system

allows, in fact, to single out  $k$  ( $k < n$ ) degrees of freedom that completely determine the behavior of the system at a large time; for the three-dimensional model under consideration, we single out two defining degrees of freedom. It is possible to explicitly (analytically) find cycles, and even more so the inertial manifold of specific dynamical systems, only in exceptional cases. The purpose of this work is an approximate analytical approximation of the inertial manifold and the limit cycle for the ODE system describing the satellite motion model. An iterative procedure for analytic approximation of the manifold  $M$  is proposed, which differs from the previously known ones. Using the Maple package, real-analytical surfaces  $S_k$  are constructed, which more and more accurately approximate the inertial manifold with an increase in the number of iterations  $k$ . In this case, the limit cycle and the surfaces  $S_k$  "become closer" as  $k$  increases. Numerical experiments give grounds to believe that the constructed sequence of approximate inertial manifolds converges to an exact inertial manifold. The paper presents examples of step-by-step approximate calculation of the inertial manifold for two options for choosing the control function in the satellite motion model. The proposed iterative method is applicable to a wide class of finite-dimensional dynamical systems. This approach looks simpler than traditional ones, and its theoretical substantiation should be the subject of subsequent publications.

**Keywords:** satellite motion model; inertial manifold; stable limit cycle

**For citation:** Kondratieva L.A. Analytical approximation of inertial manifolds for the satellite motion model. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. DOI: [10.34759/trd-2022-123-25](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-25)

## Введение

Во многих отраслях науки, авиационной и ракетно-космической техники, возникают задачи поиска оптимального управления [1–4]. С точки зрения качественного исследования нелинейных систем общего вида получение приближенных аналитических решений и оптимизация управления являются актуальными задачами.

Задачам, связанным с движением спутника, посвящена обширная литература (см., например, [5–14]). Здесь, в продолжение подхода [6–9], рассматривается модель плоского движения спутника вокруг объекта пренебрежимо малой массы, которым может быть другой летательный аппарат или небесное тело небольших размеров. Центр орбиты может даже не представлять собой материальный объект, а быть фиксированной геометрической точкой в пространстве. В некоторых безразмерных координатах данная модель сводится к системе ОДУ вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\mu_1 x + g(z) \\ \frac{dy}{dt} = -\mu_2 y + x \\ \frac{dz}{dt} = -\mu_3 z + y \end{cases} \quad (1)$$

с управляющими параметрами  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$  и скалярной управляющей функцией  $g \in C^1(\mathbb{R})$ . Предполагается, что функция  $g$  удовлетворяет условиям:

$$0 < g(z) \leq m \quad \text{и} \quad |g'(z)| \leq 1 \quad \text{для} \quad z \in (-\infty, +\infty); \quad (2.1)$$

$$\exists \text{ единственное } v > 0: g'(v) = -1 \quad \text{и} \quad g(v) = v\mu_1\mu_2\mu_3. \quad (2.2)$$

Тогда, при определённых дополнительных соотношениях между параметрами  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  и управляющей функцией  $g$  для системы (1) существует [6,8,9] инерциальное многообразие – гладкая инвариантная поверхность  $M \subset \mathbb{R}^3$ , экспоненциально притягивающая при  $t \rightarrow +\infty$  произвольные решения  $(x(t), y(t), z(t))$ . Более того, инерциальное многообразие  $M$  содержит асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл  $\Gamma$  – замкнутую траекторию, притягивающую при  $t \rightarrow +\infty$  все траектории системы (1), начинающиеся в некоторой окрестности  $O(\Gamma) \subset \mathbb{R}^3$ .

Явно (аналитически) найти циклы, а тем более инерциальное многообразие конкретных динамических систем удаётся лишь в исключительных случаях. Целью данной работы является приближённая аналитическая аппроксимация многообразия  $M$  и цикла  $\Gamma$  для системы вида (1). Подобные вопросы с разных точек зрения рассматривались многими авторами [15–19]. Аналитические аппроксимации (не связанные с существованием инерциального многообразия) циклов динамических систем, можно получать [7] с помощью версии метода гармонического баланса [20,21]. При этом, однако, не удаётся ничего сказать об устойчивости циклов.

В данной статье с помощью пакета Maple строятся (итеративно) вещественно-аналитические поверхности  $S_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), всё более точно приближающие инерциальное многообразие  $M$  с ростом числа итераций  $k$ . При этом цикл  $\Gamma$  «всё лучше укладывается» на  $S_k$  при возрастании  $k$ . Основные результаты получены для двух видов управляющих функций: а)  $g(z) = -\operatorname{arctg} z$ , б)  $g(z) = -\frac{z}{1+z^2}$ . Данные

функции удовлетворяют условиям (2) и представляют собой законы управления с обратной связью по переменной  $z$ .

### Итерационное приближение инерциального многообразия

Пусть  $D: \{x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2, z_1 < z < z_2\}$  это минимальный параллелепипед в  $\mathbb{R}^3$ , содержащий цикл  $\Gamma$ . Поставим задачу аналитического приближения локального инерциального многообразия  $M_0 \subset \mathbb{R}^3$ , представляющего собой часть инерциального многообразия  $M$ , лежащую в  $D$ .

Обозначим через  $\bar{F}$  векторное поле системы (1). Для произвольной скалярной вещественно-аналитической функции  $H = H(x, y, z) \neq \text{const}$  в  $\mathbb{R}^3$  положим

$$S(H) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla H(x, y, z) \cdot \bar{F}(x, y, z) = 0\}.$$

Множество  $S(H)$  представляет собой поверхность в  $\mathbb{R}^3$  при условии, что градиент  $\nabla H \neq 0$  на  $S(H)$ . Если при этом некоторая траектория  $\gamma$  системы (1) принадлежит  $S(H)$ , то вектор  $\bar{F}$  лежит в касательной плоскости к поверхности  $S(H)$  для всех точек  $\gamma$ , т.е.  $\nabla H \cdot \bar{F} = 0$  на  $\gamma$ . Введем линейный дифференциальный оператор

$$L: H \rightarrow \nabla H \cdot \bar{F}, \quad (3)$$

где « $\cdot$ » обозначает скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$ . Фактически,

$$(LH)(x(t), y(t), z(t)) = \frac{d}{dt} H(x(t), y(t), z(t))$$

для произвольного решения  $(x(t), y(t), z(t))$  системы (1), т.е.  $LH$  есть производная функции  $H$  в силу (1). Для  $H = H_0$  положим  $H_1 = LH_0$  и, вообще,  $H_k = LH_{k-1}$  для  $k \geq 1$

. Как следует из соотношения (3), множество  $S(H_k)$  с произвольным  $k \geq 1$  содержит стационарные точки системы (1) в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. точки, где векторное поле  $\bar{F}(x, y, z) = 0$ .

Пользуясь компьютерной визуализацией, постараемся подобрать нулевое приближение  $H_0$  таким образом, чтобы предельный цикл  $\Gamma$  “достаточно хорошо укладывался” на  $S(H_0)$  и начнем итерационную процедуру поиска аналитического приближения локального инерциального многообразия.

**На первом шаге** получим функцию  $H_1$ . Применим линейный дифференциальный оператор (3) и найдем  $H_1 = \nabla H_0 \cdot \bar{F}$ . Определим первое приближение локального инерциального многообразия  $M_0$  как поверхность

$$S(H_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y, z) = 0\} \text{ или } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \bar{F} = 0\}.$$

**На втором шаге** находим функцию  $H_2$ . Применим линейный дифференциальный оператор  $L: H_1 \rightarrow \nabla H_1 \cdot \bar{F}$ , т.е.  $H_2 = \nabla H_1 \cdot \bar{F}$ . Из условия  $\nabla H_1 \cdot \bar{F} = 0$  получим неявное задание поверхности  $S(H_2)$  – второе приближение локального инерциального многообразия.

**На третьем шаге** из условия

$$H_3 = LH_2 = \nabla H_2 \cdot \bar{F} = 0$$

получим поверхность  $S(H_3)$  – третье аналитическое приближение локального инерциального многообразия  $M_0$ .

**На  $k$ -ом шаге** находим приближение  $H_k$  и из условия

$$H_k = LH_{k-1} = \nabla H_{k-1} \cdot \bar{F} = 0$$

определяем поверхность  $S(H_k)$ .



Численные эксперименты показывают, что поверхности  $S_k = S(H_k)$  с ростом  $k$  всё более точно приближают локальное инерциальное многообразие  $M_0$ , содержащее устойчивый предельный цикл  $\Gamma$ . Данная итерационная процедура отлична от уже известных (см., например, [15, п.10.3]); её сходимость будет строго обоснована в дальнейших публикациях.

**Вариант 1.** Возьмем в модели (1) управляющую функцию  $g(z) = -\arctg z$ . Согласно [9], двумерное инерциальное многообразие  $M \subset \mathbb{R}^3$  и устойчивый предельный цикл  $\Gamma \subset M$  системы (1) существуют при  $\mu_1 = \mu_2 = 0.05$ ,  $\mu_3 = 2.1$ , т.е. в случае уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\arctg z, \\ \dot{y} = y + x, \\ \dot{z} = z + y. \end{cases}$$

Подберем начальную функцию  $H_0$  таким образом, чтобы предельный цикл  $\Gamma$  были близок к поверхности  $S(H_0)$ . Положим, например,  $H_0(x, y, z) = y - 2z - x$ , т.е. в качестве нулевого приближения инерциального многообразия берем плоскость  $y - 2z - x = 0$ .

**На первом шаге** получим функцию  $H_1$ , применив линейный дифференциальный оператор  $L: H_0 \rightarrow \nabla H_0 \cdot \bar{F}$ :

$$H_1 = \frac{\partial H_0}{\partial x}(-0.05x - \arctg z) + \frac{\partial H_0}{\partial y}(-0.05y + x) + \frac{\partial H_0}{\partial z}(-2.1z + y)$$

Из условия  $H_1 = \nabla H_0 \cdot \bar{F} = 0$  имеем:

$$-1 \cdot (-0.05x - \arctg z) + 1 \cdot (-0.05y + x) - 2 \cdot (-2.1z + y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1.05x + \arctg z - 2.05y + 4.2z = 0.$$

Таким образом, получаем поверхность  $S(H_1)$  в неявной форме. На рис. 1. а) приведена полученная поверхность. Можно заметить, что не все точки предельного цикла принадлежат поверхности  $S(H_1)$ .

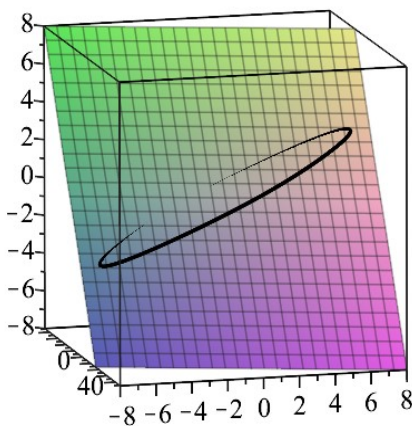
**На втором шаге** находим

$$H_2 = \frac{\partial H_1}{\partial x}(-0.05x - \arctg z) + \frac{\partial H_1}{\partial y}(-0.05y + x) + \frac{\partial H_1}{\partial z}(-2.1z + y)$$

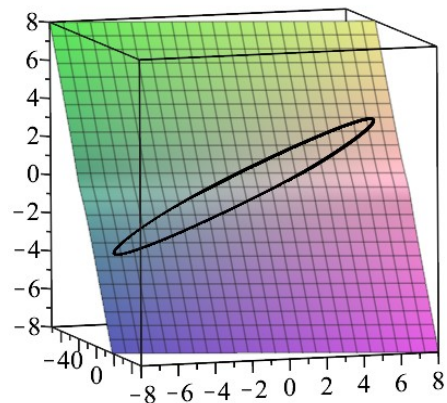
и поверхность  $S(H_2)$  из условия  $H_2 = \nabla H_1 \cdot \bar{F} = 0$ :

$$-2.1025x - 1.05 \arctg z + 4.3025y + (y - 2.1z) / (z^2 + 1) - 8.82z = 0.$$

На рис. 1. б) видно хорошее совпадение точек предельного цикла и поверхности  $S(H_2)$ .



а)



б)

Рисунок 1. а) первая итерация: поверхность  $S(H_1)$  и предельный цикл;

б) вторая итерация: поверхность  $S(H_2)$  и предельный цикл.

**На третьем шаге** находим  $H_3 = \nabla H_2 \cdot \bar{F}$ , а из условия  $H_3 = \nabla H_2 \cdot \bar{F} = 0$

получаем поверхность  $S(H_3)$ :

$$4.407x - 9.035y + 18.52z + \frac{x - 3.2y + 6.615z}{z^2 + 1} + \frac{8.4yz^2 - 8.82z^3 - 2zy^2}{(z^2 + 1)^2} + 2.1025 \operatorname{arctg} z = 0$$

Рис. 2. а) демонстрирует очень хорошее совпадение точек предельного цикла и поверхности  $S(H_3)$ .

На четвертом шаге аналогично получаем (аналитическое выражение не приводится в силу его сложности) поверхность  $S(H_4)$ . Рис. 2.б) также демонстрирует хорошее совпадение точек предельного цикла и данной поверхности.

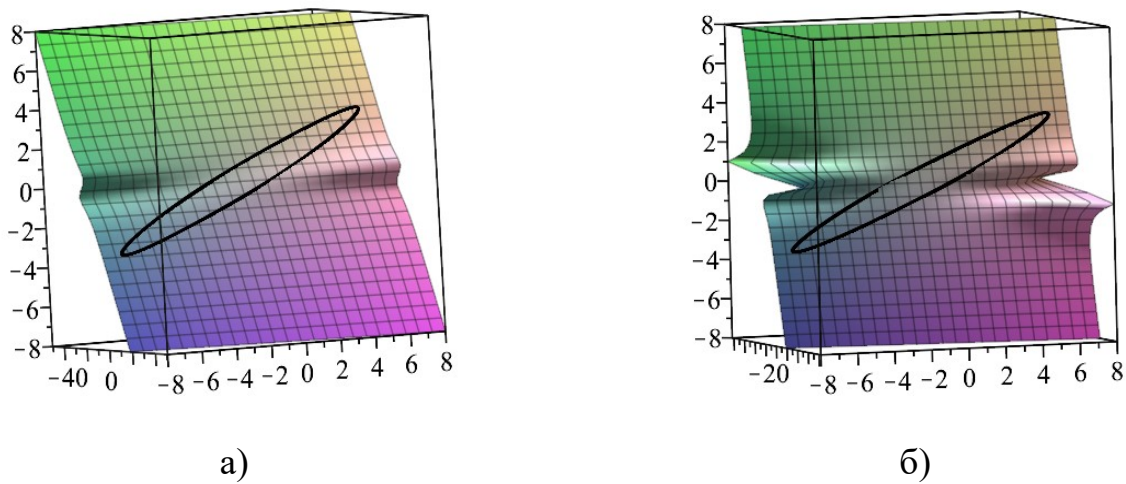


Рисунок 2. Положение устойчивого при  $t \rightarrow \infty$  предельного цикла на поверхностях: а)  $S(H_3)$ ; б)  $S(H_4)$ .

Таким образом, для модели движения спутника с управляющей функцией  $g(z) = -\operatorname{arctg} z$ , получаем аналитические приближения локального инерциального многообразия  $M_0$  и содержащегося в нем устойчивого предельного цикла  $\Gamma$ .

**Вариант 2.** Возьмем в модели (1) управляющую функцию  $g(z) = -z(1+z^2)^{-1}$ . Согласно [8], двумерное инерциальное многообразие  $M \subset \mathbb{R}^3$  и устойчивый предельный цикл  $\Gamma \subset M$  системы (1) существуют при  $\mu_1 = \mu_2 = 0.05, \mu_3 = 2.1$ , т.е. система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 5x - z(1+z^2)^{-1}, \\ \dot{y} &= y + x, \\ \dot{z} &= z + y. \end{cases}$$

Выберем нулевое приближение в виде  $H_0(x, y, z) = 5y - 10z - x$ , так как положение устойчивого предельного цикла близко к плоскости  $5y - 10z - x = 0$ .

**На первом шаге** находим  $H_1 = \nabla H_0 \cdot \bar{F}$ , где  $\bar{F}(x, y, z)$  векторное поле системы:

$$H_1 = \frac{\partial H_0}{\partial x} \left( -0.05x - \frac{z}{z^2 + 1} \right) + \frac{\partial H_0}{\partial y} (-0.05y + x) + \frac{\partial H_0}{\partial z} (-2.1z + y).$$

Из условия

$$\nabla H_0 \cdot \bar{F} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot \left( -0.05x - \frac{z}{z^2 + 1} \right) + 5 \cdot (-0.05y + x) - 10 \cdot (-2.1z + y) = 0$$

получаем соответствующую поверхность  $S(H_1)$ :

$$5.05x - 10.25y + 21.0z + \frac{z}{z^2 + 1} = 0.$$

На рис. 3.а) показаны полученная поверхность и траектория, наматывающаяся на предельный цикл. Заметим, что не все точки предельного цикла принадлежат данной поверхности.

**На втором шаге** находим

$$H_2 = \frac{\partial H_1}{\partial x} \left( -0.05x - \frac{z}{z^2 + 1} \right) + \frac{\partial H_1}{\partial y} (-0.05y + x) + \frac{\partial H_1}{\partial z} (-2.1z + y)$$

и поверхность  $S(H_2)$  из условия  $H_2 = \nabla H_1 \cdot \bar{F} = 0$ :

$$9.045y - 4.434x - 18.54z + \frac{y - 4.423z}{z^2 + 1} = 0.$$

Рис. 3. б) демонстрирует хорошее совпадение траектории приближающейся к предельному циклу и самого цикла с поверхностью  $S(H_2)$ .

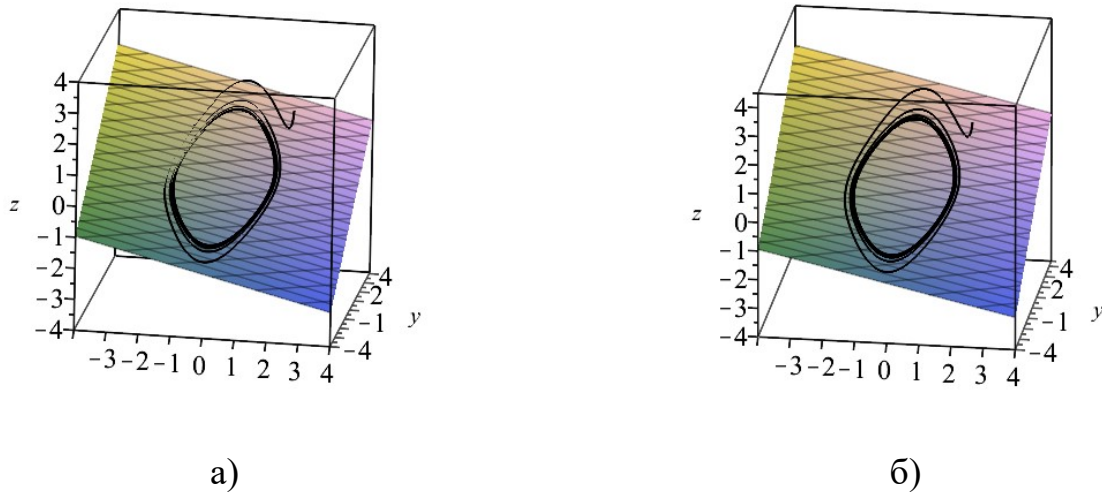


Рисунок 3. Изображение траектории, наматывающейся на предельный цикл, и поверхностей: а)  $S(H_1)$ ; б)  $S(H_2)$ .

**На третьем и четвертом шагах** последовательно находим приближения  $H_k = \nabla H_{k-1} \cdot \bar{F}$ , а из условия  $H_k = \nabla H_{k-1} \cdot \bar{F} = 0$  определяем поверхности  $S(H_3)$  и  $S(H_4)$ , соответственно. Аналитические выражения не приводятся в силу их сложности.

На рис 4. а) и 4. б) изображены поверхности  $S(H_3)$ ,  $S(H_4)$  – аналитические приближения локального инерциального многообразия  $M_0$  для второй модели движения спутника с управляющей функцией  $g(z) = -z(1+z^2)^{-1}$ . Видно, что уже на третьем шаге получена хорошая аналитическая аппроксимация устойчивого предельного цикла  $\Gamma$ .

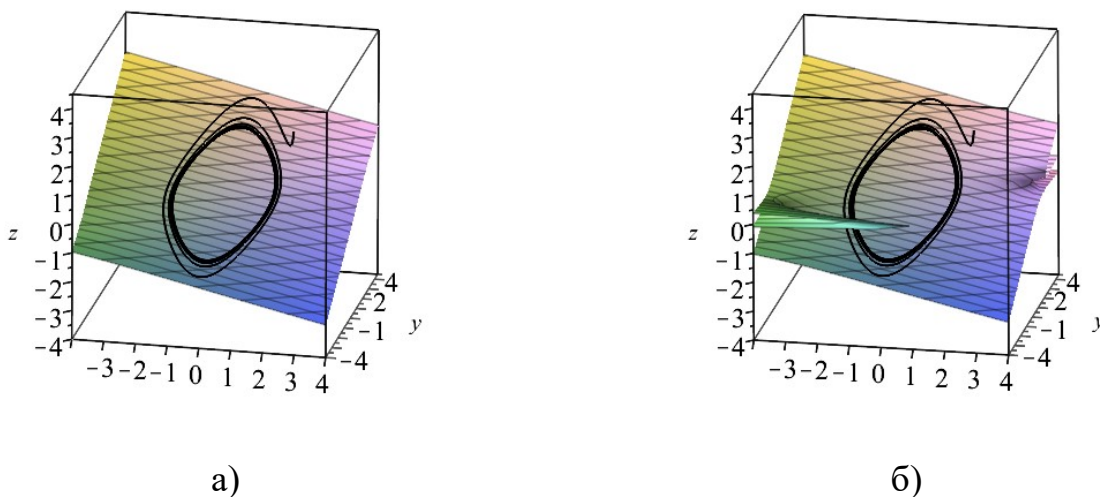


Рисунок 4. Изображение траектории, наматывающейся на предельный цикл, и поверхностей: а)  $S(H_3)$ ; б)  $S(H_4)$ .

В обоих вариантах компьютерная визуализация показывает, что все точки устойчивого предельного цикла принадлежат поверхностям  $S(H_4)$ , соответствующим четвертой итерации.

### Выводы

Описана итеративная процедура аналитического приближения локального инерциального многообразия и содержащегося в нём устойчивого предельного цикла вещественно-аналитическими поверхностями в  $\mathbb{R}^3$ . Основные результаты получены для модели движения спутника (1) при двух вариантах выбора управляющей функции. Для каждого из этих двух вариантов представлены примеры пошагового приближённого вычисления локального инерциального многообразия.

## Список источников

1. Pantelev A., Karane M. Hybrid multi-agent optimization method of interpolation search // AIP Conference Proceedings, 2019, no. 2181 (1), pp. 020028. DOI:[10.1063/1.5135688](https://doi.org/10.1063/1.5135688)
2. Averina T., Rybakov K. Systems with regime switching on manifolds // Proceedings of the 2018 14th International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems» (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), IEEE, 2018, pp. 1-3. DOI:[10.1109/STAB.2018.8408345](https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408345)
3. Бортаковский А.С., Урюпин И.В. Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=118185>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-17](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17)
4. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. – М.: Изд-во МАИ-Принт, 1997. – 264 с.
5. Sidorenko V.V., Celletti A. “Spring-mass” model of tethered satellite systems: properties of planar periodic motions // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2010, no. 107 (1-2), pp. 209-231. DOI:[10.1007/s10569-010-9275-5](https://doi.org/10.1007/s10569-010-9275-5)
6. Галиуллин И.А., Кондратьева Л.А. Спутниковые инерциальные многообразия и предельные циклы // Космонавтика и ракетостроение. 2011. № 3(64). С. 73-76.
7. Кондратьева Л.А. Приближённое аналитическое вычисление устойчивой периодической орбиты спутника // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 19. № 1. С. 75-80.

8. Kondratieva L. Computational model for satellite periodic motion // In 21st International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems, CMMASS-2019, AIP Conference Proceedings 2181 020002, AIP Publishing, 2019. DOI:[10.1063/1.5135662](https://doi.org/10.1063/1.5135662)
9. Kondratieva L.A., Romanov A.V. Inertial manifolds and limit cycles of dynamical systems in  $R^n$  // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2019, no. 96, pp. 1-11.
10. Хрусталёв М.М., Халина А.С. Идентификаторы пониженной размерности в задаче стабилизации беспилотного летательного аппарата в неспокойной атмосфере // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99065>
11. Казмерчук П.В., Вернигора Л.В. Метод линеаризации в задачах перелета космических аппаратов с электроракетной двигательной установкой на геостационарную орбиту // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=119924>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-09](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-09)
12. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Применение гибридного мультиагентного метода интерполяционного поиска в задаче о стабилизации спутника // Труды МАИ. 2021. № 117. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=156249>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-10](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-10)
13. Abouelmagd E.I., Doshi M.J., Pathak N.M. Evolution of Periodic Orbits within the Frame of Formation Satellites // Advances in Astronomy, 2020, vol. 3, pp. 1-17. DOI: [10.1155/2020/1348319](https://doi.org/10.1155/2020/1348319)
14. Pal A.K., Abouelmagd E.I., García Guirao J.L., Brzezinski D.W. Periodic Solutions of Nonlinear Relative Motion Satellites // Symmetry, 2021, no. 13(595), pp. 1-20. DOI: [10.3390/sym13040595](https://doi.org/10.3390/sym13040595)



15. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics (Second ed.). Springer, New York, 1997, 648 p.
16. Ito K., Kunisch K. Reduced-order optimal control based on approximate inertial manifolds for nonlinear dynamical systems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, no. 46 (6), pp. 2867-2891. DOI:[10.1016/j.laa.2004.10.019](https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.10.019)
17. Zhang J.-Z., Liu Y., Feng P.-H. Approximate inertial manifolds of Burgers equation approached by nonlinear Galerkin's procedure and its application // *Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, no. 16 (12), pp. 4666-4670. DOI:[10.1016/j.cnsns.2011.03.004](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.03.004)
18. Debussche A., Temam R. Convergent families of approximate inertial manifolds // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1994, no. 73, pp. 485-522.
19. Lisha Xu, Hua Deng, Chong Lin, Yi Zhang. Approximate Inertial Manifold-Based Model Reduction and Vibration Suppression for Rigid-Flexible Mechanical Arms // *Complexity*, 2021, pp. 1–17. URL: DOI: [10.1155/2021/8290978](https://doi.org/10.1155/2021/8290978)
20. Poland D. Loci of limit cycles // *Physical Review E*, 1994. no. 49 (1), pp.157-165. DOI:[10.1103/PHYSREVE.49.157](https://doi.org/10.1103/PHYSREVE.49.157)
21. Delamotte B. Nonperturbative (but approximate) method for solving differential equations and finding limit cycles // *Physical Review Letters*, 1993, no.70 (22), pp. 3361-3364. DOI:[10.1103/PHYSREVLETT.70.3361](https://doi.org/10.1103/PHYSREVLETT.70.3361)

## References

1. Pantelev A., Karane M. Hybrid multi-agent optimization method of interpolation search, *AIP Conference Proceedings*, 2019, no. 2181 (1), pp. 020028. DOI:[10.1063/1.5135688](https://doi.org/10.1063/1.5135688)

2. Averina T., Rybakov K. Systems with regime switching on manifolds // Proceedings of the 2018 14th International Conference «Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems» (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), IEEE, 2018, pp. 1-3. DOI:[10.1109/STAB.2018.8408345](https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408345)
3. Bortakovskii A.S., Uryupin I.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118185>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-17](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17)
4. Semenov V.V., Panteleev A.V., Bortakovskii A.S. *Matematicheskaya teoriya upravleniya v primerakh i zadachakh* (Mathematical theory of control in examples and problems), Moscow, Izd-vo MAI-Print, 1997, 264 p.
5. Sidorenko V.V., Celletti A. “Spring-mass” model of tethered satellite systems: properties of planar periodic motions, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2010, no. 107 (1-2), pp. 209-231. DOI:[10.1007/s10569-010-9275-5](https://doi.org/10.1007/s10569-010-9275-5)
6. Galiullin I.A., Kondrat'eva L.A. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2011, no. 3 (64), pp. 73-76.
7. Kondrat'eva L.A. *Aerospace MAI Journal*, 2012, vol. 19, no. 1, pp. 75-80.
8. Kondratieva L. Computational model for satellite periodic motion, *In 21st International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems, CMMASS-2019*, AIP Conference Proceedings 2181 020002, AIP Publishing, 2019. DOI:[10.1063/1.5135662](https://doi.org/10.1063/1.5135662)
9. Kondratieva L.A., Romanov A.V. Inertial manifolds and limit cycles of dynamical systems in  $\mathbb{R}^n$ , *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2019, no. 96, pp. 1-11.

10. Khrustalev M.M., Khalina A.S. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=99065>
11. Kazmerchuk P.V., Vernigora L.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119924>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-09](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-09)
12. Panteleev A.V., Karane M.M.S. *Trudy MAI*, 2021, no. 117. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=156249>. DOI: [10.34759/trd-2021-117-10](https://doi.org/10.34759/trd-2021-117-10)
13. Abouelmagd E.I., Doshi M.J., Pathak N.M. Evolution of Periodic Orbits within the Frame of Formation Satellites, *Advances in Astronomy*, 2020, vol. 3, pp. 1-17. DOI: [10.1155/2020/1348319](https://doi.org/10.1155/2020/1348319)
14. Pal A.K., Abouelmagd E.I., García Guirao J.L., Brzezinski D.W. Periodic Solutions of Nonlinear Relative Motion Satellites, *Symmetry*, 2021, no. 13 (595), pp. 1-20. DOI: [10.3390/sym13040595](https://doi.org/10.3390/sym13040595)
15. Temam R. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics* (Second ed.). Springer, New York, 1997, 648 p.
16. Ito K., Kunisch K. Reduced-order optimal control based on approximate inertial manifolds for nonlinear dynamical systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, no. 46 (6), pp. 2867-2891. DOI: [10.1016/j.laa.2004.10.019](https://doi.org/10.1016/j.laa.2004.10.019)
17. Zhang J.-Z., Liu Y., Feng P.-H. Approximate inertial manifolds of Burgers equation approached by nonlinear Galerkin's procedure and its application, *Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, no. 16 (12), pp. 4666-4670. DOI: [10.1016/j.cnsns.2011.03.004](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.03.004)
18. Debussche A., Temam R. Convergent families of approximate inertial manifolds, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1994, no. 73, pp. 485-522.

19. Lisha Xu, Hua Deng, Chong Lin, Yi Zhang. Approximate Inertial Manifold-Based Model Reduction and Vibration Suppression for Rigid-Flexible Mechanical Arms, *Complexity*, 2021, pp. 1–17. URL: DOI: [10.1155/2021/8290978](https://doi.org/10.1155/2021/8290978)
20. Poland D. Loci of limit cycles, *Physical Review E*, 1994. no. 49 (1), pp.157-165. DOI:[10.1103/PHYSREVE.49.157](https://doi.org/10.1103/PHYSREVE.49.157)
21. Delamotte B. Nonperturbative (but approximate) method for solving differential equations and finding limit cycles, *Physical Review Letters*, 1993, no.70 (22), pp. 3361-3364. DOI:[10.1103/PHYSREVLETT.70.3361](https://doi.org/10.1103/PHYSREVLETT.70.3361)

Статья поступила в редакцию 01.01.2022; одобрена после рецензирования 20.01.2022; принята к публикации 20.04.2022

The article was submitted on 01.01.2022; approved after reviewing on 20.01.2022; accepted for publication on 20.04.2022.