УДК 532.517.2:539.3

Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости

Грушенкова Е.Д.*, Могилевич Л.И., Попов В.С.***, Попова А.А.******

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., ул. Политехническая, 77, Саратов, 410054, Россия

*e-mail: katenok.09041992@gmail.com

**e-mail: mogilevich@sgu.ru

***e-mail: vic_p@bk.ru

****e-mail: anay_p@bk.ru

Статья поступила 13.03.2019

Аннотация

Исследовано взаимодействие трехслойной пластины с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости. Движение жидкости в слое изучается как ламинарное течение в узком канале с параллельными стенками, одна из которых образована трехслойной пластиной, а вторая считается абсолютно жесткой. На границах контакта с жидкостью выполняются условия прилипания. Несущие слои пластины удовлетворяют гипотезам Кирхгофа и учитывается обжатие жесткого заполнителя. Поставлена и аналитически решена задача о продольных и изгибных гидроупругих колебаниях трехслойной пластины. Решение получено для режима установившихся гармонических колебаний с учетом нормальных и касательных напряжений, действующих со стороны жидкости на несущий слой пластины, находящейся в контакте с жидкостью. Определены гидродинамические параметры слоя жидкости, перемещения слоев пластины. Построены частотозависимые функции распределения амплитуд перемещений слоев пластины и давления в слое вязкой жидкости.

Ключевые слова: гидроупругость, колебания, трехслойная пластина, сжимаемый заполнитель, вязкая жидкость, пульсация давления.

Введение

Исследования колебаний упругих конструкций, взаимодействующих с жидкостью, имеют большое значение, как для развития современной механики, так и для различных инженерных приложений в авиакосмической области. В большинстве случаев изучение данной проблемы сводится к постановке и решению задачи гидроупругости, в рамках которой совместно рассматриваются уравнения динамики упругой конструкции и жидкости с соответствующими начальными и граничными условиями. Одной из первых работ по исследованию колебаний пластины, контактирующей с жидкостью, можно считать [1], в которой рассмотрена круглая пластина, закрывающая отверстие в абсолютно жесткой стенке, с одной стороны которой находится идеальная несжимаемая жидкость. В работе, используя энергетический метод Рэлея, определены собственные частоты колебаний пластины. С другой стороны, в [2] данное исследование проведено на базе рассмотрения задачи гидроупругости. Колебания круглой пластины на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей жесткий цилиндр изучено в [3]. Аналогичная задача в случае погружения пластины под свободную поверхность рассмотрена в [4]. Собственные колебания пластины, плавающей на свободной поверхности идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, исследованы в [5]. В [6] решена плоская задача изгибных колебаний и устойчивости пластины, являющейся частью абсолютно жесткой стенки проточного канала с идеальной сжимаемой жидкостью, а в [7] рассмотрена задача собственных гидроупругих колебаний и устойчивости прямоугольной пластины, являющейся стенкой канала заполненного идеальной сжимаемой жидкостью. Хаотические колебания пластины, взаимодействующей с обеих сторон с потоком идеальной несжимаемой жидкости, изучены в [8]. Работа [9] посвящена моделированию изгибных колебаний прямоугольной пластины, погруженной в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью. Задача о распространение акустической волны в идеальной несжимаемой жидкости, вызванной вынужденными колебаниями пластины, контактирующей с ней, рассмотрена в [10]. В [11] исследованы свободные изгибные колебания консольных пластин, частично погруженных в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью. В [12] рассмотрены вопросы определения ширины зоны контакта между твердыми поверхностями и тонкостенным каналом охлаждения, имеющим плоскоовальное сечение, при его гидроупругом деформировании под действие внутреннего статического давления охлаждающей жидкости.

С другой стороны, являются актуальными работы по исследованию колебаний упругих элементов конструкций, взаимодействующих с вязкой жидкостью, т.к. вязкость определяет демпфирующие свойства в колебательной системе упругое тело-жидкость. Например, в [13] решение задачи о собственных частотах колебаний пластины из [1] рассмотрено для вязкой жидкости. В [14] исследованы колебания бесконечной пластинки-полоски, взаимодействующей со слоем вязкой жидкости. Задача о гидроупругих колебаниях консольнозакрепленной балки-полоски, погруженной в неограниченный объем вязкой жидкости решена в [15]. Поперечные колебания дисков, взаимодействующих со слоем вязкой несжимаемой жидкости между ними, изучены в [16], а в [17] выполнено аналогичное исследование для двух параллельных стенок, образующих узкий канал конечных размеров. Гидроупругие колебания пластин, опирающихся на упругие основания различных типов, изучены в [18,19].

Трехслойные элементы конструкций в виде балок и пластин широко применяются в авиационной и космической технике. Подходы к изучению их статики и динамики достаточно хорошо разработаны [20, 21] Исследования гидроупругих колебаний трехслойных балок и пластин мало отражены в современной научной литературе. Можно указать работы [22-24], в которых рассмотрены вынужденные колебаний трехслойных балок и пластин с несжимаемым заполнителем, контактирующих со слоем вязкой жидкости. Однако, за рамками указанных работ остались вопросы изучения гидроупругих колебаний пластин со сжимаемым заполнителем.

Постановка задачи гидроупругости

Рассмотрим трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, образующую стенку узкого канала (см. рис. 1). Пластина свободно оперта на торцах, толщины ее внешних несущих слоев 1 и 2 есть h_1 и h_2, толщина заполнителя 3 – $2c$. Центр декартовой системы координат xyz свяжем с центром срединной плоскости заполнителя пластины. Вторая стенка канала абсолютно жесткая. Размер стенок канала в плане $2\ell\times b$, далее полагаем $b >> 2\ell$ и рассматриваем плоскую задачу. Расстояние h_0 между стенками канала значительно меньше их длины $2\ell >> h_0$. Канал заполнен вязкой несжимаемой жидкостью, давление в которой пульсирует за счет заданного гармонического закона пульсации давления на торцах. Упругие перемещения пластины значительно меньше h_0. Далее, изучая гидроупругие колебания пластины, опустим влияние начальных условий, т.е. ограничимся рассмотрением установившихся вынужденных колебаний, т.к. вязкость жидкости обуславливает быстрое затухание переходных процессов [25].

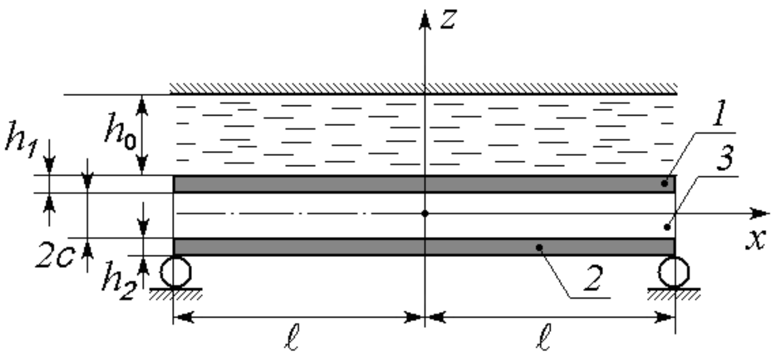

Рис.1. Плоский канал, нижняя стенка которого образована трехслойной пластиной.

Динамика вязкой жидкости в плоском канале описывается системой уравнений Навье-Стокса и неразрывности [26], представленной в безразмерных переменных в виде

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial U_\xi}{\partial\tau}+\lambda\left(U_\xi\frac{\partial U_\xi}{\partial\xi}+U_\zeta\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right)\right]=-\frac{\partial P}{\partial\xi}+\psi^2\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\zeta^2}, \quad (1)$$

$$\psi^2 \operatorname{Re}\left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau}+\lambda\left(U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi}+U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta}\right)\right]=-\frac{\partial P}{\partial \zeta}+\psi^2\left[\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2}\right],$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi}+\frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta}=0.$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\psi=\frac{h_0}{\ell}<<1,\ \lambda=\frac{w_{m1}}{h_0},\ \tau=\omega t,\ \xi=\frac{x}{\ell},\ \zeta=\frac{z-c-h_1}{h_0},\ u_x=w_{m1}\,\omega\frac{\ell}{h_0}U_\xi,\ u_z=w_{m1}\,\omega U_\zeta,$$

$$\operatorname{Re}=\frac{h_0^2\,\omega}{\nu},\ p=p_0+p^*(\tau)+\frac{\rho\nu w_{m1}\omega}{h_0\psi^2}P,$$

где u_x, u_z - проекции вектора скорости жидкости на оси координат; p - давление; p_0 - уровень отсчета давления; $p^*(\tau)=p_m^*\sin(\omega t)$ - заданный закон пульсации давления на торцах канала; w_{m1} - амплитуда прогиба несущего слоя 1, контактирующего с вязкой жидкостью; ρ, ν - плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости; ψ, λ, Re - параметры, характеризующие задачу.

Краевые условия системы (1) учитывают, что скорость жидкости совпадает со скоростями ограничивающих ее стенок:

$$U_\xi=0,\ U_\zeta=0 \text{ при } \zeta=1, \tag{2}$$

$$U_\xi=\psi\frac{u_{m1}}{w_{m1}}\frac{\partial U_1}{\partial \tau},\ U_\zeta=\frac{\partial W_1}{\partial \tau} \text{ при } \zeta=\lambda W_1.$$

В условиях (2) упругие перемещения срединной плоскости верхнего несущего слоя пластины, контактирующего с жидкостью, в направлении осей Ox и Oz представлены в форме $u_1=u_{m1}U_1(\xi,\tau), w_1=w_{m1}W_1(\xi,\tau)$.

Условие для давления на торцах канала имеют вид

$$P=0 \text{ при } \xi=\pm 1. \tag{3}$$

Трехслойная пластина представляет собой сэндвич-пакет, состоящий из двух внешних несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. Для описания кинематики пакета воспользуемся подходом, предложенным в [20], в рамках которого полагается, что несущие слои изотропны, несжимаемы в поперечном направлении и удовлетворяют гипотезам Кирхгофа, заполнитель считается жестким, перемещения его точек линейно зависят от поперечной координаты z, а также учитывается его обжатие. Деформации полагаются малыми, а на границах слоев выполняются условия непрерывности их перемещений. Для рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем уравнения динамики имеют вид [20]

$$\begin{gathered}
F_1+a_1 u_1-a_1 u_2-a_4\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-a_5\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial w_1}{\partial x}+a_3\frac{\partial w_2}{\partial x}-2a_6\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}+a_7\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}=P_{zx},\\
F_2-a_1 u_1+a_1 u_2-a_5\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-a_9\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-a_3\frac{\partial w_1}{\partial x}-a_2\frac{\partial w_2}{\partial x}-a_6\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}+2a_7\frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}=0,\\
F_3-a_{17}\frac{\partial u_1}{\partial x}+a_{10}\frac{\partial u_2}{\partial x}+2a_6\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}+a_6\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}+a_{11}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}-a_{12}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+\\
+a_{15}\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}-2a_{16}\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}+a_8 w_1-a_8 w_2=P_{zz}+\frac{1}{2}h_1\frac{\partial P_{zx}}{\partial x},\\
F_4-a_{18}\frac{\partial u_1}{\partial x}+a_{19}\frac{\partial u_2}{\partial x}-a_7\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}-2a_7\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}-a_{12}\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+a_{14}\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}-\\
-a_{16}\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}+a_{13}\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4}-a_8 w_1+a_8 w_2=0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь P_{zz}, P_{zx} - нормальные и касательное напряжение, действующие на верхний несущий слой пластины со стороны жидкости, данные напряжения запишутся как

$$P_{zx}=-\frac{\rho\nu z_m\omega}{h_0\psi}\left(\psi^2\frac{\partial U_\zeta}{\partial\xi}+\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right)\ \text{при}\quad \zeta=\lambda\frac{w_{m1}}{z_m}W_1,$$

$$P_{zz}=-p_0-p^*-\frac{\rho\nu z_m\omega}{h_0\psi^2}\left(P-2\psi^2\frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta}\right)\ \text{при}\ \ \zeta=\lambda\frac{w_{m1}}{z_m}W_1,$$

где ρ_k – плотность материала k-го слоя; G_k, K_k - модули сдвиговой и объемной деформации; $K_k^+=K_k+\frac{4}{3}G_k$, $K_k^-=K_k-\frac{4}{3}G_k$.. При этом введены обозначения

$$a_1=\frac{2G_3}{c};\ a_2=2G_3\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)-\frac{K_3^-}{2};\ a_3=2G_3\left(1+\frac{h_2}{2c}\right)+\frac{K_3^-}{2};$$

$$a_4=K_1^+h_1+\frac{2K_3^+c}{3};\ a_5=\frac{K_3^+c}{3};\ a_6=\frac{K_3^+ch_1}{6};\ a_7=\frac{K_3^+ch_2}{6};$$

$$a_8=\frac{K_3^+}{2c};\ a_9=K_2^+h_2+\frac{2K_3^+c}{3};\ a_{10}=\frac{G_3}{2}\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)+\frac{K_3^-}{2};$$

$$a_{11}=\frac{K_3^-h_1}{2}-\frac{G_3c}{2}\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)^2-\frac{G_3c}{6};\ a_{12}=\frac{K_3^-(h_1+h_2)}{4}+\frac{G_3c}{2}\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)\left(1+\frac{h_2}{2c}\right)-\frac{G_3c}{6};$$

$$a_{13}=\frac{K_2^+h_2^3}{12}+\frac{K_3^+ch_2^2}{6};\ a_{14}=\frac{K_3^-h_2}{2}-\frac{G_3c}{2}\left(1+\frac{h_2}{2c}\right)^2-\frac{G_3c}{6};\ a_{15}=\frac{K_1^+h_1^3}{12}+\frac{K_3^+ch_1^2}{6};$$

$$a_{16}=\frac{K_3^+ch_2h_1}{12};\ a_{17}=\frac{G_3}{2}\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)-\frac{K_3^-}{2};\ a_{18}=\frac{G_3}{2}\left(1+\frac{h_2}{2c}\right)+\frac{K_3^-}{2};a_{19}=\frac{G_3}{2}\left(1+\frac{h_2}{2c}\right)-\frac{K_3^-}{2};$$

Инерционные члены определяются соотношениями [20]

$$F_1=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(m_1u_1+m_8u_2+2m_5\frac{\partial w_1}{\partial x}-m_7\frac{\partial w_2}{\partial x}\right),$$

$$F_2=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(m_8u_1+m_2u_2+m_5\frac{\partial w_1}{\partial x}-2m_7\frac{\partial w_2}{\partial x}\right), \tag{5}$$

$$F_3=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-2m_5\frac{\partial u_1}{\partial x}-m_5\frac{\partial u_2}{\partial x}+m_1w_1+m_8w_2-m_3\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+m_6\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right),$$

$$F_4=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(m_7\frac{\partial u_1}{\partial x}+2m_7\frac{\partial u_2}{\partial x}+m_8w_1+m_2w_2+m_6\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}-m_4\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right),$$

где $m_1 = \rho_1 h_1 + \dfrac{2}{3}\rho_3 c$; $m_2 = \rho_2 h_2 + \dfrac{2}{3}\rho_3 c$; $m_3 = \dfrac{\rho_1 h_1^3}{12} + \dfrac{\rho_3 c h_1^2}{6}$; $m_4 = \dfrac{\rho_2 h_2^3}{12} + \dfrac{\rho_3 c h_2^2}{6}$;

$m_5 = \dfrac{\rho_3 c h_1}{6}$; $m_6 = \dfrac{\rho_3 c h_1 h_2}{12}$; $m_7 = \dfrac{\rho_3 c h_2}{6}$; $m_8 = \dfrac{\rho_3 c}{3}$.

Краевые условия уравнений (4) запишутся как

$$w_k = \frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = \pm\ell,\ (k=1,\ 2). \qquad (6)$$

Решение задачи гидроупругих колебаний трехслойной пластины

В рассматриваемой постановке относительная толщина слоя жидкости $\psi<<1$, и относительная амплитуда прогиба несущего слоя пластины, контактирующего с жидкостью, $\lambda<<1$, следовательно, в нулевом приближении по ψ и λ уравнения динамики жидкости (1) и граничные условия (2), (3) упрощаются [27] и принимают вид

$$\mathrm{Re}\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0,\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \qquad (7)$$

$$U_\xi = 0,\ U_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 1,\ U_\xi = 0, \qquad (8)$$

$$U_\zeta = \frac{\partial W_1}{\partial \tau} \text{ при } \zeta = 0,$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1.$$

а напряжения слоя жидкости на первом несущем слое пластины запушиться как

$$P_{zx} = -\rho\nu w_{m1}\omega(h_0\psi)^{-1}\partial U_\xi/\partial\zeta\big|_{\zeta=0}, \qquad (9)$$

$$P_{zz} = -p_0 - p^* - \rho\nu w_{m1}\omega(h_0\psi^2)^{-1}P\big|_{\zeta=0}.$$

Из решения задачи динамики жидкости (7), (8) нашли, что

$$P=\int_{\xi}^{1}\int_{0}^{\xi}\left(2\varepsilon^2\alpha\frac{\partial^2 W_1}{\partial\tau^2}+12\gamma\frac{\partial W_1}{\partial\tau}\right)d\xi d\xi+\frac{1}{2}(\xi-1)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\xi}\left(2\varepsilon^2\alpha\frac{\partial^2 W_1}{\partial\tau^2}+12\gamma\frac{\partial W_1}{\partial\tau}\right)d\xi d\xi\,, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=\frac{1}{2}\int_0^{\xi}\left(2\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{\partial^2 W_1}{\partial\tau^2}+12\gamma\frac{\partial W_1}{\partial\tau}\right)d\xi-\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left(2\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{\partial^2 W_1}{\partial\tau^2}+12\gamma\frac{\partial W_1}{\partial\tau}\right)d\xi\,,$$

$$\left.\frac{h_1}{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right)\right|_{\zeta=0}=\frac{1}{2}\frac{h_1}{\ell}\left(2\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{\partial^2 W_1}{\partial\tau^2}+12\gamma\frac{\partial W_1}{\partial\tau}\right),$$

где введены обозначения [16]

$$\varepsilon(\omega)=\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{2}}\,,\ \gamma(\omega)=\frac{1}{6}\frac{\varepsilon^3(\mathrm{sh}\varepsilon-\sin\varepsilon)}{\varepsilon^2(\mathrm{ch}\varepsilon+\cos\varepsilon)-2\varepsilon(\mathrm{sh}\varepsilon+\sin\varepsilon)+2(\mathrm{ch}\varepsilon-\cos\varepsilon)}\,,$$

$$\alpha(\omega)=\frac{\varepsilon(\varepsilon(\mathrm{ch}\varepsilon+\cos\varepsilon)-(\mathrm{sh}\varepsilon+\sin\varepsilon))}{\varepsilon^2(\mathrm{ch}\varepsilon+\cos\varepsilon)-2\varepsilon(\mathrm{sh}\varepsilon+\sin\varepsilon)+2(\mathrm{ch}\varepsilon-\cos\varepsilon)}\,.$$

Учитывая краевые условия (6), решение уравнений (4) представим в виде

$$u_k=\sum_{n=0}^{\infty}T_k^n(\omega t)\sin\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x}{\ell},\ w_k=\sum_{n=0}^{\infty}R_k^n(\omega t)\cos\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x}{\ell}, \tag{11}$$

где $k=1$ и $k=2$ для верхнего и нижнего несущего слоя трехслойной пластины, соответственно.

Тогда, учитывая (11) в (9) и разложив входящие в P_{zz} слагаемые p_0 и $p^*(t)$ в ряды по $\cos\frac{2n+1}{2}\pi\xi$, получим

$$P_{zz}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}(p_0+p^*(t))-\frac{\rho\nu\omega}{h_0\psi^2}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]^2\left(\frac{2\varepsilon^2\alpha}{\omega^2}\frac{d^2R_1^n}{dt^2}+\frac{12\gamma}{\omega}\frac{dR_1^n}{dt}\right)\right\rangle\cos\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x}{\ell}\,,$$

$$P_{zx}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho\nu\omega}{h_0\psi}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi}\right]\frac{1}{2}\left(\frac{2\varepsilon^2(\alpha-1)}{\omega^2}\frac{d^2R_1^n}{dt^2}+\frac{12\gamma}{\omega}\frac{dR_1^n}{dt}\right)\sin\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x}{\ell}\,, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}h_1\frac{\partial P_{zx}}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{h_0}{\ell}\frac{h_1}{\ell}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho\nu\omega}{h_0\psi^2}\frac{1}{2}\left(\frac{2\varepsilon^2(\alpha-1)}{\omega^2}\frac{d^2R_1^n}{dt^2}+\frac{12\gamma}{\omega}\frac{dR_1^n}{dt}\right)\cos\frac{2n+1}{2}\pi\frac{x}{\ell}\,.$$

Из представленных выражений (12) следует, что $\frac{1}{2} h_1 \frac{\partial P_{zx}}{\partial x} \Big/ P_{zz} = O\left(h_0 h_1 / \ell^2\right) = O\left(\psi^2\right)$ и слагаемым $\frac{1}{2} h_1 \frac{\partial P_{zx}}{\partial x}$ в (4) можно пренебречь по сравнению со слагаемым P_{zz}. С учетом данного замечания, подставляя (11), (12) в (4), а затем, в полученной системе уравнений, используя ее однородные уравнения, выражая T_2^n, R_2^n через T_1^n и R_1^n, и учитывая, что $\frac{d^2 R_1^n}{dt^2} = -\omega^2 R_1^n$ получим систему

$$b_{11}^* T_1^n + b_{13}^* R_1^n = -2K_n^1 \frac{dR_1^n}{dt}, \tag{13}$$

$$b_{31}^* T_1^n + b_{33}^* R_1^n = -2K_n \frac{d R_1^n}{d t} + \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \left[p_0 + p^*(t)\right].$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\Delta = b_{22} b_{44} - b_{24} b_{42}, \; b_{11}^* = b_{11} + b_{12} (b_{24} b_{41} - b_{44} b_{21}) / \Delta + b_{14} (b_{42} b_{21} - b_{22} b_{41}) / \Delta,$$

$$b_{13}^* = b_{12} (b_{24} b_{43} - b_{44} b_{23}) / \Delta + b_{13} + b_{14} (b_{42} b_{23} - b_{22} b_{43}) / \Delta,$$

$$b_{31}^* = b_{31} + b_{32} (b_{24} b_{41} - b_{44} b_{21}) / \Delta + b_{34} (b_{42} b_{21} - b_{22} b_{41}) / \Delta,$$

$$b_{33}^* = b_{32} (b_{24} b_{43} - b_{44} b_{23}) / \Delta + b_{33} + b_{34} (b_{42} b_{23} - b_{22} b_{43}) / \Delta,$$

$$M_n = \frac{\rho \nu \omega}{h_0 \psi^2} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right]^2 \frac{2\varepsilon^2 \alpha}{\omega^2}, \; 2K_n = \frac{12 \gamma \omega}{2 \varepsilon^2 \alpha} M_n, \; M_n^1 = \frac{\rho \nu \omega}{h_0 \psi} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right] \frac{1}{2} \frac{2\varepsilon^2 (\alpha - 1)}{\omega^2}$$

$$2K_n^1 = \frac{\rho \nu \omega}{h_0 \psi} \left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \right] \frac{1}{2} \frac{12\gamma}{\omega} = \frac{12 \gamma \omega}{2\varepsilon^2 (\alpha - 1)} M_n^1, \; b_{11} = a_1 + a_4 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_1 \omega^2,$$

$$b_{12} = -a_1 + a_5 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 - m_8 \omega^2,$$

$$b_{13} = \frac{2n+1}{2\ell} \pi \left[-a_2 - 2a_6 \left(\frac{2n+1}{2\ell} \pi \right)^2 + \left[\frac{2n+1}{2\ell} \pi 2m_5 - M_n^1 \right] \omega^2 \right],$$

$$b_{14}=\frac{2n+1}{2\ell}\pi\left[-a_3+a_7\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2-m_7\,\omega^2\right],\; b_{21}=-a_1+a_5\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2-m_8\omega^2,$$

$$b_{22}=a_1+a_9\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2-m_2\omega^2,\; b_{23}=\frac{2n+1}{2\ell}\pi\left[a_3-a_6\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2+m_5\omega^2\right],$$

$$b_{24}=\frac{2n+1}{2\ell}\pi\left[a_2+2a_7\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2-2m_7\omega^2\right],\; b_{31}=\frac{2n+1}{2\ell}\pi\left[a_{17}-2a_6\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2+2m_5\,\omega^2\right],$$

$$b_{32}=\frac{2n+1}{2\ell}\pi\left[a_{10}-a_6\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2+m_5\,\omega^2\right],$$

$$b_{33}=a_8-a_{11}\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2+a_{15}\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^4-\left[m_1+m_3\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2+M_n\right]\omega^2,$$

$$b_{34}=-a_8+a_{12}\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2-a_{16}\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2-\left[m_8-m_6\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2\right]\omega^2,$$

$$b_{41}=\frac{2n+1}{2\ell}\pi\left[-a_{18}+a_7\left(\frac{2n+1}{2\ell}\right)^2-m_7\,\omega^2\right],\; b_{42}=\frac{2n+1}{2\ell}\pi\left[a_{19}+2a_7\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2-2m_7\omega^2\right],$$

$$b_{43}=-a_8+a_{12}\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2-a_{16}\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^4-\left[m_8-m_3\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2\right]\omega^2,$$

$$b_{44}=a_8-a_{14}\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2+a_{13}\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^4-\left[m_2+m_4\left(\frac{2n+1}{2\ell}\pi\right)^2\right]\omega^2,$$

а также учтена связь T_2^n, R_2^n через T_1^n и R_1^n

$$T_2^n=(T_1^n(b_{24}b_{41}-b_{44}b_{21})+R_1^n(b_{24}b_{43}-b_{44}b_{23}))/(b_{22}b_{44}-b_{24}b_{42}), \tag{14}$$

$$R_2^n=(T_1^n(b_{42}b_{21}-b_{22}b_{41})+R_1^n(b_{42}b_{23}-b_{22}b_{43}))/(b_{22}b_{44}-b_{24}b_{42}).$$

Из (13) получаем

$$\frac{dR_1^n}{dt}\left[\frac{2K_n}{b_{31}^*}-\frac{2K_n^1}{b_{11}^*}\right]+R_1^n\left[\frac{b_{33}^*}{b_{31}^*}-\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*}\right]=\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}\frac{1}{b_{31}^*}\left[p_0+p^*(t)\right],$$

$$T_1^n = -\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} R_1^n - \frac{2K_n^1}{b_{11}^*} \frac{dR_1^n}{dt},$$

в силу линейности данных уравнений, представляя $R_1^n = R_1^{n0} + \bar{R}_1^n$, $T_1^n = T_1^{n0} + \bar{T}_1^n$ где верхний индекс 0 соответствует статическому давлению p_0, имеем

$$R_1^{n0} = p_0 \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{1}{d_1}\bigg|_{\omega=0}, \tag{15}$$

$$T_1^{n0} = -R_1^{n0} \frac{b_{13}^*}{b_{11}^*}\bigg|_{\omega=0} = p_0 \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \left(\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \frac{1}{d_1} \right)\bigg|_{\omega=0},$$

а для режима установившихся гармонических колебаний находим, что

$$\bar{R}_1^n = \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2\omega^2}} e^{i\psi} p_m^* e^{i\omega t}, \tag{16}$$

$$\bar{T}_1^n = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \frac{\sqrt{b_{13}^{*\,2} + (2K_n^1\omega)^2}}{\sqrt{d_1^2 b_{11}^{*\,2} + d_2^2\omega^2 b_{11}^{*\,2}}} e^{i\theta} e^{i\psi} p_m^* e^{i\omega t},$$

где $d_1 = b_{33}^* - b_{31}^* b_{13}^* / b_{11}^*$, $d_2 = 2K_n - b_{31}^* 2K_n^1 / b_{11}^*$, $\mathrm{tg}\psi = -d_2\omega / d_1$ $\mathrm{tg}\theta = 2K_n^1\omega / b_{13}^*$.

Подставляя (15), (16) в (11) при $k = 1$, получим выражения для прогиба и продольного перемещения первого несущего слоя, определяющие продольные и изгибные колебания пластины

$$w_1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi} \frac{1}{d_1}\bigg|_{\omega=0} \cos\frac{2n+1}{2\ell}\pi x + p_m^* \Pi_{w1}(\omega, x) \sin(\omega t + \varphi_{w1}), \tag{17}$$

$$u_1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \left(\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*} \frac{1}{d_1} \right)\bigg|_{\omega=0} \sin\frac{2n+1}{2\ell}\pi x + p_m^* \Pi_{u1}(\omega, x) \sin(\omega t + \varphi_{u1}).$$

Здесь $\Pi_{w1}(\omega, x) = \sqrt{E_p^2 + F_p^2}$, $\Pi_{u1}(\omega, x) = \sqrt{A_p^2 + B_p^2}$,

$$E_p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}\frac{d_1}{d_1^2+d_2^2\omega^2}\cos\frac{2n+1}{2\ell}\pi x\,,\ F_p=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}\frac{\omega d_2}{d_1^2+d_2^2\omega^2}\cos\frac{2n+1}{2\ell}\pi x\,;$$

$$A_p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n}}{(2n+1)\pi}\left[\frac{d_1}{d_1^2+d_2^2\omega^2}\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*}+\frac{2K_n^1\omega}{b_{11}^*}\frac{d_2\omega}{d_1^2+d_2^2\omega^2}\right]\sin\frac{2n+1}{2\ell}\pi x\,,$$

$$B_p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n}}{(2n+1)\pi}\left[\frac{d_1}{d_1^2+d_2^2\omega^2}\frac{2K_n^1\omega}{b_{11}^*}-\frac{b_{13}^*}{b_{11}^*}\frac{d_2\omega}{d_1^2+d_2^2\omega^2}\right]\sin\frac{2n+1}{2\ell}\pi x\,,$$

$\varphi_{w1}=-\mathrm{arctg}(F_p/E_p)$, $\varphi_{u1}=\mathrm{arctg}(B_p/A_p)$.

Введенные в рассмотрение функции $\Pi_{w1}(\omega,x)$, $\Pi_{u1}(\omega,x)$ представляют собой частотозависимые функции распределения амплитуд прогиба и продольного перемещения вдоль канала, соответственно. Можно заметить, что принимая во внимание связь (14) мы, также, определили прогиб и продольное перемещение второго несущего слоя пластины.

Заключение

В результате решения задачи о гидроупругих колебаниях трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, найдены выражения для упругих перемещений несущих слоев пластины, полностью определяющие ее напряженно деформированное состояние. На основе полученного решения построены частотозависимые функции распределения амплитуд прогиба и продольного перемещения. Данные функции при фиксированном значении продольной координаты трансформируются в амплитудно-частотные характеристики в рассматриваемом поперечном сечении, соответствующем данной координате. Таким образом, предложенные функции позволяют исследовать гидроупругие колебания трехслойной пластины. Например, они могут быть использованы для определения резонансных частот колебаний. Кроме того, полученное решение, может использоваться для разработки методик неразрушающего контроля состояния трехслойных элементов конструкций авиационной и космической техники по параметрам их вынужденных гидроупругих колебаний.

Работа выполнена при поддержке РФФИ проект № 19-01-00014а

и проект № 18-01- 00127а.

Библиографический список

1. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proceedings of the Royal Society London A, 1920, vol. 98, pp. 205 - 216. DOI: 10.1098/rspa.1920.0064.

2. Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: revising the Lamb problem // Journal of Fluids and Structures, 1996, vol. 10 (7), pp. 743 - 761. DOI: 10.1006/jfls.1996.0051.

3. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // Journal of Sound and Vibration, 2001, vol. 245 (2), pp. 261 - 283. DOI:10.1006/jsvi.2000.3560.

4. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // Journal of Sound and Vibration, 2013, vol. 332 (12), pp. 3064 - 3085. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.01.007.

5. Алексеев В.В., Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А. Колебания упругой пластины контактирующей со свободной поверхностью тяжелой жидкости // Журнал

технической физики. 2002. Т. 72. № 5. С. 16 - 21.

6. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 1. С. 94 - 107.

7. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Матвеенко В.П. Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 6. С. 108 - 120. DOI: 10.7868/S0568528116060049.

8. Аврамов К.В., Стрельникова Е.А. Хаотические колебания пластинок при их двустороннем взаимодействии с потоком движущейся жидкости // Прикладная механика. 2014. Т. 50. № 3. С. 86 - 93.

9. Haddara M.R., Cao S.A. Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Structures, 1996, vol. 9 (10), pp. 913 - 933. DOI:10.1016/0951-8339(96)00006-8.

10. Chapman C.J., Sorokin S.V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading // Journal of Sound and Vibration, 2005, vol. 281 (3), pp. 719 - 741. DOI:10.1016/j.jsv.2004.02.013.

11. Ergin A. Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid // Journal of Fluids and Structures, 2003, vol. 17, pp. 927 - 939. DOI:10.1016/S0889-9746(03)00050-1.

12. Добрянский В.Н., Рабинский Л.Н., Радченко В.П., Соляев Ю.О. Оценка ширины зоны контакта между плоскоовальными каналами охлаждения и корпусом приёмо-передающего модуля активной фазированной антенной решётки // Труды МАИ.

2018. № 101. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98252

13. Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model // Journal of Sound and Vibration, 2009, vol. 326, pp. 332 - 339. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.04.031.

14. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // Journal of Sound and Vibration, 1993, vol. 163, pp. 231 - 259. DOI: 10.1006/jsvi.1993.1162.

15. Faria C.T., Inman D. J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical Systems and Signal Processing, 2014, vol. 45, pp. 317 - 329. DOI: 10.1016/j.ymssp.2013.12.003.

16. Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 3. С. 42 - 55.

17. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53466

18. Алексеев В.В., Индейцев Д.А., Мочалова Ю.А. Резонансные колебания упругой мембраны на дне бассейна с тяжелой жидкостью // Журнал технической физики. 1999. Т. 69. № 8. С. 37 - 42.

19. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical Modeling of Hydroelastic Oscillations of the Stamp and the Plate, Resting on Pasternak

Foundation // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series, 2018, vol. 944, 012081. DOI :10.1088/1742-6596/944/1/012081.

20. Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Н.А. Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53018

21. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. - М: Физматлит, 2005. - 576 с.

22. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56 - 63.

23. Popov V.S., Mogilevich L.I., Grushenkova E.D. Hydroelastic response of three-layered plate interacting with pulsating viscous liquid layer // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019, pp. 459 - 467. DOI: 10.1007/978-3-319-95630-5_49.

24. Chernenko A., Kondratov D., Mogilevich L., Popov V., Popova E. Mathematical modeling of hydroelastic interaction between stamp and three-layered beam resting on Winkler foundation // Studies in Systems, Decision and Control, 2019, vol. 199, pp. 671 - 681. DOI: 10.1007/978-3-030-12072-6_54.

25. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. - М.: Наука, 1987. - 352 с.

26. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Дрофа, 2003. - 840 с.

27. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостей. - М.: Мир, 1967. - 312 с.