

УДК: 514.181.2:519.67:612.778.1.068

## **Геометрическое моделирование многослойной намотки**

Ю.И. Битюков, Ю.И. Денискин

### **Аннотация**

Данная статья посвящена развитию геометрической модели технологического процесса намотки конструкций из волокнистых композиционных материалов. На сегодняшний день не учитывался тот факт, что при укладке ленты на поверхность технологической оправки форма поверхности изменяется. Данная статья посвящена решению этой проблемы. В статье будет построена геометрическая модель многослойной намотки, в которой будет учтено изменение формы поверхности в соответствии с толщиной ленты.

### **Ключевые слова**

Намотка, сглаживающий сплайн.

### **Введение**

Данная статья посвящена развитию геометрической модели [1-3] одного из наиболее совершенных методов получения конструкций из композиционных материалов - технологического процесса намотки. Этот процесс осуществляется на станках с числовым программным управлением и заключается в том, что на вращающуюся оправку укладывается с натяжением лента, составленная из волокон, пропитанных связующим. После получения необходимой толщины оболочки, оправка может быть удалена или использована как часть конструкции. Укладка ленты на оправку происходит в соответствии с программой перемещения головки намоточного станка.

Намоточный процесс имеет ряд особенностей. Точность процесса намотки и получение оболочки, удовлетворяющей требуемым геометрическим и прочностным характеристикам, прежде всего, зависит от качества отработки расчетных траекторий, точности укладки ленты на поверхность оправки и создания на раскладчике ленты

намоточного станка нужного натяжения. Поэтому для разработки управляющих программ намоточными станками требуется наличие наиболее полной геометрической модели, описывающей процесс укладки лент на поверхность оправки с соблюдением целого комплекса условий.

В статье [1] было показано, что моделировать укладку ленты на оправку можно с помощью гладкого отображения прямоугольника в пространство:  $W : [t_0; t_1] \times [-d/2; d/2] \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Действительно, лента представляет собой прямоугольник. Когда мы укладываем ее на поверхность, то ставим в соответствие каждой точке этого прямоугольника единственную точку поверхности. Поэтому при укладке ленты мы имеем дело с некоторой функцией. В статье [1] было приведено построение указанной функции, при этом поверхность предполагалась дважды непрерывно дифференцируемой.

При получении изделия методом намотки только первый виток ленты может укладываться на данную поверхность оправки, следующие витки укладываются на поверхность, образованную предыдущими витками. Для того чтобы учесть этот факт в модели намотки, необходимо уметь для каждой точки поверхности оправки определять число лент, накрывающих эту точку. Статья [2] была посвящена решению этой задачи. В ней построена функция, значение которой в каждой точке поверхности оправки – это число лент, накрывающих данную точку. В данной статье мы применим результаты, полученные в работах [1, 2] к разработке алгоритма модификации поверхности оправки в соответствии с толщиной  $h$  ленты и тем самым опишем всю геометрию процесса намотки. Итак, предположим, что дважды непрерывно дифференцируемая поверхность оправки имеет следующее параметрическое представление

$$\Sigma : \vec{r}(u, v) = x(u, v) \cdot \vec{i} + y(u, v) \cdot \vec{j} + z(u, v) \cdot \vec{k}, \quad u \in [a_1; b_1], \quad v \in [a_2; b_2] \quad (1)$$

Причем справедливы равенства  $D^{(\alpha_1, \alpha_2)} \vec{r}(a_1 + 0, v) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} \vec{r}}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2}}(a_1 + 0, v) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} \vec{r}}{\partial u^{\alpha_1} \partial v^{\alpha_2}}(b_1 - 0, v)$  для всех значений параметра  $v$  и  $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$ . Это условие обеспечивает гладкое продолжение данной вектор - функции на множество  $\mathbf{R} \times [a_2; b_2]$ .

Как и в статье [2], предположим, что выполнено следующее дополнительное условие:  $u$  – линии поверхности представляют собой сечения этой поверхности плоскостью  $z = \text{const}$ , т.е.  $(\vec{r}(u, \text{const}_1), \vec{k}) = \text{const}$ .

Обозначим  $N_w : [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \rightarrow \mathbf{N} \cup \{0\}$  (здесь  $\mathbf{N}$  - множество натуральных чисел) функцию, значение которой в каждой точке  $(u, v) \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$  равно числу лент,

накрывающих точку поверхности оправки с радиус – вектором  $\vec{r}(u, v)$ . В дальнейших рассуждениях удобно периодически продолжить на  $\mathbf{R} \times [a_2; b_2]$  функции  $\vec{r}(u, v)$  и  $N_w$

Пусть  $u_i = a_1 + (b_1 - a_1)\frac{i}{n}$ ,  $v_j = a_2 + (b_2 - a_2)\frac{j}{k}$ ,  $i, j \in Z$ . Построим точечный каркас сечений  $\{P_{\lambda\mu}^0 : OP_{\lambda\mu}^0 = \vec{r}(u_\lambda, v_\mu) \lambda = 0, 1, \dots, n; \mu = 0, 1, \dots, k\}$  поверхности (1) и по полученному точечному каркасу построим поверхность, проходящую через точки  $P_{\lambda\mu}^0$  с помощью метода, изложенного в статье [3]. Пусть  $\vec{r}_0(u, v)$ ,  $u \in [a_1; b_1]$ ,  $v \in [a_2; b_2]$  - ее параметрическое представление. Как легко понять, эта поверхность является приближением данной поверхности оправки. При этом, на основании результатов, полученных в статье [3], можно утверждать, что  $\vec{r}_0(u_\lambda, v_\mu) = OP_{\lambda\mu}^0 = \vec{r}(u_\lambda, v_\mu)$  для всех  $\lambda, \mu$ . Перестройку поверхности оправки мы будем осуществлять путем перестройки ее приближения слой за слоем. Перестройку приближения поверхности оправки мы будем осуществлять за счет смещения точек каркаса. При первом смещении мы получим точечный каркас  $\{P_{\lambda\mu}^1 : \lambda = 0, 1, \dots, n; \mu = 0, 1, \dots, k\}$ , при втором -  $\{P_{\lambda\mu}^2 : \lambda = 0, 1, \dots, n; \mu = 0, 1, \dots, k\}$  и т.д. Методом, описанным в статье [3], по получаемым точечным каркасам будем строить поверхности  $\vec{r}_1(u, v)$ ,  $\vec{r}_2(u, v)$  и т.д. Эти поверхности мы и будем считать модификациями исходной поверхности оправки.

Предположим, что уже произошло  $q$  перестроек поверхности оправки и укажем алгоритм  $q+1$  перестройки. Обозначим  $\vec{m}_q(u, v)$  вектор нормали к поверхности  $\vec{r}_q(u, v)$ , выходящий из тела, ограниченного поверхностью. Пусть  $\vec{n}_q(u, v) = \vec{m}_q(u, v) - (\vec{m}_q(u, v), \vec{k})\vec{k}$  (круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов). По точкам  $P_{\lambda\mu}^q : \lambda = 0, 1, \dots, n$ , сечения построим новые точки  $\tilde{P}_{\lambda\mu}^q : \lambda = 0, 1, \dots, n$  в соответствии с правилом:  $OP_{\lambda\mu}^q = \vec{r}_q(u_\lambda, v_\mu) + hN_w(u_\lambda, v_\mu)\vec{n}_q(u_\lambda, v_\mu)/|\vec{n}_q(u_\lambda, v_\mu)|$ . Заметим, что лента укладывается на поверхность с натяжением. Поэтому, при укладке ленты на уже уложенные слои между поверхностью и лентой может возникнуть зазор. Из множества  $\tilde{P}_{\lambda\mu}^q : \lambda = 0, 1, \dots, n$  выберем подмножество точек  $\{\tilde{P}_{i_s\mu}^q : s = 0, 1, \dots, p\}$ , обладающих свойством:  $N_w(u_{i_s-1}, v_\mu) < N_w(u_{i_s}, v_\mu)$  или  $N_w(u_{i_s}, v_\mu) < N_w(u_{i_s+1}, v_\mu)$ . Из полученного множества удалим те точки  $\tilde{P}_{i_s\mu}^q$ , для которых выполняются условия:

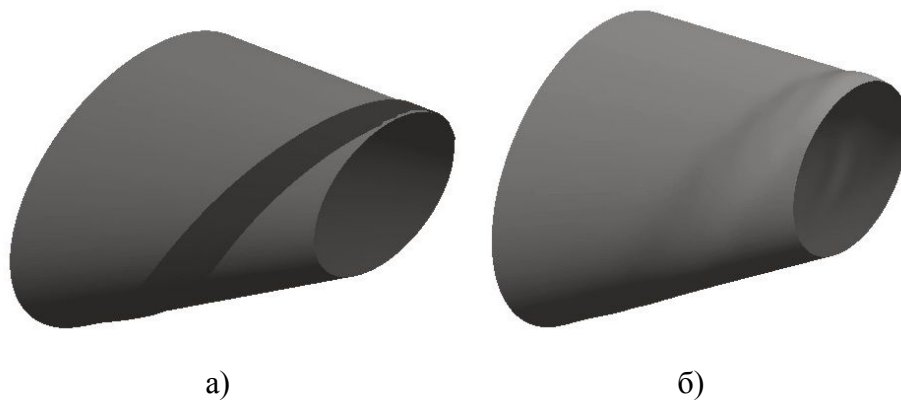
$$N_w(u_{i_s-1}, v_\mu) > N_w(u_{i_s}, v_\mu) > N_w(u_{i_s+1}, v_\mu) \text{ или } N_w(u_{i_s-1}, v_\mu) < N_w(u_{i_s}, v_\mu) < N_w(u_{i_s+1}, v_\mu)$$

Пусть  $\{\tilde{P}_{\lambda_s\mu}^q : s = 0, 1, \dots, \mathcal{G}\}$  полученное множество (рис. 1).



Итак, на этом заканчивается построение точек  $\tilde{P}_{\lambda\mu}^q$ . Обозначим координаты этих точек  $(\tilde{x}_{\lambda\mu}^q; \tilde{y}_{\lambda\mu}^q; z_\mu)$ . По точкам  $\tilde{P}_{\lambda\mu}^q$  построим сглаживающий замкнутый сплайн [4]  $\bar{g}_\mu(w) = f_x^\mu(w) \cdot \vec{i} + f_y^\mu(w) \cdot \vec{j}$ ,  $w \in [0;1]$ . Для этого мы задаем на отрезке  $[0;1]$  сетку  $w_0 < w_1 < \dots < w_n < 1$  и строим два периодических сглаживающих сплайна  $f_x^\mu(w)$ ,  $f_y^\mu(w)$  по множествам точек:  $\{(w_\lambda; \tilde{x}_{\lambda\mu}^q), \lambda = 0,1,\dots,n\}$ ,  $\{(w_\lambda; \tilde{y}_{\lambda\mu}^q), \lambda = 0,1,\dots,n\}$ . После построения сглаживающего сплайна можно определить точки  $P_{\lambda\mu}^{q+1}$  сечений новой поверхности, например, следующим равенством:  $OP_{\lambda\mu}^{q+1} = \bar{g}_\mu(w_\lambda)$ ,  $\lambda = 0,1,\dots,n$ . По найденным точкам строим поверхность  $\bar{r}_q(u, v)$ ,  $u \in [a_1; b_1]$ ,  $v \in [a_2; b_2]$ . Моделирование следующего слоя осуществляется по описанной схеме, используя точки  $P_{\lambda\mu}^{q+1}$  и полученную поверхность.

На рисунке 3 а) показана поверхность оправки, которой являлся эллиптический конус и уложенная на него лента. На рисунке 3 б) показана модифицированная поверхность. На рисунке 4 показан пример перестройки дуги одного из сечений конуса. На рисунке 5 показана перестройка поверхности лонжерона стабилизатора вертолета после укладки на него нескольких слоев ленты.



а)

б)

Рис 3. Перестройка поверхности

а) поверхность с лентой

б) модифицированная поверхность

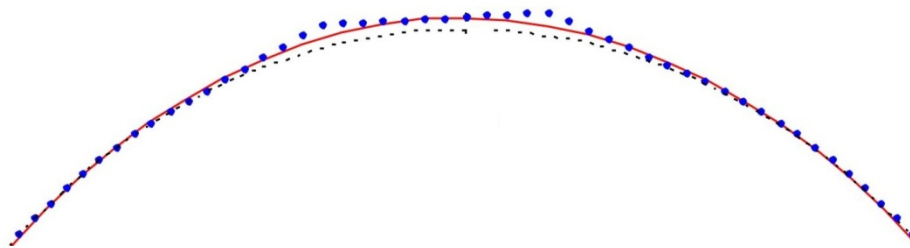


Рис. 4. Перестройка сечения

(пунктирная линия – дуга исходного сечения;  
 точки – результат сдвига точек каркаса в соответствии с методом;  
 сплошная линия – дуга сечения модифицированной поверхности)



Рис. 5. Перестройка поверхности лонжерона стабилизатора вертолета после укладки  
 нескольких витков ленты

В заключение отметим, что до сегодняшнего времени, способом учета толщины ленты в моделях намотки является построение эквидистантной поверхности. Но это, очевидно, является очень грубым методом, так как при укладке ленты на поверхность оправки могут возникать участки, где ленты нет вообще, либо где ее слишком много. Построение эквидистантной поверхности подразумевает подъем всех точек поверхности оправки на одну и ту же высоту. Это, в свою очередь, не является верным. Предложенный метод перестройки поверхности учитывает все указанные обстоятельства, поэтому является гораздо более точным.

## Библиографический список

1. Битюков Ю.И. Моделирование технологического процесса намотки с помощью гладкого отображения прямоугольника в пространство  $\mathbf{R}^3$  // Авиационная промышленность. – 2008. - №2. - С. 35 - 41.

2. Битюков Ю.И. Об одной характеристике схемы армирования // Авиационная промышленность. – 2008. - №4. – С. 20 - 23.
3. Битюков Ю.И., Калинин В.А., Литвинов В.Б., Токсанбаев М.С. Создание модели поверхности вентиляторной лопатки для перспективного двигателя нового поколения // Авиационная промышленность. – 2007. - №2. - С. 7 - 11.
4. Квасов Б.И. Изометрическая аппроксимация сплайнами: Учебное пособие. – Новосибирск: НГУ, 1998. – 150 с.

### **Сведения об авторах**

Битюков Юрий Иванович

Московский авиационный институт (государственный технический университет), доцент ,  
канд. тех. наук, 89104676519, [yib72@mail.ru](mailto:yib72@mail.ru), 109542 Москва, Вострухина 6-5-38

Денискин Юрий Иванович

Московский авиационный институт (государственный технический университет), проф.,  
доктор. тех. наук, 89161005784, [denis@mai.ru](mailto:denis@mai.ru)