

Угловые колебания твердого тела с двухслойной жидкостью вблизи основного резонанса

Вин Ко Ко*, Темнов А.Н.**

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,

2-ая Бауманская ул.,5, Москва, 105005, Россия

**e-mail: win.c.latt@gmail.com*

***e-mail: antt45@mail.ru*

Статья поступила 09.06.2021

Аннотация

В статье рассмотрена задача в нелинейной постановке о колебаниях твердого тела с осесимметричной полостью вокруг горизонтальной оси ОУ и полностью заполненной двумя идеальными и несжимаемыми жидкостями. Получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие нелинейные колебания твёрдого тела и поверхности раздела двух жидкостей в окрестности основного резонанса колебаний жидкостей. Для сосуда круглой цилиндрической формы гидродинамическая нелинейная задача сведена к последовательному решению линейных краевых задач. Полученные решения краевых задач в виде цилиндрических функций использовались для вычисления линейных и нелинейных гидродинамических коэффициентов в уравнениях колебаний рассматриваемой механической системы.

Ключевые слова: механическая система, цилиндрическая полость, гидродинамические коэффициенты, основной резонанс, возмущенная поверхность, вращательное движение.

Введение

Нелинейные задачи динамики твёрдого тела, имеющего полость, наполненную несколькими жидкостями, представляют значительный прикладной и теоретический интерес.

В работах [1-2] исследуется проблема о движениях двухслойной тяжелой жидкости, и решена задача об управлении движением сосуда с финальным условием гашения внутренних волн жидкости. Также исследуется задача о колебаниях твердого тела, имеющего прямоугольную полость и упруго скреплённой с неподвижным основанием. В работе [3] экспериментально изучается динамика границы раздела двух несмешивающихся жидкостей различной плотности в горизонтальной цилиндрической полости при вращении. Рассматривается методика измерения амплитуды колебаний границы раздела, и проводится сравнение экспериментальных значений с теоретическими.

В работе [4] изучается задача о малых движениях и нормальных колебаниях системы из двух тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, частично заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкой, а верхняя идеальной.

В работах [5] было получено уравнение, обобщающее известное уравнение Гарднера, описывающее волны деформации с помощью асимптотических методов

решения связанной задачи гидроупругости, включающей уравнения динамики геометрически нелинейной вязкоупругой оболочки, окруженной упругой средой с учетом уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, находящейся внутри оболочки, с соответствующими граничными условиями. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы и получаемая разностная схема, автоматически обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из базовых конечных объемов.

В работах [6] были рассмотрены параметрические колебания жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд. Показана возможность возбуждения малых симметричных колебаний в системе с демпфированием. Методом Ван дер Поля определяется численное значение коэффициента модуляции, определяются границы зоны неустойчивости.

В работах [7] было исследовано взаимодействие трехслойной пластины с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости. Поставлена и аналитически решена задача о продольных и изгибных гидроупругих колебаниях трехслойной пластины. Решение получено для режима установившихся гармонических колебаний с учетом нормальных и касательных напряжений, действующих со стороны жидкости на несущий слой пластины, находящейся в контакте с жидкостью. Определены гидродинамические параметры слоя жидкости, перемещения слоев пластины. Построены частотозависимые функции распределения амплитуд перемещений слоев пластины и давления в слое вязкой жидкости.

Особенности линейных и нелинейных колебаний однородной жидкости, частично заполняющей полость подвижного и неподвижного твердого тела, рассмотрены в книгах [8, 9, 10, 11]. В работе [12] исследуются нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы.

В работе [13] выведены частотные уравнения собственных колебаний двухслойной жидкостей в прямом круговом цилиндре с мембранами, расположенными на “свободной” и внутренних поверхностях жидкости.

В работах [14, 15] рассмотрены свободные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде, также регуляризация баротропных гравитационных волн в двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде.

Из иностранных работ отметим статьи по нелинейным колебаниям двухслойной жидкости [16, 17], в которых кроме теоретических результатов приведено исследование на экспериментальной установке, состоящей из осциллирующего бака, наполненного двумя слоями несмешивающихся жидкостей. Математическая модель в этих работах получена в результате применения вариационного подхода Лагранжа.

В работах [18, 19, 20] были исследованы нелинейные эффекты колебания двухслойной жидкости, полностью заполняющей ограниченный объём и в результате построены области неустойчивости вынужденных колебаний двухслойной жидкости в цилиндрическом бак.

В работе [21] рассматривается стационарное двумерное течение в двухслойной жидкости под действием силы тяжести и поверхностного натяжения.

Верхняя жидкость ограничена сверху свободной поверхностью, а нижняя жидкость ограничена снизу жестким дном. Предполагается, что жидкости являются невязкими, а поток-ирротационным в каждом слое. Уединенные волновые решения полностью нелинейной задачи найдены с использованием метода граничных интегралов, основанного на интегральной формуле Коши. Когда поверхностное натяжение присутствует на обеих поверхностях, вычисляются внефазные одиночные волны.

В работе [22] были исследованы колебания свободной поверхности жидкости во вращающемся, боково колеблющемся цилиндрическом сосуде. В экспериментах независимо изменена как частота бокового воздействия f , так и частота вращения Ω цилиндра. Также было измерено зависящее от времени гидродинамическое давление вместо колебаний свободной поверхности. Из анализа БПФ динамического давления были получены две значимые частоты: $f - \Omega$ и $f + \Omega$. Они связаны, соответственно, с волнами, которые вращаются в одном и том же направлении, и в противоположное направление, относительно вращения судна. В данной статье изучены результаты с использованием теории линеаризованных волн.

Целью настоящей работы является составление и анализ уравнений колебательных движений твердого тела с полостью, которая целиком заполнена двумя жидкостями, совершающими нелинейные колебания.

1. Постановка задачи

Рассматривается круглый цилиндрический сосуд, полностью заполненный двумя несмешивающимися жидкостями, который совершает колебания вокруг

неподвижной оси OY . Связанную с твердым телом систему координат $OXYZ$ расположим так, чтобы в невозмущенном положении механической системы тело-жидкости ось OX была перпендикулярна невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0 . Движение твердого тела вокруг оси OY будем определять с помощью угловой координаты θ , вектор угловой скорости вращения $\vec{\omega}_2$ относительно оси OY запишется в виде $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta} \vec{j}$, $\theta(t) = \theta_0 \sin pt$.

Введем систему координат $oxuz$, в которой поле массовых сил, действующих на твердое тело с двумя жидкостями, имеет потенциальную функцию $U = -\vec{g} \cdot \vec{r}$, $\vec{R} = H\vec{e}_1 + \vec{r}$, где H - расстояние от оси вращения до поверхности раздела жидкостей; \vec{g} - вектор ускорения свободного падения; \vec{R} - радиус-вектор проведенный из точки O , связанной с телом. Плоское днища бака S_2 определяется координатой ($x = -h_2$), крышка бака S_1 определяется координатой ($x = h_1$), от поверхности раздела Γ_0 ($x = 0$), радиус цилиндрической боковой поверхности $r = r_0$ (см. рис. 1).

Рассматриваемую задачу удобно решать в цилиндрической системе координат x, r, η , связанной с декартовой x, y, z , следующими формулами: $X = H - x$, $Y = y = r \cos \eta$, $Z = z = r \sin \eta$. Жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 предполагаются идеальными и несжимаемыми.

Смоченные поверхности полости обозначим через $S^{(k)}$ ($k = 1, 2$), а возмущенную поверхность раздела жидкостей-через Γ (см. рис. 1).

Вектор абсолютной скорости произвольной точки бака имеет вид

$$\vec{V}_a = \vec{\omega}_2 \times \vec{R}. \quad (1)$$

Движения каждой жидкости будем считать потенциальным, удовлетворяющим уравнениям Лапласа, граничным условиям непротекания на смачиваемых поверхностях, кинематическим условиям и динамическим условиям на поверхности раздела

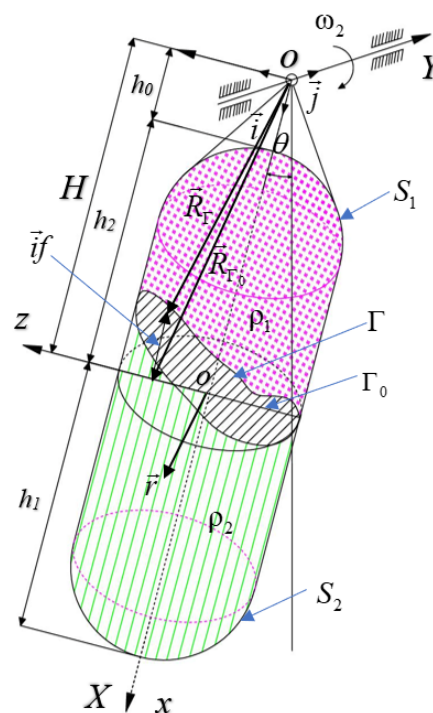


Рис. 1. Системы координат и основные обозначения для движущегося тела с двухслойной жидкостью

Потенциалы скоростей $\Phi^{(k)}$ каждой жидкости можно записать в виде следующей суммы:

$$\Phi^{(k)}(x, r, \eta, t) = \omega_2 A^{(k)}(x, r, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) B_i^{(k)}(x, r, \eta), \quad (k = 1, 2), \quad (2)$$

где $A^{(k)}$ - гармонические скалярные функции, $B_i^{(k)}$ - функции координат верхней и нижней жидкостей, α_i - обобщенные координаты волновых движений жидкостей на поверхностях раздела i -ой гармоники. Верхние индексы параметров (1) и (2)

относятся соответственно к верхней и нижней жидкостям. Определение функций $A^{(k)}$, $B_i^{(k)}$ подробно приведено в предыдущей работе [18, 19].

2. Определение статических и динамических характеристик

Считая потенциалы скоростей жидкости найденными определим статические и кинетические моменты рассматриваемой механической системы.

Статический момент механической системы, состоящей из твердого тела с полостью, полностью заполненной двумя жидкостями, относительно оси OY можно представить в виде суммы интегралов по объёму твердого тела τ_0 и по объёмам жидких масс τ_k , ограниченной поверхностью $S_k \cup \Gamma$:

$$\vec{L} = \vec{L}^* + \sum_i \vec{\lambda}_i \alpha_i + \frac{1}{2} \vec{i} \sum_i N_i^2 \alpha_i^2, \quad (3)$$

$$\text{где } \vec{L}^* = \vec{L}^0 + \vec{L}^{(1)} + \vec{L}^{(2)}, \quad \vec{L}^0 = \rho_0 \int_{\tau_0} \vec{R} d\tau_0, \quad \vec{L}^{(k)} = \rho_k \int_{\tau_k} \vec{R} d\tau_k, \quad (k=1,2), \quad (4)$$

ρ_0 -массовая плотность твердого тела.

Представим выражение для вектора кинетического момента в следующем виде:

$$\vec{K} = J \vec{\omega}_2 + \sum_i P_i \alpha_i \vec{j}, \quad (5)$$

$$\text{где } J = J^* + \sum_{k=1}^2 \sum_i J_i^{(k)} \alpha_i + \sum_{k=1}^2 \sum_i \sum_j J_{ij}^{(k)} \alpha_i \alpha_j, \quad J^* = (J_0 + J^{(1)} + J^{(2)}),$$

здесь J_0 - момент инерции твердого тела без жидкости относительно горизонтальной оси OY ; J^* -момент инерции эквивалентного тела, введенный Н.Е. Жуковским для твердого тела с однородной жидкостью, полностью заполняющей

полость с недеформируемой границей [11]. Момент инерции эквивалентного тела, отвечающего k -ой жидкости, определяется формулой

$$J^{(k)} = \rho_k \int_{S_k + \Gamma_0} A_0^{(k)} \frac{\partial A_0^{(k)}}{\partial v} dS_k; \quad (6)$$

$$J_i^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} \left[A_0^{(k)} \frac{\partial A_i^{(k)}}{\partial v} + (\vec{R} \times \vec{v}) \cdot \vec{j} (\vec{R} \times \vec{v}) \cdot \vec{j} f - \vec{j} \cdot (\vec{R} \times \nabla f_i) A_0^{(k)} \right] dS_k; \quad (7)$$

$$J_{ij}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} \left[A_0^{(k)} \frac{\partial A_{ij}^{(k)}}{\partial x} + (\vec{R} \times \vec{v}) \cdot \vec{j} \left(\frac{\partial A_j^{(k)}}{\partial x} f_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_0^{(k)}}{\partial x^2} f_i f_j \right) - \right. \\ \left. - \vec{j} \cdot (\vec{R} \times \nabla f_j) (A_i^{(k)}) + \frac{\partial A_0^{(k)}}{\partial x} f_i - \frac{1}{2} [\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \nabla (f_i f_j))] A_0^{(k)} \right] dS_k; \quad (8)$$

$$P_i = \sum_{k=1}^2 \lambda_{0i}^{(k)} + \sum_{k=1}^2 \sum_j \lambda_{ij}^{(k)} \alpha_j + \sum_{k=1}^2 \sum_j \sum_k \lambda_{ijk}^{(k)} \alpha_j \alpha_k. \quad (9)$$

3. Вывод уравнений колебаний твёрдого тела с жидкостями, совершающими колебания вблизи основного резонанса

Вывод уравнений возмущенного движения можно проводить двумя способами, позволяющими проконтролировать получаемые результаты. Первый способ подразумевает использование теоремы об изменении кинетического момента, которое в связанной системе координат $Oxuz$ имеет вид

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}_c + \vec{M}_e, \quad (10)$$

где \vec{M}_e - внешние моменты; \vec{M}_c - суммарные векторы статических моментов, создаваемых массовыми силами, действующими на тело и деформированные жидкости

$$\vec{M}_c = -\vec{L} \times \vec{g}. \quad (11)$$

Поставляя выражения кинетического момента в уравнения (10) с учетом (5) и (11), получим в окончательном виде

$$\begin{aligned}
& J^* \frac{d\omega_2}{dt} + \sum_i \lambda_{0i} \frac{d^2\alpha_i}{dt^2} + \sum_i \sum_j \lambda_{ij} \frac{d}{dt} \left(\alpha_j \frac{d\alpha_i}{dt} \right) + \sum_i \sum_j \sum_k \lambda_{ijk} \frac{d}{dt} \left(\alpha_j \alpha_k \frac{d\alpha_i}{dt} \right) + \\
& \sum_i (J_i \omega_2) \frac{d\alpha_i}{dt} + \sum_i J_i \frac{d\omega_2}{dt} \alpha_i + \sum_i \sum_j J_{ij} \frac{d\omega_2}{dt} \alpha_i \alpha_j \\
& + \sum_i \sum_j [(J_{ij} + J_{ji}) \omega_2] \alpha_j \frac{d\alpha_i}{dt} = -(\vec{L} \times \vec{g}) \cdot \vec{j} + M_e.
\end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя потенциалы скоростей $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ в уравнение динамического условия, которое было подробно приведено в предыдущих работах [19, 20] и преобразуя интегралы, получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений по индексу i :

$$\begin{aligned}
& \mu_i \frac{d^2\alpha_i}{dt^2} + gN_i^2 \alpha_i + \lambda_{0i} \frac{d\omega_2}{dt} + \sum_j \sum_k \mu_{jik} \alpha_k \frac{d^2\alpha_j}{dt^2} + \sum_j \sum_k N_{jik} \frac{d\alpha_j}{dt} \frac{d\alpha_k}{dt} + \\
& + \sum_j \sum_k \sum_l \mu_{jkl} \alpha_k \alpha_l \frac{d^2\alpha_j}{dt^2} + \sum_j \sum_k \sum_l N_{jkl} \alpha_l \frac{d\alpha_j}{dt} \frac{d\alpha_k}{dt} \\
& + \sum_j \lambda_{ij} \frac{d\omega_2}{dt} \alpha_j + \sum_j D_{ij} \omega_2 \frac{d\alpha_j}{dt} + \omega_2 \cdot F_i \omega_2 + \sum_j \sum_k \lambda_{ijk} \frac{d\omega_2}{dt} \alpha_j \alpha_k + \\
& + \sum_j \sum_k D_{ijk} \cdot \omega_2 \alpha_k \frac{d\alpha_j}{dt} + \sum_j \omega_2 \cdot F_{ij} \cdot \omega_2 \alpha_j = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots);
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\mu_i = (\mu_i^{(2)} - \mu_i^{(1)})$, $N_i^2 = (N_i^{(2)2} - N_i^{(1)2})$, $\lambda_i = (\lambda_i^{(2)} - \lambda_i^{(1)})$,

$\lambda_{0i} = (\lambda_{0i}^{(2)} - \lambda_{0i}^{(1)})$, $\mu_{jik} = (\mu_{jik}^{(2)} - \mu_{jik}^{(1)})$, $N_{jik} = (N_{jik}^{(2)} - N_{jik}^{(1)})$, $\mu_{jkl} = (\mu_{jkl}^{(2)} - \mu_{jkl}^{(1)})$,

$N_{jkl} = (N_{jkl}^{(2)} - N_{jkl}^{(1)})$, $\lambda_{ij} = (\lambda_{ij}^{(2)} - \lambda_{ij}^{(1)})$, $D_{ij} = (D_{ij}^{(2)} - D_{ij}^{(1)})$, $F_i = (F_i^{(2)} - F_i^{(1)})$,

$\lambda_{ijk} = (\lambda_{ijk}^{(2)} - \lambda_{ijk}^{(1)})$, $D_{ijk} = (D_{ijk}^{(2)} - D_{ijk}^{(1)})$, $F_{ij} = (F_{ij}^{(2)} - F_{ij}^{(1)})$, $\tag{14}$

$$\mu_i^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} B_i^{(k)} f_i d\Gamma_0, \quad N_i^{(k)2} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (f_i)^2 d\Gamma_0, \quad (15)$$

$$\mu_{jik}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (B_{ik}^{(k)} + f_k \frac{\partial B_{i0}^{(k)}}{\partial x}) f_j d\Gamma_0, \quad (16)$$

$$\mu_{jikl}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} [B_{j0}^{(k)} \frac{\partial B_{ikl}^{(k)}}{\partial x} + (\frac{\partial B_{ik}^{(k)}}{\partial x} + \frac{1}{2} f_k \frac{\partial^2 B_{i0}^{(k)}}{\partial x^2}) f_i f_j] d\Gamma_0, \quad (17)$$

$$N_{jik}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (B_{jk}^{(k)} + \frac{1}{2} \nabla B_{j0}^{(k)} \cdot \nabla B_{k0}^{(k)}) f_i^{(k)} d\Gamma_0, \quad (18)$$

$$N_{jikl}^{(k)} = \rho_k \left\{ \int_{\Gamma_0} [2B_{ikl}^{(k)} + f_l \frac{\partial B_{jk}^{(k)}}{\partial x} + \nabla B_{jk}^{(k)} \cdot \nabla B_{kl}^{(k)} + \nabla B_{k0}^{(k)} \cdot \nabla B_{jl}^{(k)} + \frac{1}{2} f_l \frac{\partial}{\partial x} (\nabla B_{j0}^{(k)} \cdot \nabla B_{k0}^{(k)}) f_i] d\Gamma_0 \right\}, \quad (19)$$

$$\lambda_{0i}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} A_0^{(k)} f_i d\Gamma_0, \quad \lambda_i^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} R f_i d\Gamma_0, \quad \lambda_{ij}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (A_j^{(k)} + f_j \frac{dA_0^{(k)}}{dx}) f_i d\Gamma_0, \quad (20)$$

$$\lambda_{ijk}^{(k)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} (A_{jk}^{(k)} + f_k \frac{dA_j^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} f_j f_k \frac{\partial^2 A_0^{(k)}}{\partial x^2}) f_i d\Gamma_0, \quad (21)$$

$$D_{ij}^{(kn)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} [(A_j^{(kn)} + \nabla A_0^{(kn)} \cdot \nabla B_{j0}^{(k)} - \vec{j} \cdot (R \times \nabla B_{j0}^{(kn)}))] f_i d\Gamma_0, \quad (22)$$

$$D_{ijk}^{(kn)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} \left\{ (2A_{jk}^{(kn)} + f_k \frac{\partial A_j^{(kn)}}{\partial x} + \nabla A_k^{(kn)} \cdot \nabla B_{j0}^{(k)} + \nabla A_0^{(kn)} \cdot \nabla B_{jk}^{(k)} - (R \times \nabla B_{jk}^{(kn)}) \cdot \vec{j} - f_k \frac{\partial}{\partial x} [\nabla A_0^{(kn)} \cdot \nabla B_{j0}^{(k)} - \vec{j} \cdot (R \times \nabla B_{j0}^{(kn)})] \right\} f_i d\Gamma_0, \quad (23)$$

$$F_i^{(knm)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} [(\frac{1}{2} \nabla A_0^{(kn)} \cdot \nabla A_0^{(km)} - \vec{j} \cdot (R \times \nabla A_0^{(km)})^{(n)}] f_i d\Gamma_0, \quad (24)$$

$$F_{ij}^{(knm)} = \rho_k \int_{\Gamma_0} \left\{ (\nabla A_0^{(kn)} \cdot \nabla A_j^{(km)} - \vec{j} \cdot (R \times \nabla A_j^{(km)})^{(n)} + \right. \\ \left. + f_i \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \nabla A_0^{(kn)} \cdot \nabla A_0^{(km)} - \vec{j} \cdot (R \times \nabla A_0^{(km)})^{(n)} \right] \right\} f_i d\Gamma_0. \quad (25)$$

4. Уравнения движения твёрдого тела, имеющего цилиндрическую полость

Имея решения краевых задач, нетрудно вычислить гидродинамические коэффициенты линейных уравнений движения тела с жидкостями, соответствующих случаю малых перемещений частиц тела и жидкостей при $n = m = 1$:

$$\lambda^{(k)} = \rho_k \pi \int_0^{r_0} r^2 Y_{11} dr = \rho_k r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2}, \quad Z_{11}^{(1)}(h_1) = \frac{\tanh(k_{11} h_1 / 2)}{k_{11}} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^{(1)}}, \quad (26)$$

$$Z_{11}^{(2)}(0) = \frac{\tanh(k_{11} h_2 / 2)}{k_{11}} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^{(2)}}, \quad Z_{11}^{(1)}(0) = -\frac{\tanh(k_{11} h_1 / 2)}{k_{11}} = -\frac{1}{\varepsilon_{11}^{(1)}}, \quad (27)$$

$$Z_{11}^{(2)}(-h_2) = \frac{\tanh(k_{11} h_2 / 2)}{k_{11}} = -\frac{1}{\varepsilon_{11}^{(2)}}, \quad (28)$$

$$N_{11}^{(1)2} = \rho_1 \delta_{11}, \quad N_{11}^{(2)2} = \rho_2 \delta_{11}, \quad \mu_0^{(1)} = \rho_1 \frac{\delta_{11}}{\ell_{11}^{(1)}}, \quad \mu_0^{(2)} = \rho_2 \frac{\delta_{11}}{\ell_{11}^{(2)}}, \quad \delta_{11} = \pi \frac{r_0^2 (\xi_{11}^2 - 1)}{2 \xi_{11}^2}, \quad (29)$$

$$\lambda_0^{(1)} = \rho_1 r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2} \left[(h_0 + h_2) + \frac{2r_0}{\xi_{11}} \operatorname{th}(k_{11} h_1 / 2) \right], \quad \ell_{11}^{(1)} = -k_{11} \operatorname{th}(k_{11} h_1); \quad (30)$$

$$\lambda_0^{(2)} = \rho_2 r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2} \left[(h_0 + h_2) - \frac{2r_0}{\xi_{11}} \operatorname{th}(k_{11} h_2 / 2) \right], \quad \ell_{11}^{(2)} = k_{11} \operatorname{th}(k_{11} h_2); \quad (31)$$

$$J^{(1)} = \rho_1 r_0^2 \pi \left[\frac{(H + h_1)^3}{3} - \frac{(h_0 + h_2)^3}{3} - \frac{3}{4} h_1 r_0^2 - r_0^3 \frac{16}{\xi_{11}^3 (\xi_{11}^2 - 1)} \operatorname{th}(k_{11} h_1 / 2) \right], \quad (32)$$

$$J^{(2)} = \rho_2 r_0^2 \pi \left[\frac{(h_0 + h_2)^3}{3} - \frac{h_0^3}{3} - \frac{3}{4} h_2 r_0^2 + r_0^3 \frac{16}{\xi_{11}^3 (\xi_{11}^2 - 1)} \operatorname{th}(k_{11} h_2 / 2) \right]. \quad (33)$$

Уравнение моментов относительно главной центральной оси Oy можно представить образом

$$\begin{aligned} & (J_{0y} + J) \omega_2 + \lambda g \alpha - \lambda_0 \alpha + (\lambda_1 \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2) \alpha + 2 \lambda_1 \alpha \alpha^2 + \\ & + (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha (\beta \beta + \beta^2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \beta \alpha \beta + \frac{d}{dt} [(J_1 \alpha^2 + J_2 \beta^2) \omega_2] = M_e; \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнения для обобщенных координат α и β на поверхности раздела были получены в [19] и запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned} & \mu \alpha + g N^2 \alpha - \lambda_0 \omega_2 + \mu_1 (\alpha^2 \alpha + \alpha^2 \alpha + \alpha \beta \beta + \alpha \beta^2) + \\ & + \mu_2 (\beta^2 \alpha + 2 \beta \alpha \beta - \alpha \beta \beta - 2 \alpha \beta^2) + (\lambda_1 \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2) \omega_2 - \\ & - (\lambda_1 + 3 \lambda_2) \omega_2 \beta - J_1 \omega_2^2 \alpha = 0; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \mu \beta + g N^2 \beta + \lambda \omega_2 + \mu_1 (\beta^2 \beta + \alpha^2 \beta + \alpha \beta \alpha + \beta \beta^2) + \\ & + \mu_2 (\alpha^2 \beta + 2 \alpha \alpha \beta - \alpha \beta \alpha - 2 \beta \alpha^2) + (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha \beta \omega_2 + \\ & + (\lambda_1 + 3 \lambda_2) \omega_2 \beta \alpha - J_2 \omega_2^2 \beta = 0; \end{aligned} \quad (36)$$

Выше были выведены нелинейные уравнения движения твердого тела с цилиндрической полостью, целиком заполненной двумя жидкостями. Используя формулы (15, 7, 20), приведём интегралы, позволяющие вычислить параметры, определяющие нелинейность волновых движений поверхности раздела жидкостей, нелинейно связывающие вращательное движение тела и деформацию объема жидкостей:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(k)} = & \rho_k \frac{\pi}{4 \ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left\{ [6 Y_{11}'^2 + \left(\frac{2}{r^2} - 3 k_{11}^2 \right) Y_{11}^2] Y_{11} + \sum_n \frac{4 c_{n0}^{(k)}}{\ell_{n0}^{(k)}} (Y_{n0}' Y_{11}' - k_{n0}^2 Y_{n0} Y_{11}) + \right. \\ & \left. + \sum_n \frac{2 c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}' Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2 \right) Y_{n2} Y_{11}] \right\} Y_{11} r dr, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mu_2^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \{ [2Y_{11}'^2 - (\frac{2}{r^2} + k_{11}^2)Y_{11}^2]Y_{11} + \sum_n \frac{2c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}'Y_{11}' + \\ + (\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2)Y_{n2}Y_{11}] \} Y_{11} r dr, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \{ \sum_n \frac{d_{n1}(\varepsilon_{n1}^{(k)} + \ell_{11}^{(k)})}{\varepsilon_{n1}^{(k)}} [6Y_{11}'^2 + (\frac{2}{r^2} - 3k_{11}^2)Y_{11}^2]Y_{11} + \\ + \sum_n \frac{4d_{n0}^{(k)}}{\ell_{n0}^{(k)}} (Y_{n0}'Y_{11}' - k_{n0}^2Y_{n0}Y_{11}) - \sum_n \frac{2d_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}'Y_{11}' + (\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2)Y_{n2}Y_{11}] \} Y_{11} r dr, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \{ \sum_n \frac{d_{n1}(\varepsilon_{n1}^{(k)} + \ell_{11}^{(k)})}{\varepsilon_{n1}^{(k)}} [-2Y_{11}'^2 + (\frac{2}{r^2} + k_{11}^2)Y_{11}^2]Y_{11} + \\ + \sum_n \frac{2d_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}'Y_{11}' + (\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2)Y_{n2}Y_{11}] \} Y_{11} r dr, \end{aligned} \quad (40)$$

$$J_1^{(k)} = \frac{\rho_k \pi}{4} \int_0^{r_0} \left\{ \begin{aligned} & \left(\sum_m \frac{2d_{m1}}{\varepsilon_{m1}^{(k)}} Y_{m1} \right) \left(\sum_n d_{1n} [6Y_{n1}'Y_{11}' + (\frac{2}{r^2} - 3k_{n1}^2)Y_{n1}Y_{11}] Y_{n1} + \right. \\ & + \sum_n \frac{4d_{n0}^{(k)}}{\ell_{n0}^{(k)}} (Y_{n0}'Y_{11}' - k_{n0}^2Y_{n0}Y_{11}) - \sum_n \frac{2d_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} (Y_{n2}'Y_{11}' + \\ & + (\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2)Y_{n2}Y_{11}) + \sum_n \frac{d_{n1}}{\varepsilon_{n1}^{(k)}} [6(1 - h_k \varepsilon_{n1}^{(k)})Y_{n0}'Y_{11}' + \\ & + (2 - h_k \varepsilon_{n1}^{(k)}) \frac{2}{r^2} Y_{n0}Y_{11} + \frac{6}{r} Y_{n1}Y_{11}' - 3(1 - h_k \varepsilon_{n1}^{(k)})k_{n1}^2 Y_{n1}Y_{11}] Y_{11} r \\ & + \sum_n \frac{4d_{n0}^{(k)} h_k}{\ell_{n0}^{(k)}} [-Y_{n0}'Y_{11}' + \frac{1}{r} Y_{n0}'Y_{11}' + (\frac{1}{r^2} + k_{n0}^2)Y_{n0}Y_{11}] r + \\ & \left. + \sum_n \frac{2d_{n2}^{(k)} h_k}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}'Y_{11}' - Y_{n2}Y_{11}' \frac{1}{r} + (\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2)Y_{n2}Y_{11}] r \right\} r dr, \end{aligned} \quad (41)$$

$$J_2^{(k)} = \frac{\rho_k \pi}{4} \int_0^{r_0} \left\{ \begin{aligned} & \left(\sum_m \frac{2d_{m1}^{(k)}}{\varepsilon_{m1}^{(k)}} Y_{m1} \right) \left(\sum_n d_{1n} [2Y_{n1}' Y_{11}' - \left(\frac{2}{r^2} + 3k_{n1}^2 \right) Y_{n1} Y_{11}] Y_{11} - \right. \\ & \left. - \sum_n \frac{2d_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} (Y_{n2}' Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2 \right) Y_{n2} Y_{11}) + \right. \\ & \left. + \sum_n \frac{d_{n1}^{(k)}}{\varepsilon_{n1}^{(k)}} [2(1 - h_k \varepsilon_{n1}^{(k)}) Y_{n0}' Y_{11}' + \right. \\ & \left. + \frac{2}{r} Y_{n1} Y_{11}' - (2 - h_k \varepsilon_{n1}^{(k)}) \frac{2}{r} Y_{n1} Y_{11} - (1 - h_k \varepsilon_{n1}^{(k)}) k_{n1}^2 Y_{n1} Y_{11}] Y_{11} r + \right. \\ & \left. + \sum_n \frac{2d_{n2}^{(k)} h_k}{\ell_{n2}^{(k)}} [Y_{n2}' Y_{m1}' - Y_{n2} Y_{11}' \frac{1}{r} + \left(\frac{3}{r^2} - k_{n2}^2 \right) Y_{n2} Y_{11}] r \right\} r dr. \quad (42) \end{aligned} \right.$$

Для удобства дальнейшего решения все параметры и полученные коэффициенты переписутся в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \mu / (\rho_2 r_0^3), & \bar{\mu}_1 &= \mu_1 / (\rho_2 r_0^3), & \bar{\mu}_2 &= \mu_2 / (\rho_2 r_0^3), & \bar{\lambda}_0 &= \lambda_0 / (\rho_2 r_0^4), & \bar{\lambda} &= \lambda / (\rho_2 r_0^4), \\ \bar{\lambda}_1 &= \lambda_1 / (\rho_2 r_0^4), & \bar{\lambda}_2 &= \lambda_2 / (\rho_2 r_0^4), & \bar{J} &= J / (\rho_2 r_0^5), & \bar{J}_1 &= J_1 / (\rho_2 r_0^5), & \bar{J}_2 &= J_2 / (\rho_2 r_0^5), \\ \bar{\rho}_1 &= \rho_1 / \rho_2, & \bar{h}_0 &= h_0 / r_0, & \bar{h}_1 &= h_1 / r_0, & \bar{h}_2 &= h_2 / r_0. \end{aligned}$$

где ρ_2 и r_0 - характерные параметры.

В таблицах 1 и 2 приведены численные расчеты гидродинамических линейных коэффициентов $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}_0$, $\bar{\lambda}$, \bar{J} и нелинейных $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$, $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, \bar{J}_1 , \bar{J}_2 в зависимости от толщины слоя \bar{h}_1 и плотности $\bar{\rho}_1$ верхней жидкости. При следующих значениях параметров: $\bar{h}_0 = 0$, $\bar{h}_2 = 2$, $\bar{\rho}_1 = 0.5$ (Таблица 1.) и $\bar{h}_0 = 0$, $\bar{h}_1 = 2$, $\bar{h}_2 = 2$. (Таблица 2.).

Таблица 1.

\bar{h}_1	Линейные гидр. коэф.			Нелинейные гидр. коэф.					
	$\bar{\mu}$	$\bar{\lambda}_0$	\bar{J}	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	\bar{J}_1	\bar{J}_2
0	∞	0	6.869	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	0.673	-0.461
0.2	1.456	-0.122	7.713	4.977	-3.228	-0.879	1.543	0.215	-0.169
0.4	1.082	-0.208	8.854	1.104	-1.452	-0.863	1.555	-0.180	0.043
0.6	0.977	-0.283	10.33	0.679	-1.087	-0.869	1.590	-0.444	0.180
0.8	0.936	-0.346	12.176	0.569	-0.961	-0.873	1.612	-0.586	0.271
1	0.919	-0.396	14.416	0.529	-0.908	-0.875	1.623	-0.648	0.339
1.2	0.91	-0.434	17.073	0.513	-0.885	-0.876	1.628	-0.663	0.395
1.4	0.906	-0.463	20.164	0.505	-0.874	-0.876	1.631	-0.654	0.445
1.6	0.905	-0.484	23.708	0.502	-0.869	-0.876	1.632	-0.634	0.493
1.8	0.904	-0.499	27.724	0.5	-0.866	-0.876	1.633	-0.609	0.539
2	0.903	-0.509	32.233	0.499	-0.865	-0.876	1.633	-0.58	0.584

Таблица 2.

$\bar{\rho}_1$	Линейные гидр. коэф.				Нелинейные гидр. коэф.					
	$\bar{\mu}$	$\bar{\lambda}_0$	$\bar{\lambda}$	\bar{J}	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	\bar{J}_1	\bar{J}_2
0	0.602	0.896	0.927	6.869	0.333	-0.257	-1.048	2.033	0.336	0.782
0.1	0.662	0.615	0.834	11.942	0.366	-0.378	-1.014	1.953	0.153	0.743
0.2	0.723	0.334	0.741	17.015	0.4	-0.5	-0.979	1.873	-0.031	0.703
0.3	0.783	0.053	0.649	22.087	0.433	-0.622	-0.945	1.793	-0.214	0.664
0.4	0.843	-0.228	0.556	27.16	0.466	-0.743	-0.91	1.713	-0.397	0.624
0.5	0.903	-0.509	0.463	32.233	0.499	-0.865	-0.876	1.633	-0.58	0.584
0.6	0.964	-0.79	0.371	37.305	0.533	-0.987	-0.841	1.553	-0.763	0.545
0.7	1.024	-1.071	0.278	42.378	0.566	-1.108	-0.807	1.473	-0.947	0.505
0.8	1.084	-1.352	0.185	47.451	0.599	-1.23	-0.772	1.393	-1.13	0.466
0.9	1.144	-1.633	0.093	52.523	0.633	-1.352	-0.738	1.313	-1.313	0.426

На графиках 2, 3 и 4 приведены численные расчеты гидродинамических коэффициентов линейных $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}_0$, $\bar{\lambda}$, \bar{J} и нелинейных $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$, $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, \bar{J}_1 , \bar{J}_2 в

зависимости от толщины слоя \bar{h}_1 и плотности $\bar{\rho}_1$ верхней жидкости. При следующих известных значениях параметров $\bar{h}_0 = 0$, $\bar{h}_2 = 2$, $\bar{\rho}_1 = 0.5$ и $\bar{h}_0 = 0$, $\bar{h}_1 = 2$, $\bar{h}_2 = 2$.

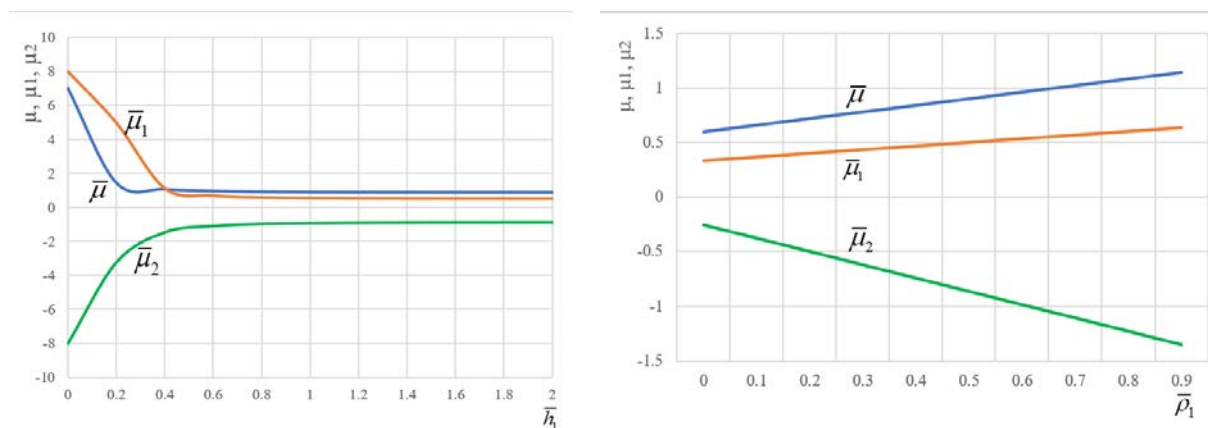


Рис. 2. Зависимость гидродинамических коэффициентов-массовых сил $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ от толщины слоя \bar{h}_1 при $\bar{h}_0 = 0$, $\bar{h}_2 = 2$, $\bar{\rho}_1 = 0.5$ и от плотности $\bar{\rho}_1$ верхней жидкости при $\bar{h}_0 = 0$, $\bar{h}_1 = 2$, $\bar{h}_2 = 2$.

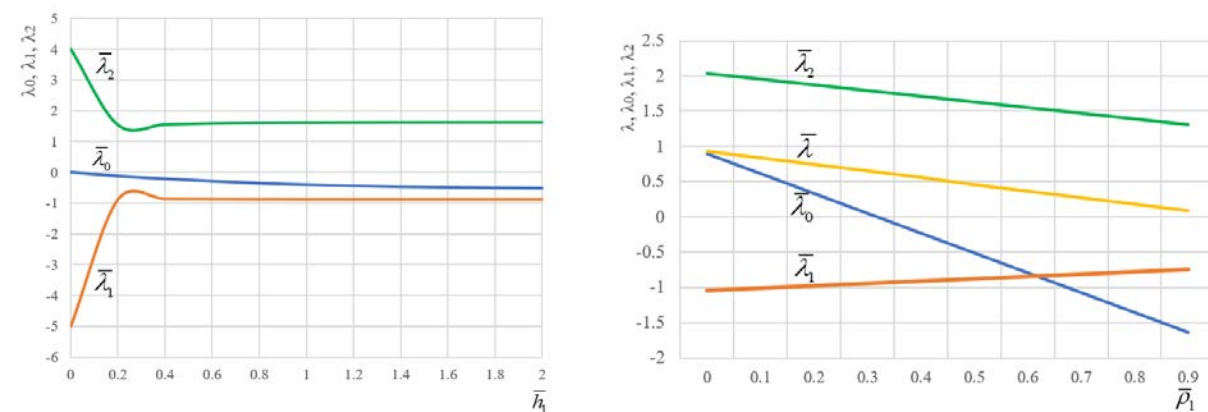


Рис. 3. Зависимость гидродинамических коэффициентов $\bar{\lambda}_0$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ от толщины слоя \bar{h}_1 и от плотности $\bar{\rho}_1$ верхней жидкости.

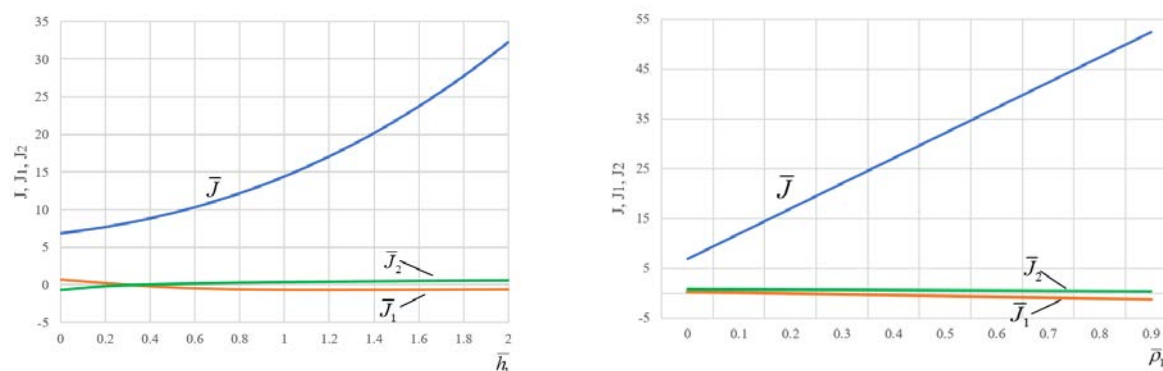


Рис. 4. Зависимость гидродинамических коэффициентов-тензоров моментов инерции $\bar{J}, \bar{J}_1, \bar{J}_2$ от толщины слоя \bar{h}_1 и от плотности $\bar{\rho}_1$ верхней жидкости.

Заключение

Движение твердого тела с полостью, целиком заполненной двухслойной жидкостью, качественно отличается от движения твердого тела, полость которого целиком заполнена однородной несжимаемой жидкостью. Приведенные численные результаты гидродинамических коэффициентов дифференциальных нелинейных уравнений твердого тела с жидкостями могут быть использованы в будущих проектах космической техники, в проектах морских транспортных систем криогенных жидкостей, в системах хранения сжиженного природного газа.

Библиографический список

1. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость // Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 27 - 36.

2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость // Механика твердого тела. 1987. № 2. С. 52 - 58.
3. Козлов Н.В., Шувалова Д.А. Экспериментальное измерение инерционных колебаний границы раздела несмешивающимися жидкостей в горизонтальной цилиндрической полости при вращении // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=16669>
4. Газиев Э.Л. Моделирование собственных колебаний системы «идеальная капиллярная жидкость-баротропный газ» в цилиндрическом контейнере // Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC-2003). - Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. Т. 3. С. 51 – 52.
5. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53486>
6. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84412>
7. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем,

- контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
8. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. - Киев: Наукова Думка, 1990. - 296 с.
 9. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. - 208 с.
 10. Микишев. Г.Н, Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. - М.: Машиностроение, 1968. - 532 с.
 11. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. - М.: Гостехиздат, 1948. - 143 с.
 12. Лимарченко О.С. Нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы. – Киев: Изд-во «Адверта», 2017. - 130 с.
 13. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновация. 2013. № 12(24). URL: <http://www.engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1147.html>. DOI: [10.18698/2308-6033-2013-12-1147](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1147)
 14. Sekerzh-Zen'kovich S.Y. The free oscillations of a viscous two-layer fluid in a closed vessel // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1990, vol. 54, no. 1, pp. 39 – 45. DOI: [10.1016/0021-8928\(90\)90085-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(90)90085-0)
 15. Kalinichenko V.A. Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // Fluid Dynamics, 2019, vol. 54, no. 6, pp. 761 - 773. DOI: [10.1134/S0015462819060065](https://doi.org/10.1134/S0015462819060065)

16. M. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // *Physics of Fluids*, 2005, no. 17 (6), pp. 062101. DOI:[10.1063/1.1922887](https://doi.org/10.1063/1.1922887)
17. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids // *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 2018, vol. 4, pp. 243 – 257. DOI:[10.1007/s40722-018-0119-9](https://doi.org/10.1007/s40722-018-0119-9)
18. Win Ко Ко, Ян Наинг У. Нелинейные колебания поверхности раздела двух жидкостей при угловых колебаниях бака // 11-ая Международная конференция школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (Москва, 01-03 декабря 2020). – М.: Изд-во ИСПО-принт, 2020. – 247 с.
19. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объёме // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 69. DOI:[10.17223/19988621/69/8](https://doi.org/10.17223/19988621/69/8)
20. Win Ко Ко, Temnov A.N. Effects of oscillations of a two-layer liquid in an axisymmetric vessel // *AIP Conference Proceedings* 2318, 020004, 2021. URL:<https://doi.org/10.1063/5.0035840>
21. Woolfenden H.C., Parau E.I. Numerical computation of solitary waves in a two-layer fluid // *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, vol. 688, pp. 528 - 550. DOI:<https://doi.org/10.1017/jfm.2011.400>

22. Eisaku Yokose, Yusuke Saito, Tatsuo Sawada Frequency response of a liquid sloshing in a rotating, laterally oscillating, cylindrical vessel // MATEC Web of Conferences 211, 15003 (VETOMAC XIV), 2018. URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201821115003>

Angular oscillations of solid bodies with a two-layer liquid near the main resonance

Win Ko Ko*, Temnov A.N.**

*Bauman Moscow State Technical University, MSTU,
5, 2 - Baumanskaya str., Moscow, 105005, Russia*

*e-mail: win.c.latt@gmail.com

**e-mail: antt45@mail.ru

Abstract

The development of rocket and space technology has led to the widespread use of cryogenic liquids, as a result of which it was proposed to create a certain stock of cryoproducts that are simultaneously in a two-phase or three-phase state, while forming layers of liquid, to increase their shelf life on board spacecraft or in tankers of future space refueling stations.

Nonlinear problems of the dynamics of a solid body having a cavity filled with several liquids are of considerable applied and theoretical interest. Many important problems of the dynamics of mechanical systems, including liquid masses with time-varying boundaries, lead to the need to solve the problem of the interaction of liquid with

absolutely solid bodies. In particular, the linear equations of motion of a solid body with liquids will allow us to determine the change in the characteristics of the stability of motion due to the deformability of the free surface and the interface of the layered liquid.

The paper considers a problem in a nonlinear formulation about the vibrations of a solid body with an axisymmetric cavity around the horizontal axis OY and completely filled with two ideal and incompressible liquids. Nonlinear differential equations describing nonlinear oscillations of a solid body and the interface between two liquids in the vicinity of the main resonance of the vibrations of liquids are obtained. For a round cylindrical vessel, the hydrodynamic nonlinear problem is reduced to the sequential solution of linear boundary value problems. The obtained solutions of boundary value problems in the form of cylindrical functions were used to calculate linear and nonlinear hydrodynamic coefficients in the equations of oscillations of the mechanical system under consideration.

Keywords: mechanical system, cylindrical cavity, hydrodynamic coefficients, basic resonance, perturbed surface, rotational motion.

References

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V. *Mekhanika tverdogo tela*, 1986, no. 1, pp. 27 - 36.
2. Akulenko L.D., Nesterov S.V. *Mekhanika tverdogo tela*, 1987, no. 2, pp. 52 - 58.
3. Kozlov N.V., Shuvalova D.A. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya*, 2014, no. 6.
6. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=16669>

4. Gaziev E.L. *Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC-2003)*, Simferopol', KNTs NANU, 2013, vol. 3, pp. 51 – 52.
5. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53486>
6. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412>
7. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>
8. Lukovskii I.A. *Vvedenie v nelineinuyu dinamiku tverdogo tela s polostyami, sodержashchimi zhidkost'* (Introduction to the nonlinear dynamics of a solid body with cavities containing a liquid), Kiev, Naukova Dumka, 1990, 296 p.
9. Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovskii I.A. *Nelineinaya dinamika letatel'nogo apparata s zhidkost'yu* (Nonlinear dynamics of an aircraft with a liquid), Moscow, Mashinostroenie, 1977, 208 p.
10. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost'* (Dynamics of a solid body with cavities partially filled with liquid), Moscow, Mashinostroenie, 1968, 532 p.
11. Zhukovskii N.E. *O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoi kapel'noi zhidkost'yu* (On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous droplet liquid), Moscow, Gostekhizdat, 1948, 143 p.

12. Limarchenko O.S. *Nelineinye zadachi dinamiki zhidkosti v rezervuarakh netsilindricheskoi formy* (Nonlinear problems of fluid dynamics in non-cylindrical tanks), Kiev, Izd-vo «Adverta», 2017, 130 p.
13. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsiya*, 2013, no. 12 (24). URL: <http://www.engjournal.ru/search/keyword/4444/page1.htm>. DOI: [10.18698/2308-6033-2013-12-1147](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1147)
14. Sekerzh-Zen'kovich S.Y. The free oscillations of a viscous two-layer fluid in a closed vessel, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, vol. 54, no. 1, pp. 39 – 45. DOI: [10.1016/0021-8928\(90\)90085-O](https://doi.org/10.1016/0021-8928(90)90085-O)
15. Kalinichenko V.A. Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid, *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, no. 6, pp. 761 - 773. DOI: [10.1134/S0015462819060065](https://doi.org/10.1134/S0015462819060065)
16. M. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface, *Physics of Fluids*, 2005, no. 17 (6), pp. 062101. DOI: [10.1063/1.1922887](https://doi.org/10.1063/1.1922887)
17. Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids, *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 2018, vol. 4, pp. 243 – 257. DOI: [10.1007/s40722-018-0119-9](https://doi.org/10.1007/s40722-018-0119-9)
18. Win Ko Ko, Yan Naing U. *11-aya Mezhdunarodnaya konferentsiya shkoly molodykh uchenykh «Volny i vikhri v slozhnykh sredakh»*, Moscow, Izd-vo ISPO-print, 2020, 247 p.
19. Vin Ko Ko, Temnov A.N. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2021, no. 69. DOI: [10.17223/19988621/69/8](https://doi.org/10.17223/19988621/69/8)

20. Win Ko Ko, Temnov A.N. Effects of oscillations of a two-layer liquid in an axisymmetric vessel, *AIP Conference Proceedings* 2318, 020004, 2021. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0035840>
21. Woolfenden H.C., Parau E.I. Numerical computation of solitary waves in a two-layer fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, vol. 688, pp. 528 - 550. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.400>
22. Eisaku Yokose, Yusuke Saito, Tatsuo Sawada Frequency response of a liquid sloshing in a rotating, laterally oscillating, cylindrical vessel, *MATEC Web of Conferences* 211, 15003 (VETOMAC XIV), 2018, URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201821115003>