

УДК 536.2

Процессы теплопереноса в твердом теле с поглощающим включением при воздействии лазерного излучения

А.В. Аттетков, И.К. Волков, К.А. Гайдаенко

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Москва, 105005, Россия
e-mail: kseniyagaydaenko@gmail.com

Поступила в редакцию 06.02.2019

После доработки 12.02.2019

Принята к публикации 15.02.2019

Рассмотрена задача об определении температурного поля прозрачного для излучения изотропного твердого тела, содержащего поглощающее сферическое включение. Реализуемая математическая модель – модель «сосредоточенная емкость» – представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа со специфическим краевым условием, фактически учитывающим наличие поглощающего включения в анализируемой системе. Предложен приближенный аналитический метод решения соответствующей задачи нестационарной теплопроводности, основанный на применении смешанного интегрального преобразования Фурье по пространственному переменному. Полученные результаты использованы при анализе температурного поля объекта исследований в условиях воздействия потока излучения постоянной плотности мощности.

Ключевые слова: изотропное твердое тело, лазерное излучение, поглощающее сферическое включение, температурное поле, смешанное интегральное преобразование Фурье.

Введение

В математической теории теплопроводности [1–4] важное место занимает математическая модель процесса формирования температурного поля в прозрачном для излучения изотропном пространстве с поглощающим сферическим включением (далее – сферическим очагом разогрева). Особый интерес она представляет в теоретических исследованиях по проблеме лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов [5–11].

В работах [5–7] анализируется упрощенный аналог рассматриваемой математической модели, базирующейся на стандартном предположении об идеальности теплового контакта в системе и гипотезе о «предельно большой теплопроводности поглощающего сферического включения», что фактически означает возможность реализации математической модели термически тонкого тела [12].

Возможна и другая трактовка анализируемой модели, базирующаяся на гипотезе о возможности приравнивания среднеинтегральной температуры поглощающего сферического включения температуре границы изучаемой системы, т.е. на реализации математической модели «сосредоточенная емкость» [13]. Данный подход позволяет дать математическую интерпретацию и развивать саму идею «сосредоточенная емкость», а также идентифицировать достаточные условия применимости анализируемой модели [14].

Цель проведенных исследований – разработка приближенного аналитического метода решения задачи теплопереноса в изотропном твердом теле с поглощающим сферическим включением при воздействии лазерного излучения.

Исходная математическая модель и ее преобразование

В качестве объекта исследований рассматривается изотропное пространство с инертным

включением сферической формы радиуса r_0 . На объект исследований воздействует поток излучения с плотностью мощности q , для которого он абсолютно прозрачен, но может поглощаться сферическим включением.

В предположении, что тепловой контакт в анализируемой системе является идеальным, математическая модель процесса формирования температурного поля объекта исследований может быть представлена в следующем виде [14]:

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}, \quad \rho > 1, Fo > 0;$$

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \chi \left\{ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} + \Lambda f(\rho, Fo) \right\},$$

$$0 \leq \rho < 1, Fo > 0;$$

$$\theta(\rho, 0) = 0; \tag{1}$$

$$\theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=1-0} = \theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=1+0};$$

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1-0} = \Lambda \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1+0};$$

$$\theta(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} \in L^2_{\rho^2} [0, +\infty),$$

где последнее условие означает, что при каждом фиксированном значении $Fo \geq 0$ функция $\theta(\rho, Fo)$ интегрируема с квадратом и весом ρ^2 по радиальному переменному $\rho \in [0, +\infty)$.

В математической модели (1) использованы следующие безразмерные переменные и параметры:

$$Fo = \frac{a_1 t}{r_0^2}; \quad \rho = \frac{r}{r_0}; \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0};$$

$$\chi = \frac{a_2}{a_1}; \quad \Lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad f = \frac{qr_0}{\lambda_1 (T_* - T_0)},$$

где r – радиус; t – время; T – температура; λ – теплопроводность; a – температуропроводность; T_* – масштабная температура; индексы: 1 – изотропное пространство; 2 – сферический очаг разогрева; 0 – начальное значение.

Для достижения основной цели исследований реализуем в математической модели (1) идею «сосредоточенная емкость» [13], т.е. будем предполагать, что среднеинтегральная температура поглощающего включения

$$\langle \theta(Fo) \rangle = 3 \int_0^1 \theta(\rho, Fo) \rho^2 d\rho \tag{2}$$

равна температуре контактной границы анализируемой системы:

$$\theta(1-0, Fo) = \langle \theta(Fo) \rangle = \theta(1+0, Fo), \quad Fo \geq 0. \tag{3}$$

Умножив левую и правую часть второго уравнения в (1) на три с последующим интегрированием по радиальному переменному ρ в пределах от 0 до 1, воспользовавшись условиями сопряжения при $\rho = 1$, условием принадлежности искомой функции заданному классу функций и равенствами (2), (3), преобразуем базовую математическую модель (1) к виду:

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}, \quad \rho > 1, Fo > 0;$$

$$\theta(\rho, 0) = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = -Q(Fo) + \varepsilon \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\rho=1};$$

$$\theta(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} \in L^2_{\rho^2} [1, +\infty),$$

где

$$Q(Fo) \triangleq \int_0^1 f(\rho, Fo) \rho^2 d\rho;$$

$\varepsilon = (3\chi\Lambda)^{-1} = (3c_1\gamma_1)^{-1}(c_2\gamma_2)$ – определяющий безразмерный параметр; c – удельная массовая теплоемкость; γ – плотность.

Математическая модель (4) – модель «сосредоточенная емкость» – представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных параболического типа, наличие поглощающего включения в которой фактически учитывается краевым условием при $\rho = 1$, явно содержащим производную безразмерной температуры по переменному Fo .

Определяющий параметр ε реализуемой математической модели является малым положительным параметром.

Для упрощения дальнейших рассуждений, воспользовавшись стандартным приемом [1], введем функцию

$$V(\rho, Fo) \triangleq \rho \theta(\rho, Fo) \tag{5}$$

и новое пространственное переменное

$$X \triangleq \rho - 1. \tag{6}$$

Тогда математическая модель (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(X, Fo)}{\partial Fo} &= \frac{\partial^2 V(X, Fo)}{\partial X^2}, \quad X > 0, Fo > 0; \\ V(X, 0) &= 0; \\ \left. \frac{\partial V(X, Fo)}{\partial X} \right|_{X=0} &= \\ &= V(X, Fo) \Big|_{X=0} - Q(Fo) + \varepsilon \left. \frac{\partial V(X, Fo)}{\partial Fo} \right|_{X=0}; \\ V(X, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} &\in L^2[0, +\infty). \end{aligned} \quad (7)$$

Аналитическое решение задачи (7) может быть получено как путем применения интегрального преобразования Лапласа по временному переменному Fo [1–3], так и смешанного интегрального преобразования Фурье по пространственному переменному X [17, 18], рассматривая специфическое краевое условие при X = 0 задачи (7) как аналог граничного условия третьего рода смешанной задачи для уравнения в частных производных параболического типа.

Аналитически замкнутая форма представления решения смешанной задачи (7), основанного на применении интегрального преобразования Лапласа и стандартной техники вычисления интеграла Меллина, получена в [14]. В данной работе предложен приближенный аналитический метод решения задачи, основанный на применении смешанного интегрального преобразования Фурье по пространственному переменному, более удобный с точки зрения и его практической реализации, и проведения теоретических оценок влияния поглощающего включения на формируемое температурное поле анализируемой системы при воздействии лазерного излучения.

При этом естественно предполагать, что функция Q(Fo) удовлетворяет стандартным требованиям теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи [15].

Температурное поле

С учетом высказанных предположений решение задачи (4) можно представить в виде разложения по малому параметру ε [16]:

$$V(X, Fo) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(X, Fo) \varepsilon^k, \quad X \geq 0, Fo \geq 0, \quad (8)$$

где для каждого фиксированного значения k = {0, 1, 2, ...} функция W_k(X, Fo) является решением смешанной задачи для уравнения в частных производных параболического типа.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_k(X, Fo)}{\partial Fo} &= \frac{\partial^2 W_k(X, Fo)}{\partial X^2}, \quad X > 0, Fo > 0; \\ W_k(X, 0) &= 0; \\ \left. \frac{\partial W_k(X, Fo)}{\partial X} \right|_{X=0} &= \end{aligned} \quad (9)$$

$$= W_k(X, Fo) \Big|_{X=0} - \begin{cases} Q(Fo), & k = 0; \\ -f_k(Fo), & k \geq 1; \end{cases}$$

$$W(X, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} \in L^2[0, +\infty),$$

где

$$f_k(Fo) = \left. \frac{\partial W_{k-1}(X, Fo)}{\partial Fo} \right|_{X=0}, \quad k \geq 1. \quad (10)$$

Заметим, что обоснование корректности представления (8) может быть получено из содержательного анализа задач (9), (10) с последующим обоснованием равномерной сходимости функционального ряда с общим членом W_k(X, Fo)ε^k.

Для нахождения решений задач (9), (10) воспользуемся смешанным интегральным преобразованием Фурье [17, 18] по пространственному переменному X ∈ [0, +∞), задаваемым парой линейных операторов

$$\begin{aligned} u_k(p, Fo) &\triangleq \Phi[W_k(X, Fo)] \equiv \\ &\equiv \int_0^{\infty} W_k(X, Fo) K(X, p) dX; \\ W_k(X, Fo) &= \Phi^{-1}[u_k(p, Fo)] \equiv \\ &\equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u_k(p, Fo) K(X, p) \frac{p^2 dp}{p^2 + 1}, \end{aligned} \quad (11)$$

с параметром p ∈ ℝ и ядром интегрального преобразования

$$K(X, p) = \cos(pX) + \frac{1}{p} \sin(pX). \quad (12)$$

В пространстве изображений используемого интегрального преобразования решение задачи (9), (10) имеет вид:

$$u_0(p, Fo) = \int_0^{Fo} Q(\tau) \exp\{-p^2(Fo - \tau)\} d\tau; \quad (13)$$

$$u_k(p, Fo) = - \int_0^{Fo} f_k(\tau) \exp\{-p^2(Fo - \tau)\} d\tau, \quad k \geq 1,$$

где функция $f_k(\tau)$ определена равенством (10).

Аналитически замкнутая форма представления решения $W_k(X, Fo)$ задачи (9), (10) для каждого фиксированного значения $k = \{0, 1, 2, \dots\}$ следует из (13), если воспользоваться формулой обращения сингулярного интегрального преобразования (11), (12):

$$W_k(X, Fo) = \Phi^{-1}[u_k(p, Fo)], \quad X \geq 0, Fo \geq 0, \quad (14)$$

где при каждом фиксированном значении $Fo \geq 0$ равенство (14) понимается в смысле евклидовой нормы $L^2[0, +\infty)$. Для завершения процедуры нахождения решения задачи (1) достаточно воспользоваться разложением (8) и равенствами (5), (6).

Результаты и обсуждение

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим простейшую ситуацию $Q(Fo) = Q_0 - \text{const}$, ассоциируемую с воздействием на объект исследований потока излучения постоянной плотности мощности. Дальнейший анализ ограничим нахождением приближенного решения для функции $V(X, Fo)$ с точностью $o(\varepsilon)$, полагая

$$V(X, Fo) = W_0(X, Fo) + \varepsilon W_1(X, Fo), \quad X \geq 0, Fo \geq 0,$$

где $o(\varepsilon)$ – величина более высокого порядка малости по отношению к ε ;

$$W_0(X, Fo) = \frac{2Q_0}{\pi} \int_0^\infty \{1 - \exp\{-p^2 Fo\}\} \times \\ \times K(X, p) \frac{dp}{p^2 + 1}, \quad X \geq 0, Fo \geq 0;$$

$$W_1(X, Fo) = - \frac{2Q_0}{\pi} \times \\ \times \int_0^{Fo} \int_0^\infty \exp[-p^2(Fo - \tau)] K(X, p) \frac{p^2 dp}{p^2 + 1} f_1(\tau) d\tau, \\ X \geq 0, Fo \geq 0;$$

$$f_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - \exp(\tau) \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau}); \quad (15)$$

ядро $K(X, p)$ используемого интегрального преобразования определено равенством (12); $\operatorname{erfc}(\cdot)$ – дополнительная функция ошибок Гаусса [2].

Безразмерная температура границы поглощающего включения $\theta(1, Fo) \triangleq V(1, Fo)$ в системе координат (X, Fo) определяется как

$$V(0, Fo) = W_0(0, Fo) + \varepsilon W_1(0, Fo), \quad Fo \geq 0; \quad (16)$$

$$W_0(0, Fo) = Q_0 \{1 - \exp(Fo) \operatorname{erfc}(\sqrt{Fo})\};$$

$$W_1(0, Fo) = -Q_0 \times \\ \times \int_0^{Fo} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(Fo - \tau)}} - \exp(Fo - \tau) \operatorname{erfc}(\sqrt{Fo - \tau}) \right\} \times \\ \times f_1(\tau) d\tau;$$

функция $f_1(\tau)$ определена равенством (15).

Влияние факта наличия поглощающего включения на температурный профиль его границы характеризует функция $\varepsilon W_1(0, Fo)$, в первом приближении согласно (16) определяемая как

$$V(0, Fo) - W_0(0, Fo) \approx \varepsilon W_1(0, Fo), \quad Fo \geq 0,$$

а относительная погрешность этого первого приближения имеет вид:

$$\delta(Fo) = \varepsilon W_0^{-1}(0, Fo) |W_1(0, Fo)|, \quad Fo \geq 0.$$

Результаты расчетов, иллюстрирующие временную зависимость относительной погрешности $\varepsilon^{-1} \delta(Fo)$ первого приближения, показаны на рисунке. Их анализ указывает на возможность использования упрощенного аналога реализуемой математической модели – «усеченной мо-

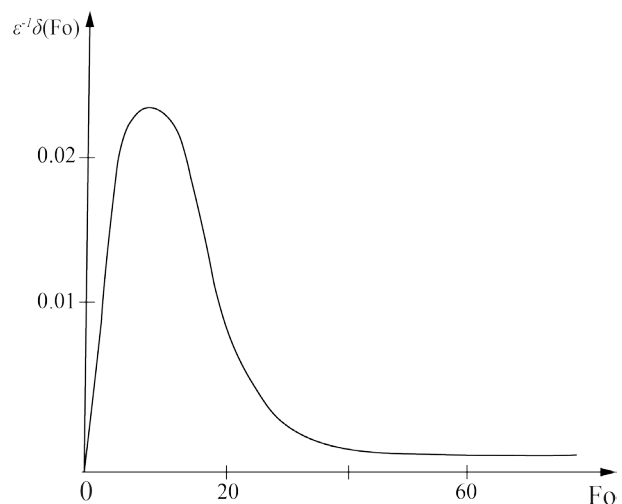


График зависимости относительной погрешности первого приближения от числа Фурье

дели сосредоточенной емкости» [14] – при анализе температурного поля объекта исследований в нестационарных (импульсных) режимах воздействия лазерного излучения, формально полагая $\varepsilon = 0$ в краевом условии при $\rho = 1$ математической модели (4). Так, например, в импульсном режиме воздействия лазерного излучения

$$Q(Fo) = Q_0^{(1)} \left\{ J(Fo) - J(Fo - Fo^*) \right\} + Q_0^{(2)} J(Fo - Fo^*),$$

где $Q_0^{(1)}$, $Q_0^{(2)}$ – положительные постоянные, Fo^* – длительность первой фазы воздействия потока излучения, $J(\cdot)$ – единичная функция Хевисайда [2], аналитическое представление функции $\theta(1, Fo) \triangleq V(1, Fo)$ в системе координат (X, Fo) определяется как

$$V(0, Fo) = Q_0^{(1)} \left\{ 1 - \exp(Fo) \operatorname{erfc}(\sqrt{Fo}) \right\} \times J(Fo) + \left[Q_0^{(2)} - Q_0^{(1)} \right] \times \left\{ 1 - \exp(Fo - Fo^*) \operatorname{erfc}(\sqrt{Fo - Fo^*}) \right\} \times J(Fo - Fo^*), \quad Fo \geq 0$$

и справедлива следующая асимптотическая оценка при больших значениях числа Фурье:

$$V(0, Fo) \sim Q_0^{(2)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi Fo}} \right)_{Fo \rightarrow +\infty} \Rightarrow Q_0^{(2)}.$$

Заключение

Предложена математическая модель «сосредоточенная емкость» процесса формирования температурного поля прозрачного для излучения изотропного твердого тела с поглощающим сферическим включением. Реализуемая модель представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных параболического типа, наличие поглощающего включения в которой фактически учитывается специфическим краевым условием на его границе.

Разработан приближенный аналитический метод решения рассматриваемой задачи нестационарной теплопроводности, основанный на применении смешанного интегрального преобразования Фурье по пространственному переменному. Представлена теоретическая оценка влияния поглощающего включения на форми-

руемое температурное поле при воздействии на объект исследований потока излучения постоянной плотности мощности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 448с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Каргашов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
4. Формалёв В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.
5. Ассовский И.Г. Физика горения и внутренняя баллистика. М.: Наука, 2005. 357 с.
6. Чернай А.В. О механизме зажигания конденсированных вторичных ВВ лазерным импульсом // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32. №1. С. 11–19.
7. Буркина Р.С., Морозова Е.Ю., Ципилев В.П. Иницирование реакционно-способного вещества потоком излучения при его поглощении оптическими неоднородностями вещества // Физика горения и взрыва. 2011. Т. 47. №5. С. 95–105.
8. Кригер В.Г., Каленский А.В., Звекоев А.А., Зыков И.Ю., Никитин А.П. Процессы теплопереноса при лазерном разогреве включений в инертной матрице // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. №3. С. 375–382.
9. Адуев Б.П., Ананьина М.В., Звекоев А.А., Каленский А.В., Кригер В.Г., Никитин А.П. Микроочаговая модель лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов с учетом плавления // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50. №6. С. 92–99.
10. Каленский А.В., Звекоев А.А., Никитин А.П. Микроочаговая модель с учетом зависимости коэффициента эффективности поглощения лазерного импульса от температуры // Химическая физика. 2017. Т. 36. №4. С. 43–49.
11. Аттетков А.В., Гайдаенко К.А. Процессы теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2017. 43 с.
12. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
13. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.
14. Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А. Процессы теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим сферическим включением // Труды седьмой Российской национальной конференции по теплообмену: в 3 томах. Т. 3. М., 2018. С. 7–11.
15. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
16. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
17. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
18. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 228 с.

Heat transfer processes in a solid with absorbing inclusion while the laser radiation impact

A.V. Attetkov, I.K. Volkov, K.A. Gaydaenko

Bauman Moscow State Technical University(National research university), Moscow, 105005, Russia
e-mail: kseniyagaydaenko@gmail.com

The article considers the problem of determining of temperature field of the isotropic solid with spherical inclusion while laser radiation impact. The analyzed mathematical model of the heat transfer process in the system under study is based on the hypothesis on the possibility of equating the average integrated temperature of the inclusion to its contact boundary temperature, i.e. on realization of the idea of the “cumulative capacitance”. It represents a mixed problem for the linear equation in partial derivatives of the second order parabolic type with specific edge condition, actually accounting for the absorbing inclusion presence in the system. The approximate analytical method, employing integral representation of the considered heat transfer problem, was proposed. The idea of solution representation in the form of the key small-parameter expansion of the mathematical model being realized, namely, the simplex of similarity of physical properties of the system being analyzed with further employing of mixed Fourier transform on the spatial variable for obtaining the sought-after functions, lies in the basis of the above said method. The article demonstrates that the proposed method is the most convenient in terms of its practical realizability while performing parametrical analysis of the temperature field of the object under study. The obtained results were used for theoretical evaluation of the absorbing scenic inclusion impact on temperature field being formed while the object under study was affected by the radiation of constant power density.

Keywords: isotropic solid, laser radiation, absorbing spherical inclusion, temperature field, mixed Fourier integral transform.

REFERENCES

1. **Karslou G., Eger D.** *Teploprovodnost' tvorydyh tel* [Thermal conductivity of solids]. Moscow: Nauka, 1964. 488 p. In Russ.
2. **Lykov A.V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. In Russ.
3. **Kartashov E.M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvorydyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
4. **Formalev V.F.** *Teploprovodnost' anizotropnyh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. Moscow: Fizmatlit, 2014. 312 p. In Russ.
5. **Assovsky I.G.** *Fizika gorennya i vnutrennyaya ballistika* [Combustion physics and internal ballistics]. Moscow: Nauka, 2005. 357 p. In Russ.
6. **Chernai A.V.** On the mechanism of ignition of condensed secondary explosives by a laser pulse. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1996, vol. 32, no. 1, pp. 8–15.
7. **Burkina R.S., Morozova E.Y., Tsipilev V.P.** Initiation of a reactive material by a radiation beam absorbed by optical heterogeneities of the material. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2011, vol. 47, no. 5, pp. 581–590.
8. **Kruger V.G., Kalenskii A.V., Zykov I.Y., Nikitin A.P., Zvekov A.A.** Heat-transfer processes upon laser heating of inert-matrix-hosted inclusions. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2013, vol. 20, no.3, pp. 367–374.
9. **Aduv B.P., Anan'eva M.V., Zvekov A.A., Kalenskii A.V., Kriger V.G., Nikitin A.P.** Miro-hotspot model for the laser initiation of explosive decomposition of energetic materials with melting taken into account. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 704–710.
10. **Kalensky A.V., Zvekov A.A., Nikitin A.P.** Mikroochagovaya model' s uchetom zavisimosti koeffitsienta effektivnosti pogloshheniya lazernogo impul'sa ot temperatury [Micro-focal model taking into account the dependence of the efficiency coefficient of a laser pulse absorption on temperature]. *Khimicheskaya fizika – Chemical Physics*, 2017, vol. 36, no. 4, pp. 43–49. In Russ.
11. **Attetkov A.V., Gaydayenko K.A.** *Protsessy teploperenosa v tverdom tele so sfericheskim ochagom razogreva* [Processes of heat transfer in a solid with a spherical heating center]. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2017. 52 c. In Russ.
12. **Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N.** *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoj sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continua]. Moscow: Publishing house Bauman, 2008. 512 p. In Russ.
13. **Pudovkin M.A., Volkov I.K.** *Kraevye zadachi matematicheskoy teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh polej v neftyanykh plastakh pri zavodnenii* [Boundary-value problems of the mathematical theory of heat conduction in application to calculations of temperature fields in oil reservoirs in water flooding]. Kazan: Publishing house of Kazan University, 1978. 188 p. In Russ.
14. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaidenko K.A.** *Protsessy teploperenosa v prozrachnom dlya izlucheniya tverdom tele s pogloshhayushhim sfericheskim vkladyeniem* [Heat transfer processes in a radiation-transparent solid with absorbing spherical inclusion]. *Trudy Sed'moj Rossijskoj natsional'noj konferentsii po teploobmenu – Proceedings of the Seventh Russian National Conference on Heat Exchange*, Moscow, 2018, vol. 3, pp. 7–11. In Russ.
15. **Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.** *Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. Moscow, Nauka, 1967. 736 p. In Russ.
16. **Nayfeh A.H.** *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley, New York, 1981. 536 p. (Russ. ed. Nayfeh A. Vvedenie v metody vozmushhenij. Moscow: Mir, 1984. 535 p.)
17. **Naimark M.A.** *Linejnye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow: Nauka, 1969. 528 p. In Russ.
18. **Volkov I.K., Kanatnikov A.N.** *Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie* [Integral transformations and operational calculus]. Moscow: Publishing house Bauman, 2015. 228 p. In Russ.