

## **Уточненная малопараметрическая модель движения земного полюса**

**Вэй Ян Сое**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия  
e-mail: [waiyan2032015@gmail.com](mailto:waiyan2032015@gmail.com)*

**Статья поступила 25.12.2020**

### **Аннотация**

На основе малопараметрической математической модели движения земного полюса показано существование различных режимов колебательного процесса, связанных с изменением соотношения амплитуд основных гармоник. Установлено, что изменение амплитудного соотношения негативно влияет на точность аппроксимации движения полюса и точность прогнозирования его положения. Рассмотрены динамические эффекты, вызванные изменением соотношения амплитуд чандлеровской и годичной гармоник. Получена модификация малопараметрической модели движения полюса, позволяющая распространить применение двухчастотной модели на длительный временной интервал и улучшить точность аппроксимации при сохранении числа оцениваемых параметров.

**Ключевые слова:** земной полюс, чандлеровское колебание, параметры вращения Земли.

## Введение

Исследования движения Земли относительно центра масс представляют как естественнонаучный, так и практический интерес. Задача определения ориентации Земли в небесной геоцентрической системе координат GCRS (Geocentric Celestial Reference System) является одной из важных задач астрометрии. Ее решение имеет важные технические приложения и связано с уточнением координатно-временного и навигационного обеспечения спутниковых систем. Ориентация Земли в неподвижном пространстве задается пятью параметрами вращения Земли (ПВЗ), два из которых – координаты земного полюса. Колебания координат земного полюса являются наиболее трудно прогнозируемыми. Это связано с тем, что движения мгновенной оси вращения в теле Земли имеет квазирегулярный характер и в равной степени определяется астрономическими и геофизическими факторами.

Движение земного полюса в связанной системе координат можно получить из теоремы об изменении кинетического момента. Однако, необходимо учесть, что под земным полюсом понимается не полюс вращения (пересечение мгновенной оси вращения с поверхностью Земли), а промежуточный полюс с координатами  $(x_p, y_p)$ , который определяется в рамках перехода от земной системы координат к системе GCRS.

Зная изменения координат земного полюса можно вычислить координаты полюса вращения  $(x_\omega, y_\omega)$  и компоненты  $p, q$  вектора мгновенной угловой скорости Земли  $\omega$ :

$$\begin{aligned}x_{\omega} &= x_p - \dot{x}_p \omega^{-1}, & p &= \omega x_{\omega}, \\y_{\omega} &= y_p - \dot{y}_p \omega^{-1}, & q &= \omega y_{\omega}.\end{aligned}\tag{2}$$

Известно [1-4], что движение земного полюса представляет собой сложение двух квазипериодических колебаний - чандлеровского и годичного, векового и долгопериодического тренда, близсуточных и внутрисуточных вариаций, а также флуктуаций стохастического характера.

Наиболее важным является построение модели основного движения земного полюса и его прогноз на интервалы от года до 3 лет. Основной процесс колебаний координат земного полюса представляет собой сложение квазипериодических чандлеровской и годичной компонент [4]. Общепринятым является приближение модели движения полюса к малопараметрической двухчастотной модели с постоянными коэффициентами [5].

В большинстве случаев такое приближение оказывается достаточным [6, 7], и дает при прогнозировании удовлетворительный для практического применения результат, подтверждаемый данными наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли (МСВЗ) [1]. Малопараметрическая модель обладает малой алгоритмической сложностью и описывает основной процесс колебаний полюса с приемлемой точностью. Сравнительно медленное изменение параметров чандлеровской и годичной компонент [8, 9] позволяет её использовать на временных интервалах до 10 лет.

Согласно статистике, с увеличением длительности интервала прогноза наблюдается увеличение среднеквадратической ошибки, что является естественным.

При фиксированной длительности интервала прогноз, как правило, является стабильным и его точность зависит от накопленной ошибки определения положения полюса. Получаемые расхождения прогноза с фактическими данными измерений в большинстве случаев являются следствием непрогнозируемых флуктуаций – как внешних гравитационно-приливных возмущений [10, 11], так и возмущений, возникших вследствие крупномасштабных явлений в геосредах [12, 13]. Такие возмущения приводят при интегрировании дифференциальных уравнений движения полюса к нерегулярным изменениям амплитуд основных гармоник колебательного процесса.

Однако, в некоторых случаях можно наблюдать резкое возрастание ошибки прогноза и на интервалах прогнозирования с фиксированной длительностью, в том числе и для прогноза на короткие интервалы времени (до года). При этом корректировка параметров модели для улучшения ее точностных характеристик не приводит к требуемому результату и даже к заметному изменению характера роста ошибки. В этом случае можно говорить о переходе колебательного процесса полюса в другой режим.

Исследуя основной колебательный процесс земного полюса (сложение чандлеровской и годичной компонент), можно установить, что средняя частота его движения скачкообразно меняется при изменении амплитудного соотношения – отношения амплитуд чандлеровской и годичной компонент.

В данной работе рассмотрены динамические эффекты в движении земного полюса, вызванные изменением соотношения амплитуд чандлеровской и годичной

гармоник, когда колебательный процесс полюса переходит от одного режима с ведущей чандлеровской компонентой к режиму, когда более значимой оказывается годичная гармоника и наоборот. Решается задача модифицирования двухчастотной модели с постоянными коэффициентами при изменении колебательного режима движения полюса. Устанавливается изменение структурных свойств модели при изменении средней частоты движения полюса.

### **Уравнения движения земного полюса**

При анализе данных наблюдений и измерений МСВЗ [1] можно обнаружить явление смены колебательного режима полюса, связанные с изменением значения средней частоты его движения вокруг центра – «среднего» полюса, движение которого определяет тренд, содержащий долгопериодические (с периодами более 7 лет) и вековую составляющие. Такие изменения могут наблюдаться и в диссипативных системах не только при вариациях амплитуд основных гармоник, но и до установившегося колебательного режима [14-16].

Дифференциальные уравнения колебаний земного полюса могут быть получены из уравнений Эйлера-Лиувилля вращательного движения деформируемой Земли [3]. Вследствие малости величин  $p, q$  ( $p, q \ll r$ ) экваториальных проекций вектора мгновенной угловой скорости в первом приближении по  $p, q$  система дифференциальных уравнений колебаний земного полюса и вариаций скорости осевого вращения Земли примет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{p} + N_p q &= j_{qr}^0 + \mu_p, & p(t_0) &= p_0, \\
\dot{q} - N_q p &= j_{pr}^0 + \mu_q, & q(t_0) &= q_0, \\
\delta \dot{r} &= \mu_r, & \delta r &= r(t) - r_0, & r(t_0) &= r_0, \\
N_p &= \frac{C^* - B^*}{A^*} r_0, & N_q &= \frac{C^* - A^*}{B^*} r_0, & r_0 &= 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с},
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $j_{pr}^0 = \langle J_{pr} r_0^2 \rangle_\varphi$ ,  $j_{qr}^0 = \langle J_{qr} r_0^2 \rangle_\varphi$  - усредненные по суточному вращению приливные "выступы", определяемые центробежными моментами инерции деформируемой Земли,  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  - эффективные осевые моменты инерции Земли, а  $N$  - средняя чандлеровская частота соответствует значению  $N = \sqrt{N_p N_q} \cong 0.84 \div 0.85$  циклов в год. Величины  $\mu_p$ ,  $\mu_q$  имеют смысл удельных моментов сил и характеризуют внешние возмущения, приводящие к наблюдаемому движению земного полюса.

Для амплитудно-частотного анализа колебательного процесса удобно ввести параметризацию компонент  $p$ ,  $q$ :

$$p = c_p + a \cos \psi, \quad q = c_q + a \sin \psi, \tag{2}$$

где  $a$  - амплитуда, а  $\psi$  - фаза результирующего движения полюса вокруг «среднего» положения.

Дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы движения земного полюса получаются из уравнений (1) и при  $j_{qr}^0 = j_{pr}^0 = 0$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= (N_q - N_p) a \sin 2\psi + \mu_p \cos \psi + \mu_q \sin \psi \\
\dot{\psi} &= -N_q \cos^2 \psi - N_p \sin^2 \psi + a^{-1} [\mu_q \cos \psi - \mu_p \sin \psi]
\end{aligned} \tag{3}$$

Тогда в качестве стационарного чандлеровского колебания примем установившееся колебание со средними наблюдаемыми параметрами – амплитудой  $a_{ch}$  и фазой  $\psi_{ch}$

чандлеровского колебания. Оно может быть получено из уравнений (2). Уравнения (2) в которых отсутствуют диссипативные слагаемые будем рассматривать как уравнения стационарного режима колебания. При этом будем считать, что  $\mu_p, \mu_q$  описывают квазистационарное годичное колебание с поправкой на отсутствие диссипативных членов. В случае "замороженной" фигуры Земли амплитуда и фаза чандлеровского невозмущенного движения получаются из (2) и имеют вид:

$$a_{ch} = \frac{a_{ch}^0}{\sqrt{\dot{\psi}_{ch}}}, \quad \psi_{ch} = \psi_{ch}^0 - \arctan \left( \sqrt{\frac{N_q}{N_p}} \tan \left( \sqrt{N_q N_p} t \right) \right) - \pi(n+1) \quad (4)$$

$$\langle a_{ch} \rangle_{T_{ch}} = \tilde{a}_{ch}^0 = \text{const}, \quad t \in (t_n, t_{n+1}), \quad t_n = \pi \frac{2n+1}{\sqrt{N_q N_p}}, \quad n \in Z$$

В стационарном решении (2) учтем только среднее чандлеровское колебание с постоянной амплитудой и средней частотой  $N$  (равной среднему значению за цикл).

Далее рассмотрим возмущенное движение полюса в простейшем виде. Уравнения для проекций угловой скорости  $p, q$  найдем из решения системы (1) при учете регулярных внешних периодических воздействий с чандлеровской и годичной частотами в известном виде [3]. Они представляют собой двухчастотную модель с годичной и чандлеровской составляющими:

$$p = c_p + a_{ch} \cos(Nt + \alpha_{ch}) + a_h \cos(vt + \alpha_h), \quad (5)$$

$$q = c_q + a_{ch} \sin(Nt + \alpha_{ch}) + a_h \sin(vt + \alpha_h).$$

Значение чандлеровской частоты  $N$  принимается постоянным и равным 0.843 цикла в год на основе обработки длительного ряда наблюдений. Параметры  $c_{p,q}$  - описывают долгопериодические вариации вектора угловой скорости;  $a_{ch}, a_h, \alpha_{ch}, \alpha_h$

- амплитуды и фазы чандлеровской и годичной составляющих, соответственно, подлежащие вычислению по данным наблюдений и измерений, публикуемых МСВЗ [1]. То есть заданными будем считать параметры уравнений (2).

### Изменение средней частоты колебательного процесса земного полюса

Покажем, что для модели квазистационарных колебаний (5) с постоянными коэффициентами при варьировании соотношения амплитуд чандлеровской и годичной гармоник средняя частота  $\dot{\psi}$  скачкообразно изменится с  $N$  на  $\nu$  (если амплитуда чандлеровской составляющей стала меньше амплитуды годичной) или наоборот, мгновенно пройдя через их среднее значение при равенстве амплитуд. Используя выражения (2), (5), определим мгновенную частоту  $\dot{\psi}$  обращения полюса вокруг «средней» точки:

$$\dot{\psi} = \frac{Na_{ch}^2 + (N + \nu)a_{ch}a_h \cos((\nu - N)t + \alpha_h - \alpha_{ch}) + \nu a_h^2}{a_{ch}^2 + 2a_{ch}a_h \cos((\nu - N)t + \alpha_h - \alpha_{ch}) + a_h^2} \quad (6)$$

Из (6) следует, что частота  $\dot{\psi}$  - периодическая функция времени, которая зависит также от амплитуд основных гармоник колебательного процесса полюса и чувствительна к их отношению  $k = a_h / a_{ch}$ . А именно, согласно (6), функция  $\dot{\psi}$ , а значит и функция угла  $\psi$ , будут существенно меняться при переходах между различными режимами колебаний, определяемых условиями  $a_h > a_{ch}$ ,  $a_h = a_{ch}$ ,  $a_{ch} > a_h$ . Действительно, проинтегрировав выражение (6), получим функцию



полярного угла  $\psi$  на периоде модуляции чандлеровской и годичной гармоник (с точностью до постоянной, определяемой начальным условием):

$$\psi = \arctan\left(\frac{1-k}{1+k} \tan\left(\frac{(\nu - N)t + \alpha_{ch} - \alpha_h}{2}\right)\right) + \frac{N + \nu}{2}t \quad (7)$$

Осреднение  $\dot{\psi}$  на периоде  $T$  модуляции чандлеровской и годичной гармоник получается из (6) и приводит к выражению:

$$\langle \dot{\psi} \rangle_T = \text{csgn}\left(\frac{k-1}{k+1}\right) \frac{\nu - N}{2} + \frac{\nu + N}{2} \quad (8)$$

После осреднения частоты  $\dot{\psi}$  на периоде  $2\pi/(\nu - N)$  фаза  $\langle \psi \rangle_T$  среднего квазиравномерного движения полюса вокруг центральной точки является линейной функцией времени для каждого из его колебательных режимов:

$$\langle \psi \rangle_T = \begin{cases} \nu t, & \text{если } a_{ch} < a_h \\ \frac{\nu + N}{2}t, & \text{если } a_{ch} = a_h \\ Nt, & \text{если } a_{ch} > a_h \end{cases} \quad (9)$$

Теперь рассмотрим случай, когда амплитуды чандлеровской и годичной компонент имеют близкие значения. Амплитуда  $a$  является величиной строго положительной, а минимальное ее значение близко к нулю. Так, если  $a_h$  мало отличается от  $a_{ch}$  на величину  $\varepsilon$ , то минимальное значение амплитуды  $a_{\min} = |a_h - a_{ch}| = |\varepsilon|$  и соответственно имеет порядок  $\varepsilon$ . Экстремум частоты  $\dot{\psi}$ , который достигается при минимальной величине переменной амплитуды движения полюса  $a_{\min}$  будет иметь значение  $\dot{\psi} = \nu - (\nu - N)a_{ch}\varepsilon^{-1}$  и имеет порядок  $\varepsilon^{-1}$ . При этом,

если  $a_{ch} < a_h$ , то  $\varepsilon > 0$  и экстремум является локальным минимумом, в противном случае (если  $a_{ch} > a_h$  и  $\varepsilon < 0$ ) – максимумом.

Определить момент времени, когда  $k \approx 1$  на практике можно только приближенно с помощью численной обработки данных измерений движения земного полюса. При  $k \approx 1$  величина  $\varepsilon$  может оказаться меньше точности определения коэффициента  $k$ , что приведет к неопределенности идентификации колебательного режима. На периоде модуляции гармоник ключевым оказывается очень короткий временной интервал (если  $k \approx 1$ ) в некоторой окрестности экстремума функции  $\psi$  (или что то же самое - в окрестности минимума функции  $a$ ). Если вблизи экстремума  $k \approx 1$ , то  $\psi$  может иметь как максимум (при  $k < 1$ ), так и минимум (при  $k > 1$ ) порядка  $\varepsilon^{-1}$ . Однако, в этом случае в пределах точности определения коэффициента  $k$ , колебательный режим полюса можно считать соответствующим режиму, когда  $a_{ch} = a_h$ . И, как можно заметить, величина  $\psi$  изменится на величину близкую к  $\pi$  (при прохождении через максимум) или на величину близкую к  $-\pi$  (при прохождении через минимум), что не изменит кинематического состояния полюса в пределах точности определения коэффициента  $k$  до тех пор пока значение  $k$  останется близким к единице.

### Численное моделирование и обсуждение результатов

Предположим, что в некоторый момент времени  $\tau^*$  произошло такое изменение. Обозначим через  $\psi$  полярный угол полюса при  $k = k_1$  до изменения, а

через  $\tilde{\psi}$  - полярный угол с  $k = k_2$  после изменения, то при  $k_1 k_2 = 1$  с точностью до аддитивной постоянной легко получить равенство, являющееся структурным свойством, связывающим параметры модели (1) до и после изменения средней частоты движения полюса вокруг среднего положения:

$$\tilde{\psi} = -\psi + \alpha_{ch} + \alpha_h. \quad (10)$$

Данное свойство позволяет найти вариации полярного угла  $\delta\tilde{\psi} = \tilde{\psi} - \langle \tilde{\psi} \rangle_T$  после изменения колебательного режима полюса при  $k_1 k_2 = 1$ :

$$\delta\tilde{\psi} = -\delta\psi. \quad (11)$$

В силу рассматриваемого приближения модели с квазипостоянными коэффициентами вида (1) к наблюдаемой траектории полюса, коэффициент  $k = a_h / a_{ch}$  на интервалах интерполяции и прогноза принимается постоянным. Это позволяет записать условие периодичности вариаций  $\delta\psi$  до и после изменения колебательного режима:

$$\begin{aligned} \delta\psi(t+T) &= \delta\psi(t), \\ \delta\tilde{\psi}(t+T) &= \delta\tilde{\psi}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

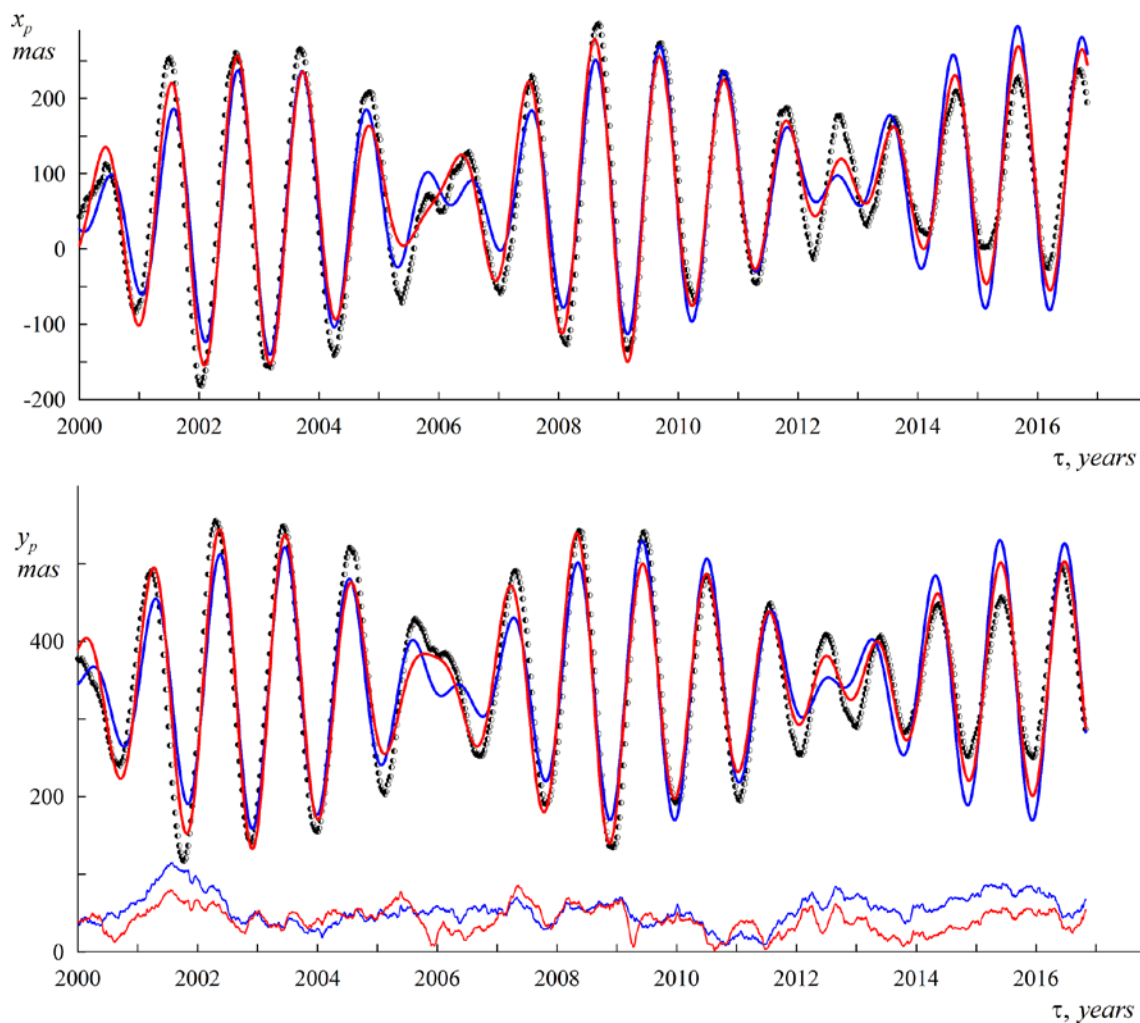


Рис. 1 Аппроксимации колебаний координат земного полюса, построенные с помощью двухчастотной модели (синяя линия) и модифицированной модели с учетом найденного структурного свойства (красная линия); Синяя и красная линии внизу - соответствующие невязки

Полученное условие (11) сохраняет точность модели движения полюса в рамках малопараметрической двухчастотной модели и после смены колебательного режима, т.к. приближения (11) и (12) имеют одинаковую точность, а амплитуда

результатирующего колебательного процесса полюса не чувствительна к таким изменениям.

Для модифицирования модели (5) воспользуемся условием (11). Из (11) можно получить соотношения, связывающие коэффициенты модели (5) до и после изменения колебательного режима. В общем случае полученная модель оказывается нелинейной по параметрам (амплитудам и фазам годичной и чандлеровской компонент), которые подлежат определению на основе метода наименьших квадратов.

Введем некоторые упрощения, позволяющие записать этот переход в линейном приближении. Согласно данным наблюдений фазы основных компонент колебаний полюса являются относительно стабильными, так что примем частоты колебаний постоянными. В отличие от годичной частоты, стабильность которой является высокой, чандлеровская частота подвержена изменениям. Но поскольку ее относительная вариация не так значительна, как относительная вариация амплитуды чандлеровской компоненты, то будем полагать ее постоянной, а вариации частоты и амплитуды чандлеровской компоненты независимыми (хотя согласно эмпирическим законам Мельхиора [2] они являются статистически взаимосвязанными). Это предположение позволит использовать в расчетах среднюю чандлеровскую частоту  $N=0.843$  цикл/год. Кроме того, вследствие стабильности годичной гармоники [1, 17], будем полагать и ее амплитуду постоянной. Таким образом, переменным параметром остается амплитуда чандлеровской компоненты.

С учетом принятых упрощений уравнения (5) после изменения колебательного режима примут вид:

$$\begin{aligned} p &= c_p + \tilde{a}_{ch} \cos(Nt + \alpha_{ch}) + a_h \cos(vt + \alpha_h), \\ q &= c_q + \tilde{a}_{ch} \sin(Nt + \alpha_{ch}) + a_h \sin(vt + \alpha_h). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\tilde{a}_{ch} = a_h^2 / a_{ch}$  - амплитуда чандлеровского колебания после изменения режима движения земного полюса. В момент перехода  $k$  через единичное значение амплитуды чандлеровского и годовичного колебаний близки, т.е. уравнения движения полюса получаются из (13) при  $\tilde{a}_{ch} = a_h$ :

$$\begin{aligned} p &= c_p + a_h \cos(Nt + \alpha_{ch}) + a_h \cos(vt + \alpha_h), \\ q &= c_q + a_h \sin(Nt + \alpha_{ch}) + a_h \sin(vt + \alpha_h). \end{aligned} \quad (14)$$

Если переход из одного режима движения в другой произошел на интервале аппроксимации, то даже с учетом принятых упрощений уравнения движения (5), (13), (14) окажутся нелинейными по параметрам. Однако, если такая модель будет рассматриваться как автономная на длительном интервале, то амплитуды известны и трудностей это не вызывает. Если модель применяется в адаптивном режиме, то есть по аппроксимации строится прогноз, то коэффициент  $k$  можно определить на интервале до или после изменения режима колебаний. Это несколько ухудшит аппроксимацию на всем интервале, но существенно упростит вычислительный процесс.

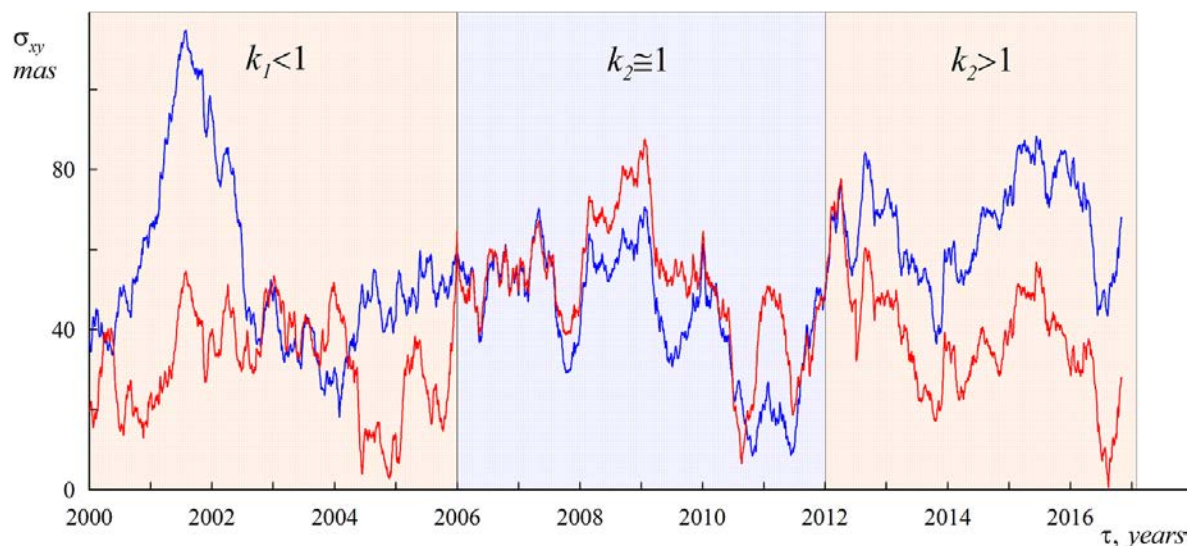


Рис. 2 Сравнение абсолютных отклонений двух аппроксимаций колебаний траектории полюса от его наблюдаемого положения. Синяя и красная линии – отклонение аппроксимации основной и модифицированной моделей соответственно.

Известно [8, 9, 18-20], что на временном интервале с 2007 по 2011 гг произошло изменение соотношения  $k$ . Приведем результаты аппроксимации колебаний координат земного полюса на интервале, приблизительно на середину которого приходится изменение амплитудного соотношения – например, временной интервал 2000-2016 гг. Так, на интервале с 2006 по 2012 гг. приближенно можно принять  $k=1$ , а до 2006 и с 2012 года –  $k<1$  и  $k>1$  соответственно. В этом случае аппроксимация модифицированной модели окажется точнее. На рис. 1 приводится сравнение аппроксимаций колебаний полюса, построенных на основе двухчастотной модели (1) и с помощью модифицированной модели с учетом

зависимости (11). На рис. 2 дано сравнение абсолютных отклонений двух аппроксимаций колебаний траектории полюса от его наблюдаемого положения. Аппроксимация модифицированной модели существенно лучше на концах интервала. Такая аппроксимация будет более пригодной для прогнозирования.

### Выводы

Рассмотренная в работе модифицированная модель движения полюса позволяет уточнить аппроксимацию и распространить применение малопараметрической двухчастотной модели движения полюса на более длительные интервалы времени. Существенным является улучшение точности аппроксимации при сохранении такого же числа параметров модели. Так как спрогнозировать изменение отношения амплитуд пока не представляется возможным, как и невозможно определить его в реальном времени, то всегда этот эффект обнаруживается с опозданием и значительное время он будет попадать на интервал аппроксимации, что негативно скажется на прогнозе по базовой модели.

Для модифицированной модели прогноза нет необходимости в точном определении момента изменения колебательного режима и для решения поставленной задачи можно ограничиться анализом параметров результирующего модуляционного процесса полюса без его разделения на гармоники. Достаточным является установление, произошедшего изменения средней частоты  $\langle \dot{\psi} \rangle_T$  за период



модуляции гармоник с запаздыванием в той степени, в которой это позволяет сделать анализ функции  $\psi(t)$ .

### Библиографический список

1. International Earth Rotation and Reference Systems Service. IERS Annual Reports. URL: <http://www.iers.org>
2. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. - М.: Мир, 1964. - 384 с.
3. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Марков Ю.Г., Перепёлкин В.В. Колебательно-вращательные процессы в движении Земли относительно центра масс: интерполяция и прогноз // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 6. С. 6 - 29.
4. Перепёлкин В.В. Моделирование и анализ вращательно-колебательных движений деформируемой Земли // Труды МАИ. 2007. № 26. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34044>
5. Акуленко Л.Д., Климов Д.М., Кумакшев С.А. Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // Доклады РАН. 2014. Т. 458. № 5. С. 547 - 550.
6. Ву Виет Чунг. Прогноз возмущенного движения полюса Земли на коротком интервале времени // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=43147>

7. Ву Виет Чунг. Оценка влияния параметров вращения Земли в задаче координатно-временного обеспечения навигационных спутников // Труды МАИ. № 69. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=43104>
8. Bizouard C., Remus F., Lambert S., Seoane L., and Gambis D. The Earth's variable Chandler wobble // Astronomy and astrophysics, 2011, vol. 526 (13), DOI: [10.1051/0004-6361/201015894](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015894)
9. Zotov L., Bizouard C., Shum C.K. A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale // Geodesy and Geodynamics, 2016, no. 7. DOI: [10.1016/j.geog.2016.05.005](https://doi.org/10.1016/j.geog.2016.05.005)
10. Сидоренков Н.С. Физика нестабильностей вращения Земли. - М.: Наука, 2002. - 376 с.
11. Schubert G. Treatise on Geophysics, 2007, Amsterdam, Elsevier. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01003376643>
12. Zhou Y.H., Salstein D.A, Chen J.L. Revised atmospheric excitation function series related to Earth's variable rotation under consideration of surface topography // Journal of Geophysical Research, 2006, vol. 111, D12108. DOI: [10.1029/2005JD006608](https://doi.org/10.1029/2005JD006608)
13. Zotov L., Bizouard C. On modulations of the Chandler wobble excitation // Journal of Geodynamics, 2012, no. 62, pp. 30 - 34. DOI: [10.1016/j.jog.2012.03.010](https://doi.org/10.1016/j.jog.2012.03.010)
14. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Крылов С.С. Колебания полюса Земли с учетом флуктуационно-диссипативных возмущений // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 6. С. 665 - 670. DOI: [10.7868/S0869565216360111](https://doi.org/10.7868/S0869565216360111)

15. Barkin M.Yu., Krylov S.S., Perepelkin V.V. Modeling and analysis of the Earth pole motion with nonstationary perturbations // Journal of Physics: Conference Series, 2019, vol. 1301, issue 1. DOI: [10.1088/1742-6596/1301/1/012005](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1301/1/012005)
16. Bondarenko V.V., Krylov S.S., Perepelkin V.V. The fluctuation perturbations in the model of the Chandler wobble // IOP Conference series: materials science and engineering, 2018, pp. 12 - 16. DOI: [10.1088/1757-899X/468/1/012016](https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012016)
17. Климов Д.М., Акуленко Л.Д., Шматков А.М. Сепарация и спектральный анализ колебаний полюса земли. Доклады РАН. 2015. Т. 464. № 3. С. 288 - 292. DOI: [10.7868/S0869565215270092](https://doi.org/10.7868/S0869565215270092)
18. Акуленко Л.Д., Перепелкин В.В. Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 5. С. 142 – 149. DOI: [10.1134/S0572329919050039](https://doi.org/10.1134/S0572329919050039)
19. Перепелкин В.В. Многочастотный процесс колебания земного полюса, обусловленный лунным возмущением // Космонавтика и ракетостроение. 2019. № 1 (106). С. 24 - 30.
20. Ананенкова А.А., Крылов С.С., Филиппова А.С. Амплитудно-частотный анализ возмущенного чандлеровского колебания полюса Земли // Космонавтика и ракетостроение. 2018. № 1 (100). С. 150 – 156.

# Refined low-parametric model of the terrestrial pole motion

**Wai Yan Soe**

*Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI,  
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, A-80, GSP-3, 125993, Russia  
e-mail: [waiyan2032015@gmail.com](mailto:waiyan2032015@gmail.com)*

## **Abstract**

The terrestrial pole oscillations approximation refinement considered in the article allows approximation refining and propagating implementation of the small-parametric double-frequency model of the pole movement to the longer time intervals. Approximation accuracy improving while keeping the same number of the model parameters is of great significance. As far as it is impossible for the time being to predict the amplitudes relationship changing, as well as determine it in real time, the effect will always be detected behind the time, and it will fall on the approximation period for a considerable time, which will negatively affect prediction based on the basic model.

For the modified model, there is no need for the exact definition of the oscillation mode changing, and it is possible to be limited by the analysis of the resulting parameters of the pole modulation process without its subdivision into harmonics to solve the set problem. Establishing of the occurred changing of the average frequency  $\langle \dot{\psi} \rangle_T$  over the harmonics modulation period with the delay to the extent, which is allowed by the  $\psi(t)$  function analysis is quite sufficient. For the modified model, there is no need for the exact definition of the oscillation mode changing, and it is possible to be limited by the analysis of the resulting

parameters of the pole modulation process without its subdivision into harmonics to solve the set problem. Establishing of the occurred changing of the average frequency  $\langle \dot{\psi} \rangle_T$  over the harmonics modulation period with the delay to the extent, which is allowed by the  $\psi(t)$  function analysis is quite sufficient.

**Keywords:** terrestrial pole, Chandler wobble, Earth rotation parameters.

### References

1. *International Earth Rotation and Reference Systems Service*. IERS Annual Reports. URL: <http://www.iers.org>
2. Mank U., Makdonal'd G. *Vrashchenie Zemli* (Earth rotation), Moscow, Mir, 1964, 384 p.
3. Akulenko L.D., Klimov D.M., Markov Yu.G., Perepelkin V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2012, no. 6, pp. 6 - 29.
4. Perepelkin V.V. *Trudy MAI*, 2007, no. 26. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34044>
5. Akulenko L.D., Klimov D.M., Kumakshev S.A. *Doklady RAN*, 2014, vol. 458, no. 5, pp. 547 - 550.
6. Vu Viet Chung. *Trudy MAI*, 2013, no. 69. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43147>
7. Vu Viet Chung. *Trudy MAI*, 2013, no. 69. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43104>

8. Bizouard C., Remus F., Lambert S., Seoane L., and Gambis D. The Earth's variable Chandler wobble, *Astronomy and astrophysics*, 2011, vol. 526 (13), DOI: [10.1051/0004-6361/201015894](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015894)
9. Zotov L., Bizouard C., Shum C.K. A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale, *Geodesy and Geodynamics*, 2016, no. 7. DOI: [10.1016/j.geog.2016.05.005](https://doi.org/10.1016/j.geog.2016.05.005)
10. Sidorenkov N.S. *Fizika nestabil'nostei vrashcheniya Zemli* (Physics of the Earth rotation instabilities), Moscow, Nauka, 2002, 376 p.
11. Schubert G. *Treatise on Geophysics*, 2007, Amsterdam, Elsevier. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01003376643>
12. Zhou Y.H., Salstein D.A, Chen J.L. Revised atmospheric excitation function series related to Earth's variable rotation under consideration of surface topography, *Journal of Geophysical Research*, 2006, vol. 111, D12108. DOI: [10.1029/2005JD006608](https://doi.org/10.1029/2005JD006608)
13. Zotov L., Bizouard C. On modulations of the Chandler wobble excitation, *Journal of Geodynamics*, 2012, no. 62, pp. 30 - 34. DOI: [10.1016/j.jog.2012.03.010](https://doi.org/10.1016/j.jog.2012.03.010)
14. Markov Yu.G., Perepelkin V.V., Krylov S.S. *Doklady RAN*, 2016, vol. 471, no. 6, pp. 665 - 670. DOI: [10.7868/S0869565216360111](https://doi.org/10.7868/S0869565216360111)
15. Barkin M.Yu., Krylov S.S., Perepelkin V.V. Modeling and analysis of the Earth pole motion with nonstationary perturbations, *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1301, issue 1. DOI: [10.1088/1742-6596/1301/1/012005](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1301/1/012005)

16. Bondarenko V.V., Krylov S.S., Perepelkin V.V. The fluctuation perturbations in the model of the Chandler wobble, IOP Conference series: materials science and engineering, 2018, pp. 12 - 16. DOI: [10.1088/1757-899X/468/1/012016](https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012016)
17. Klimov D.M., Akulenko L.D., Shmatkov A.M. *Doklady RAN*, 2015, vol. 464, no. 3, pp. 288 - 292. DOI: [10.7868/S0869565215270092](https://doi.org/10.7868/S0869565215270092)
18. Akulenko L.D., Perepelkin V.V. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2019, no. 5, pp. 142 – 149. DOI: [10.1134/S0572329919050039](https://doi.org/10.1134/S0572329919050039)
19. Perepelkin V.V. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2019, no. 1 (106), pp. 24 - 30.
20. Ananenkova A.A., Krylov S.S., Filippova A.S. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2018, no. 1 (100), pp. 150 – 156.