

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЛОПАСТИ

Татьяна Витальевна ГРИШАНИНА родилась в городе Москве. Профессор МАИ. Доктор физико-математических наук, доцент. Основные научные интересы — в области динамики конструкций летательных аппаратов. Автор 58 научных работ. E-mail: grishaninatat@list.ru.

Tatiana V. GRISHANINA, D.Sci, was born in Moscow. She is currently a Professor at the MAI. Her major research interests are in structural dynamics of flight vehicles. She has published 58 technical papers. E-mail: grishaninatat@list.ru.

Квак Чжэ Хван родился в 1982 г. в Республике Корея. Аспирант МАИ. Основные научные интересы — в области динамики конструкций летательных аппаратов. E-mail: grishaninatat@list.ru.

KWAK Jae Hwan, was born in 1982, in Republic of Korea. He is currently working toward Pt.D degree at the MAI. His research interests are in the structural dynamics of flight vehicles. E-mail: grishaninatat@list.ru.

*На основе метода конечных элементов разработана математическая модель для расчета колебаний вращающейся лопасти в плоскости взмаха. Нелинейные и линеаризованные уравнения колебаний лопасти получены при допущении нерастяжимости упругой оси лопасти. Приведены примеры расчета динамической реакции для случаев абсолютно жесткого и шарнирного соединений лопасти с втулкой несущего винта при кинематическом воздействии на втулку.*

*Mathematical model for calculation of vibrations of a rotating blade in the transverse plane is developed using the finite element method. The nonlinear and linearized equations of the blade vibrations are obtained assuming that the elastic blade axis is nonextensible. The calculation examples of the response are given for the absolutely rigid and hinged connections of the blade and the rotor hub in the case of kinematic impact on the hub.*

**Ключевые слова:** лопасть, метод конечных элементов, нелинейные колебания.

**Key words:** blade, finite element method, nonlinear vibrations.

### Введение

При маневрах, порывах ветра, а также при грубых посадках лопасти вращающегося несущего винта вертолета подвергаются значительным вертикальным нагрузкам, в результате чего они испытывают поперечные колебания с большими амплитудами. Для математического описания таких колебаний необходимо использовать геометрически нелинейную теорию [1].

Применение метода конечных элементов для расчета нелинейных продольно-поперечных колебаний стержней рассмотрено в работах [1-3]. При учете продольных деформаций стержней получают нелинейные уравнения сравнительно простой структуры. Однако их существенным недостатком является плохая вычислительная устойчивость. Это обусловлено тем, что на низкочастотные поперечные колебания, которые являются основными, накладываются высокочастотные продольные вибрации.

В статье при расчете нелинейных поперечных колебаний вращающихся стержней они считаются

нерастяжимыми. Это позволяет исключить высокочастотные продольные вибрации и уменьшить порядок системы, хотя структура уравнений в некоторой степени усложняется.

### Уравнения нелинейных колебаний

Уравнения поперечных колебаний вращающейся гибкой лопасти в плоскости взмаха будем составлять, используя метод конечных элементов в геометрически нелинейной формулировке и считая ось лопасти нерастяжимой. Для этого разделим лопасть на  $n$  балочных конечных элементов (КЭ), испытывающих конечные деформации изгиба и поперечного сдвига в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения, с учетом растягивающих центробежных усилий.

В качестве обобщенных координат будем рассматривать поперечные перемещения  $v_k$  и углы поворота  $\theta_k$  в узлах  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  (рис. 1). При этом распределенную массу лопасти заменим системой сосредоточенных масс  $m_k$ , массовых моментов

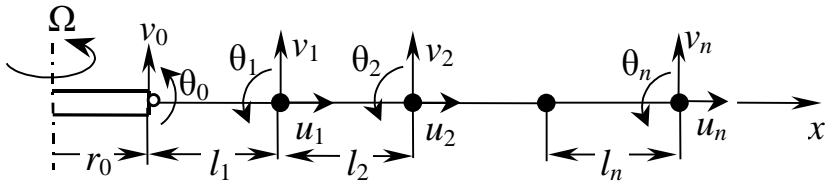


Рис. 1. Схема вращающейся лопасти

инерции  $J_k$  и статических моментов масс  $S_{y,k}$ , расположенных в поперечных сечениях (узлах), разделяющих конечные элементы.

Потенциальная энергия лопасти как системы КЭ получается путем суммирования по всем элементам:

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi_k. \quad (1)$$

Потенциальная энергия  $k$ -го КЭ при поперечных колебаниях с учетом сдвигов и продольной растягивающей силы  $N_k$  будет

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_0^{l_k} [EI_k(\theta')^2 + GF_{c,k}(v' - \theta)^2 + N_k(v')^2] dx, \quad (2)$$

где  $EI_k$ ,  $GF_{c,k}$  — изгибная и сдвиговая жесткости.

Для аппроксимации перемещений КЭ используется точное решение линейной однородной статической задачи для КЭ постоянного поперечного сечения без продольной силы [1]:

$$v(x,t) = v_{k-1}(t)\varphi_0(x) + \theta_{k-1}(t)\psi_0(x) + v_k(t)\varphi_1(x) + \theta_k(t)\psi_1(x); \quad (3)$$

$$\theta(x,t) = v_{k-1}(t)\eta_0(x) + \theta_{k-1}(t)\chi_0(x) + v_k(t)\eta_1(x) + \theta_k(t)\chi_1(x),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1 - (1 - \kappa_k) \frac{x}{l_k} - 3\kappa_k \frac{x^2}{l_k^2} + 2\kappa_k \frac{x^3}{l_k^3}; \\ \psi_0 &= \frac{1 + \kappa_k}{2} x - \frac{1 + 3\kappa_k}{2} \frac{x^2}{l_k} + \kappa_k \frac{x^3}{l_k^2}; \\ \eta_0 &= \frac{d\varphi_0}{dx} + \frac{1 - \kappa_k}{l_k}; \quad \chi_0 = \frac{d\psi_0}{dx} + \frac{1 - \kappa_k}{2}; \\ \kappa_k &= \left( 1 + \frac{12}{l_k^2} \frac{EI_k}{GF_{c,k}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если пренебречь сдвигом, то  $GF_{c,k} \rightarrow \infty$  и  $\kappa_k = 1$ .

Формы деформации КЭ связаны между собой соотношениями

$$\varphi_1 = 1 - \varphi_0; \quad \psi_1 = x - l_k(1 - \varphi_0) - \psi_0; \quad (5)$$

$$\eta_1 = -\eta_0; \quad \chi_1 = 1 + l_k\eta_0 - \chi_0,$$

которые следуют из того, что выражения (5) должны быть справедливы также и в случае недеформируемого КЭ, т.е. в случае, когда элемент перемещается и поворачивается как абсолютно жесткое тело.

Для лопасти с нерастяжимой осью продольная конечная деформация равна нулю:

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}v'^2 = 0. \quad (6)$$

Тогда продольные перемещения КЭ с учетом (3)–(6) выражаются квадратичным образом через поперечные перемещения и углы поворота в узлах:

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} - \left[ \frac{1}{2l_k} (1 + \frac{\kappa_k^2}{5} (v_k - v_{k-1})^2 - \frac{\kappa_k^2}{10} (v_k - v_{k-1}) \times \right. \\ &\quad \times (\theta_k + \theta_{k-1}) + \frac{l_k}{24} (1 + \frac{3}{5} \kappa_k^2) (\theta_k - \theta_{k-1})^2 + \\ &\quad \left. + \frac{\kappa_k^2}{10} l_k \theta_{k-1} \theta_k \right]; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad u_0 = 0. \end{aligned}$$

При этом центробежные растягивающие силы в КЭ определяют из уравнений равновесия отсеченной части лопасти в продольном направлении, пренебрегая продольными инерционными силами  $m_k \ddot{u}_k$  и учитывая только изменения за счет продольных перемещений расстояний от оси вращения до узлов:

$$N_k = \Omega^2 \sum_{i=k}^n m_i (r_i + u_i), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Или их можно определить из уравнений равновесия узлов как

$$N_k = N_{k+1} + \Omega^2 m_k (r_k + u_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$N_n = \Omega^2 m_n (r_n + u_n),$$

где  $r_k = r_0 + \sum_{i=1}^k l_i$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Кинетическую энергию системы  $T$  и вариацию работы внешних нагрузок запишем по методу сосредоточенных масс и сил [1, 2]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [m_k \dot{v}_k^2 + J_k \dot{\theta}_k^2 + 2S_{y,k} \dot{v}_k \dot{\theta}_k];$$

$$\delta A_P = \sum_{k=0}^n [P_{y,k} \delta v_k + M_k \delta \theta_k]. \quad (8)$$

Уравнения колебаний в обобщенных координатах  $v_k, \theta_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) записываются в виде

$$m_k \ddot{v}_k + S_{y,k} \ddot{\theta}_k + Y_k - Y_{k+1} = P_{y,k};$$

$$S_{y,k} \ddot{v}_k + J_k \ddot{\theta}_k + L_k - L_{k+1} - Y_{k+1} l_{k+1} + N_{k+1} (v_{k+1} - v_k) = M_k. \quad (9)$$

В эти уравнения наряду с продольным усилием  $N_k$  (7) входят поперечная сила  $Y_k$  и изгибающий момент  $L_k$  на правом конце  $k$ -го КЭ (у  $k$ -го узла), которые определяются по формулам

$$Y_k = b_k (v_k - v_{k-1}) - c_k \theta_{k-1} - d_k \theta_k;$$

$$L_k = -c_k (v_k - v_{k-1}) + (c_k l_k - d_k) \theta_{k-1} + d_k \theta_k, \quad (10)$$

где

$$b_k = \frac{12EI_k \kappa_k}{l_k^3} + \frac{N_k}{l_k} \left(1 + \frac{\kappa_k^2}{5}\right); \quad c_k = \frac{6EI_k \kappa_k}{l_k^2} + N_k \frac{\kappa_k^2}{10};$$

$$d_k = \frac{(1 + 3\kappa_k)EI_k}{l_k} + N_k \frac{l_k}{12} \left(1 + \frac{3}{5}\kappa_k^2\right).$$

Если при вычислении центробежных сил не учитывать продольные перемещения лопасти

( $N_k \rightarrow N_k^0 = \Omega^2 \sum_{i=k}^n m_i r_i$ ), то получаются линеаризованные уравнения колебаний.

### Пример расчета

В качестве примера рассмотрим колебания вращающейся лопасти при быстром вертикальном перемещении втулки (узла  $k = 0$ ) по закону  $v_0(t) = \delta_0 \sin \pi t / T$  при  $t \leq T$  и  $v_0 \equiv 0$  при  $t > T$ . При этом соединение лопасти с втулкой будем рассматривать в двух вариантах: как жесткое и шарнирное.

Примем следующие значения параметров лопасти:

$$L = 4 \text{ м}, \quad r_0 = 0,1 \text{ м}, \quad m_0 = 5 \text{ кг}, \quad J_0 = 0,3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$m_k = 10 \text{ кг}, \quad J_k = 0,6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad EI_k = 2 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}^2, \quad \kappa_k = 1,$$

$$GF_{c,k} \rightarrow \infty, \quad \delta_0 = 1 \text{ м}, \quad \Omega = 10 \text{ с}^{-1}, \quad T = 0,25 \text{ с},$$

$$S_{y,k} = 0, \quad P_{y,k} = 0, \quad M_k = 0.$$

При расчете лопасть разбивалась на четыре одинаковых КЭ.

На рис. 2 и 3 приведены графики изменений прогибов и углов поворотов на конце лопасти при её жестком соединении с втулкой, а на рис. 4 и 5

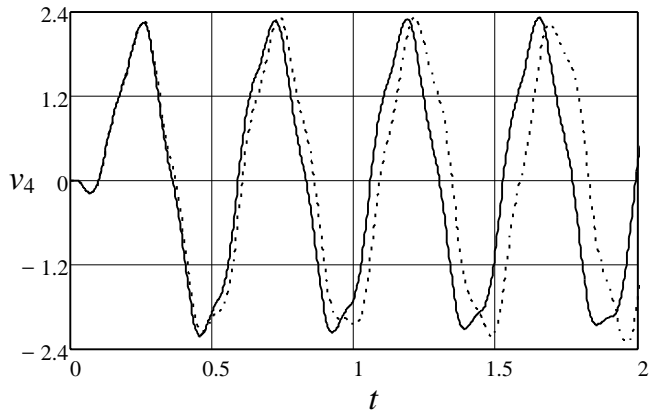


Рис. 2. График прогиба на конце лопасти при жестком соединении с втулкой

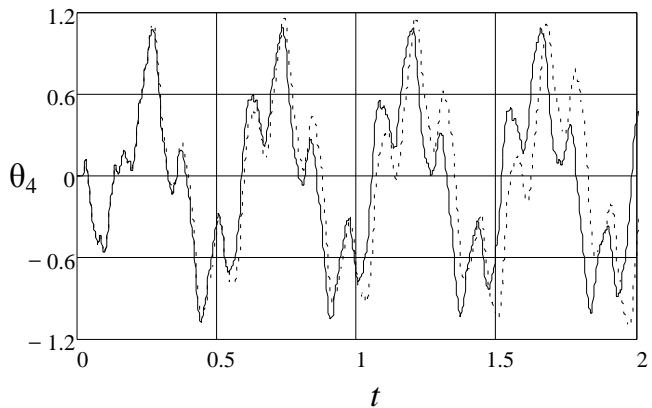


Рис. 3. График угла поворота на конце лопасти при жестком соединении с втулкой

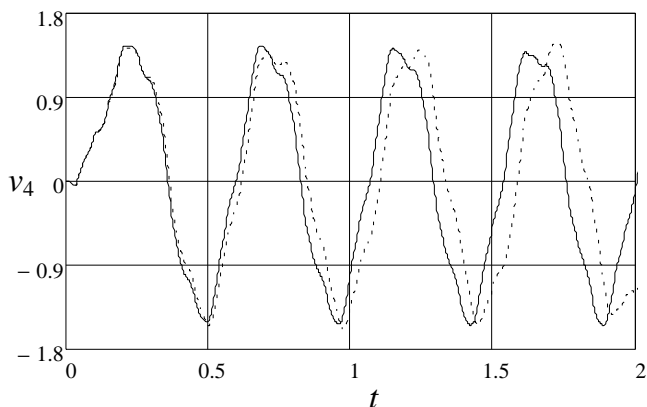


Рис. 4. График прогиба на конце лопасти при шарнирном соединении с втулкой

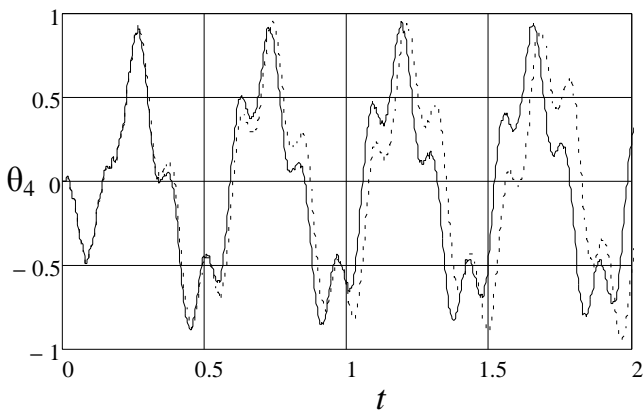


Рис. 5. График угла поворота на конце лопасти при шарнирном соединении с втулкой

— при шарнирном соединении. Сплошными линиями показаны решения, полученные на основе линеаризованных уравнений, а пунктирными — с учетом нелинейности.

### Выводы

Разработана новая математическая модель для расчета нелинейных поперечных колебаний вращающегося гибкого нерастяжимого стержня, представляющего лопасть, по методу конечных элементов. При этом продольные перемещения выражаются квадратично через поперечные перемещения

и углы поворота в узлах стержня. Представлены примеры расчета нестационарных колебаний вращающегося стержня на основе полученных нелинейных и линеаризованных уравнений со сравнением результатов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09-01-00381, 09-08-00602).*

### Библиографический список

1. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Нелинейные и параметрические колебания упругих систем. — М.: Изд-во МАИ, 1993.
2. Гришанина Т.В. Задачи по теории колебаний упругих систем. — М.: Изд-во МАИ, 1998.
3. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. — М.: Изд-во МАИ, 2007.

Московский авиационный институт  
Статья поступила в редакцию 18.11.2009

Сдано в набор 16.11.09. Подписано в печать 25.12.09.  
Бумага офсетная. Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 34,88. Уч.-изд. л. 37,50. Тираж 210 экз.  
Заказ 4401/287.

Издательство МАИ-ПРИНТ  
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993  
Типография Издательства МАИ  
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993