Труды МАИ. 2024. № 134
Trudy MAI, 2024, no. 134

Научная статья
УДК 532.507
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=178465

# УЧЕТ ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ В УРАВНЕНИИ ЛИУВИЛЛЯ И ВЫВОД ИЗ НЕГО «МОДИФИЦИРОВАННОЙ» СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

**Ольга Николаевна Хатунцева**[1,2]
[1]Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»,
Королев, Московская область, Россия
[2]Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, Московская область, Россия
olga.khatuntseva@rsce.ru

***Аннотация.*** Турбулентный и ламинарный режимы течения жидкости или газа неотличимы на масштабах теплового движения молекул. Однако на мезо- и макро-масштабах проявляются существенные отличия между ними. Турбулентный режим, имеет черты стохастического необратимого по времени процесса на всех масштабах рассмотрения, причем, стохастические пульсации в турбулентном режиме на разных масштабах являются коррелированными – имеют коллективный характер. В отличие от него, ламинарный режим является детерминированным и обратимым по времени на всех масштабах, существенно превосходящих масштаб теплового движения молекул. Существуют диапазоны параметров течения выше некоторых критических

значений, при которых с разной вероятностью могут реализовываться и существовать как ламинарный, так и турбулентный режимы. Переходы между ними происходят скачкообразно, необратимым образом, то есть обратный переход при изменении параметров в противоположном направлении может происходить (и обычно происходит) при других значениях параметров. Таким образом, уравнение, описывающее оба этих режима, должно допускать неединственное решение, с негладким и неоднозначно определенным переходом между ними.

Ранее были проведены исследования возможности описания как ламинарного, так и турбулентного течения жидкости на основе одних и тех же «модифицированных» уравнений Навье-Стокса, учитывающих в турбулентном режиме производство энтропии за счет возбуждения стохастических возмущений на разных масштабах течения [1-4]. Решения, соответствующие ламинарным и турбулентным режимам течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости, были аналитически получены для задач Хагена-Пуазейля, плоского течения Пуазейля и плоского течения Куэтта. Проведено сравнение экспериментальных и аналитических решений для различных значений числа Рейнольдса.

В настоящей работе показана возможность перехода от уравнения Лиувилля, учитывающего производство энтропии на разных масштабах («модифицированного» уравнения Лиувилля) к «модифицированному» уравнению Больцмана через цепочку «модифицированных» уравнений Боголюбова. На основе этих уравнений приводится вывод «модифицированной» системы уравнений Навье-Стокса.

***Ключевые слова***: уравнения Лиувилля, Больцмана, Навье-Стокса, турбулентное течение, ламинарно-турбулентный переход.

***Для цитирования:*** Хатунцева О.Н. Учет производства энтропии в уравнении Лиувилля и вывод из него «модифицированной» системы уравнений Навье-Стокса // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=178465

Original article

# ACCOUNTING FOR ENTROPY PRODUCTION IN THE LIOUVILLE EQUATION AND THE DERIVATION OF A "MODIFIED" SYSTEM OF NAVIER-STOKES EQUATIONS FROM IT

**Olga N. Khatuntseva**[1,2]

[1]Korolev Rocket and Space Corporation «Energia»,

Korolev, Moscow region, Russia

[2]Moscow Institute of Physics and Technology,

Dolgoprudny, Moscow region, Russia

olga.khatuntseva@rsce.ru

***Abstract.*** Turbulent and laminar flow regimes of a liquid or gas are indistinguishable on the scale of thermal motion of molecules. However, there are significant differences between them on the meso- and macro-scales. The turbulent regime has the features of a stochastic time–irreversible process at all scales of consideration, moreover, stochastic pulsations in the turbulent regime at different scales are correlated - they have a collective character. In contrast, the laminar regime is deterministic and time-reversible at all scales significantly exceeding the scale of thermal motion of molecules. There are ranges of

parameters above some critical values at which both laminar and turbulent modes can be realized and exist with different probabilities. Transitions between them occur abruptly, irreversibly, that is, the reverse transition when changing parameters in the opposite direction can occur (and usually does) at other parameter values. Thus, an equation describing both of these modes should allow for a non-unique solution, with an ill-smooth and ambiguously defined transition between them.

Earlier, studies were conducted on the possibility of describing both laminar and turbulent fluid flow based on the same "modified" Navier-Stokes equations, which take into account entropy production in the turbulent regime due to the excitation of stochastic disturbances at different flow scales [1-4].

Solutions corresponding to laminar and turbulent flow regimes of an incompressible non-thermally conductive liquid were analytically obtained for the Hagen-Poiseuille problems, the Poiseuille plane flow and the Couette plane flow. Experimental and analytical solutions for different values of the Reynolds number are compared.

This paper shows the possibility of moving from the Liouville equation, which takes into account the production of entropy at different scales (the "modified" Liouville equation) to the "modified" Boltzmann equation through a chain of "modified" Bogolyubov equations. Based on these equations, a "modified" system of Navier-Stokes equations is derived.

***Keywords:*** Liouville, Boltzmann, Navier-Stokes equations, turbulent flow, laminar-turbulent transition.

***For citation:*** Khatuntseva O.N. Accounting for entropy production in the Liouville equation and the derivation of a "modified" system of Navier-Stokes equations from it. *Trudy MAI*, 2024, no. 134. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178465

## 1.Введение

Возможность корректного описания ламинарных и турбулентных режимов течения на основе одних и тех же уравнений является основой многих теоретических и практических исследований, как современных ученых, так и их выдающихся предшественников [5-21].

Турбулентный и ламинарный режимы течения жидкости или газа неотличимы на масштабах теплового движения молекул. Переход от ламинарного к турбулентному режиму при возрастании внешних ускоряющих сил, действующих на жидкость (газ), осуществляется тогда, когда система «не справляется» с передачей внешней энергии в кинетическую энергию поступательного движения жидкости (газа), а также в тепловую энергию движения молекул, и «вынуждена» часть энергии «перерабатывать», возбуждая стохастические разномасштабные разнонаправленные возмущения скорости. Поскольку гидродинамическая система является открытой и диссипативной, такое нарушение сохранения импульса для нее допустимо. Переход в новый режим «утилизации» энергии происходит скачком, меняя сразу всю структуру течения на всех масштабах. Существуют диапазоны параметров течения выше некоторых критических значений, при которых с разной вероятностью могут реализовываться и существовать как ламинарный, так и турбулентный режимы. Переходы между ними происходят скачкообразно, необратимым образом, то есть обратный переход при изменении параметров в противоположном направлении может происходить (и обычно происходит) при других значениях параметров.

Таким образом, уравнение, описывающее оба этих режима, должно допускать неединственное решение, с негладким и неоднозначно определенным переходом между ними.

На мезо- и макро- масштабах проявляются существенные отличия между ламинарным и турбулентным режимами. Турбулентный режим, имеет черты стохастического необратимого по времени процесса на ***всех*** масштабах рассмотрения, причем, стохастические пульсации в турбулентном режиме на разных масштабах являются коррелированными – имеют коллективный характер. В отличие от него, ламинарный режим является детерминированным и обратимым по времени на всех масштабах, существенно превосходящих масштаб теплового движения молекул. Поэтому, плотности вероятности реализации различных значений скорости и их эволюции, характеризующие ламинарный и турбулентный режимы течения, должны быть различными.

Стоит также отметить, что на течение и реализацию того или иного режима, помимо параметров жидкости (газа), связанными с кинетическими процессами в веществе (вязкость, температура и т.п.), влияют макро характеристики течения (внешнее давление, форма течения, характерные размеры, граничные условия и т.д.).

Целью данной работы является нахождение (из первых принципов) уравнений, которые могут описывать как ламинарный, так и турбулентный режимы течения, учитывающие их принципиальные отличия на разных масштабах рассмотрения.

## 2. Учет влияния производства энтропии из-за возбуждения разномасштабных стохастических возмущений на запись уравнений Лиувилля и Больцмана

Уравнение Лиувилля подчиняется теореме Коши о существовании и единственности и описывает полностью обратимый процесс и «гладкие» функции, характеризующие эволюцию плотности вероятности или распределения случайной величины (например, пульсации скорости) в фазовом пространстве переменных. С его помощью невозможно описать процессы с двумя или более режимами и «скачкообразными» переходами между ними.

Уравнение Больцмана является «укороченной» версией цепочки уравнений Боголюбова, получаемых из уравнений Лиувилля.

А именно, для системы из $N$ частиц с парными взаимодействиями, находящимися во внешнем поле $\Phi^{ext}(x_i)$, с потенциалом парного взаимодействия $\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(x_i, x_j)$, уравнение Лиувилля, описывающее функцию распределение полной системы: $f_N = f_N(x_1,\ldots,x_N, p_1,\ldots,p_N, t)$, записывается в виде

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \dot{x}_i \frac{\partial f_N}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{N} \left( -\frac{\partial \Phi_i^{ext}}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f_N}{\partial p_i} = 0. \qquad (1)$$

Последовательным интегрированием по части переменных от уравнения Лиувилля можно перейти к цепочке уравнений Боголюбова [19] для $k$ – частичной функции распределения:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{k}\dot{x}_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{k}\left(-\frac{\partial \Phi_i^{ext}}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f_k}{\partial p_i}=\sum_{i=1}^{k}\left(N-k\right)\frac{\partial}{\partial p_i}\int\frac{\partial \Phi_{ik+1}}{\partial x_i}f_{k+1}d\vec{x}_{k+1}d\vec{p}_{k+1}\,. \qquad (2)$$

Уравнение (2) обратимо так же, как и исходное уравнение Лиувилля (1). Однако при обрыве такой цепочки обратимость нарушается.

Дойдя последовательными шагами до одночастичной функции распределения и сделав обрыв цепочки, можно перейти к уравнению Больцмана [21]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\overline{p}}{m}\nabla f+\vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}=Stf\ , \qquad (3)$$

где $Stf=\int\limits_{\vec{v}'}\left[f\left(t,\vec{r},\vec{v}'\right)w\left(\vec{v}',\vec{v}\right)-f\left(t,\vec{r},\vec{v}\right)w\left(\vec{v},\vec{v}'\right)\right]d^3v'$ - интеграл столкновений, $\vec{F}$ - внешние силы.

Переход к уравнению Больцмана осуществляется обрывом цепочки на масштабе столкновения отдельных молекул. При этом не учитывается дальнодействие молекул и столкновение более двух молекул одновременно. Не учёт этих и других факторов делает описываемый процесс необратимым. Но при этом, уравнение (3) не несет никакой более качественно сложной информации о процессе, чем та, которая была заложена в исходное уравнение Лиувилля.

Таким образом, предположение об отсутствии в системе диссипативного процесса на ***разных*** масштабах рассмотрения при записи уравнения Лиувилля (и цепочки уравнений Боголюбова), сразу же накладывает условие, не позволяющее отличить турбулентный режим течения от ламинарного. А именно, приводит к неизбежному отсутствию в уравнение Лиувилля (и в цепочке уравнений Боголюбова) возможности описания коррелированных возмущений на разных масштабах рассмотрения, а также к отсутствию возможности характеризовать негладкий и неоднозначно определенный ламинарно-турбулентный переход. А появление в уравнении Больцмана диссипации на масштабе теплового движения молекул в результате обрыва цепочки уравнений Боголюбова не несет изменения в описание рассматриваемого физического процесса на качественно новом уровне и, соответственно, также не приводит к возможности описания турбулентного режима.

Наличие диссипативного процесса в системе неизбежно приведет к производству энтропии в ней. Однако это производство может происходить на разных режимах по-разному, в зависимости от того, на каких масштабах происходит диссипация энергии и, соответственно, на каких масштабах возникают стохастические процессы. Поскольку, температура, при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения практически не изменяется, то на масштабе теплового движения молекул энтропия в обоих режимах также будет одинаковой. Ее можно принять за нулевой уровень отсчета.

В работе [22] было показано, что если система находится далеко от состояния равновесия, то единичные реализованные события могут сильно влиять на изменение плотности вероятности и, соответственно, на среднее значение для этой плотности вероятности.

Математическое моделирование эволюции плотности вероятности случайной величины для такого процесса позволяет сделать вывод, что на каждом фиксированном шаге может реализовываться более одной возможной функции, характеризующей плотность вероятности на следующем шаге. Причем эти функции могут быть как ограниченно растущими, так и степенным образом спадающими.

Основываясь на этом, Центральная предельная теорема позволяет заключить, что распределение случайной величины на протяжении большого количества шагов в таком процессе, будет иметь вид Гауссовой функции с «тяжелыми» степенными «хвостами». А это, в свою очередь, позволяет сделать вывод о многомасштабности и коррелированности процесса, в том числе, такого, который является основой для реализации турбулентного режима течения.

В том случае, если каждое единичное событие мало влияет на изменение плотности вероятности, то ее эволюция будет происходить на каждом временном шаге однозначным образом, а распределение случайной величины на протяжении большого количества шагов в таком процессе, будет иметь вид Гауссовой функции и характеризовать ламинарный режим течения.

Для того чтобы одним и тем же уравнением описывать как ламинарный, так и турбулентный режимы необходимо модернизировать уравнение Лиувилля. А именно, расширить фазовое пространство: $(t,\vec{x},\vec{p}) \to (t,\vec{x},\vec{p},S)$, добавив переменную, которая будет характеризовать энтропию: $S = -\int \varphi \ln \varphi \prod_i dx_i dp_i$, отличающую эти режимы друг от друга.

Причем, если уравнение Лиувилля в пространстве, образованном пространственными координатами, импульсами и временем, может быть записано как для плотности вероятности, так и для распределения случайной величины, то в расширенном с помощью энтропии пространстве оно может быть записано только для распределения случайной величины. Это связано с тем, что эволюцию распределения случайной величины в любом режиме течения можно рассматривать, как непрерывную и однозначную функцию, в то время как прогноз реализации плотности вероятности на каждом итерационном шаге в стохастическом (турбулентном) процессе может быть неоднозначным [22].

Соответственно, уравнение Лиувилля для функции *f*, характеризующей распределение случайной величины: $df/dt = \partial f/\partial t + \sum_i \dot{x}_i \,\partial f/\partial x_i + \sum_i \dot{p}_i \,\partial f/\partial p_i = 0$, в расширенном фазовом пространстве приобретет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \dot{S}\frac{\partial f}{\partial S} = 0. \tag{4}$$

Чтобы избежать неопределенности при постановке начальных и граничных условий, обусловленной возможной неоднозначностью задания начального уровня отсчета энтропии, последний член в уравнении (4) можно записать через переменную, определяемую плотностью вероятности реализации случайной величины:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \dot{S}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{1}{\delta S/\delta \varphi} = 0. \tag{5}$$

Производная: $\delta S/\delta\varphi$, является функциональной производной. Найдем ее значение:

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \varphi}, h \right\rangle = -\frac{d}{d\,\text{э}} \int \left(\varphi(p_i) + \text{э}\, h(p_i)\right) \ln\left(\varphi(p_i) + \text{э}\, h(p_i)\right) \prod_i dp_i \Big|_{\text{э}=0} =$$

$$= -\int \left(\ln \varphi(p_i) + 1\right) h(p_i) \prod_i dp_i = \left\langle -\left(\ln \varphi + 1\right), h \right\rangle .$$

Откуда следует, что $\delta S/\delta\varphi = -ln\varphi - 1$. Так как, $-(ln\varphi+1)\delta\varphi = \delta(-\varphi ln\varphi)$, то уравнение (5) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} + \dot{S} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} = 0, \quad \text{где } \tilde{s} = -\varphi \ln \varphi, \quad 0 \le \tilde{s} \le 1/e \approx 0{,}368. \qquad (6)$$

Последнее слагаемое в уравнениях (4)-(6) становится ненулевым только в том случае, когда в рассматриваемой системе осуществляется производство энтропии: $dS/dt>0$. В соответствии со вторым законом термодинамики, производство энтропии в замкнутой системе всегда неотрицательно независимо от направленности протекания процесса. Поэтому при ненулевом производстве энтропии и изменении направления течения времени, член: $\dot{S}\,\partial f/\partial \tilde{s}$, остается тем же самым, а все остальные слагаемые, входящие в уравнения (6), меняют знаки. В результате для уравнения (6) теряется свойство обратимости по времени. Стоит еще раз подчеркнуть, что эта необратимость связана с возможной неоднозначностью реализации плотности вероятности в каждый момент времени в системе, находящейся вдали от положения равновесия – в турбулентном режиме течения, что ведет к распределению, имеющего вид Гауссовой функции с «тяжелыми» степенными «хвостами».

В случае реализации ламинарного режима течения производство энтропии:

*dS/dt* – нулевое (поскольку производство энтропии на масштабе теплового движения молекул одинаково для двух режимов, оно не учитывается и принимается за нулевой уровень), последнее слагаемое в уравнениях (4)-(6) пропадает, уравнения приобретают вид, совпадающий с «традиционным» уравнением Лиувилля.

Введя обозначение: $dS/dt=1/\tau$, где $\tau$ – временной масштаб, на котором происходит необратимое изменение энтропии стохастической системы на единицу, уравнение (6) можно записать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_i \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}=0. \tag{7}$$

Уравнения (7) (или (6)) будем далее для краткости называть «модифицированным» уравнением Лиувилля.

Переход к «модифицированной» цепочке уравнений Боголюбова и «модифицированному» уравнению Больцмана будет аналогичен тому, который был сделан для аналогичных «традиционных» уравнений (1)-(3):

$$\frac{\partial f_N}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N} \dot{x}_i \frac{\partial f_N}{\partial x_i}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial f_N}{\partial \tilde{s}}+\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{\partial \Phi_i^{ext}}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f_N}{\partial p_i}=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{k} \dot{x}_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial f_k}{\partial \tilde{s}}+\sum_{i=1}^{k}\left(-\frac{\partial \Phi_i^{ext}}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f_k}{\partial p_i}=\sum_{i=1}^{k}\left(N-k\right)\frac{\partial}{\partial p_i}\int\frac{\partial \Phi_{ik+1}}{\partial x_i}\, f_{k+1} d\vec{x}_{k+1} d\vec{p}_{k+1}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\overline{p}}{m}\nabla f+\vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}=Stf, \tag{10}$$

где $Stf=\int\limits_{\vec{v}'}\left[f\left(t,\vec{r},\vec{v}'\right)w\left(\vec{v}',\vec{v}\right)-f\left(t,\vec{r},\vec{v}\right)w\left(\vec{v},\vec{v}'\right)\right]d^3v'$ - интеграл столкновений.

Из «модифицированного» уравнения Больцмана (10) можно получить «модифицированные» уравнения Эйлера и Навье-Стокса, аналогично тому, как из «традиционного» уравнения Больцмана (3) были получены уравнения Эйлера и Навье-Стокса [21].

В отсутствии внешних сил уравнение (10) перепишем в тензорном виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(v_\alpha f\right)+\frac{1}{\tau}\frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}=Stf\ . \tag{11}$$

Поскольку рассматривается процесс, в котором столкновения не приводят к изменению числа сталкивающихся частиц и не изменяют их суммарных энергию и импульс, то интеграл столкновений: *Stf*, стоящий в правой части «модифицированного» уравнения Больцмана (11), не описывает такой процесс изменения функции, характеризующей распределение частиц, который может привести к изменению макроскопических величин - плотности, внутренней энергии и макроскопической скорости газа. На это указывает равенство нулю следующих интегралов [21]:

$$\int Stf d\Gamma=0,\qquad \int \varepsilon Stf d\Gamma=0,\qquad \int \vec{p} Stf d\Gamma=0,$$

где $f$, $\varepsilon$ и $\vec{p}$ - функция, характеризующая распределение частиц, внутренняя энергия и импульс единицы объема фазового пространства, соответственно.

Учитывая что,

$N\left(t,\vec{r},\tilde{s}\right)=\int f\left(t,\vec{r},\tilde{s},\Gamma\right)d\Gamma$ - плотность распределения газа (жидкости),

$\rho=mN$ - массовая плотность газа (жидкости),

$\vec{V}=\left\langle\vec{v}\right\rangle=\dfrac{1}{N}\int vf d\Gamma$ - скорость макроскопического движения газа (жидкости), проинтегрируем уравнение (11) по $d\Gamma$, предварительно умножив его на $m$, $p_\beta$ или ε. Во всех случаях правая часть уравнения (11) обратится в ноль, и мы получим следующие «модифицированные» уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial \rho}{\partial \tilde{s}} + \nabla\left(\rho \vec{V}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho V_\alpha\right) + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{s}}\left(\rho V_\alpha\right) + \dfrac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(N\bar{\varepsilon}\right) + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{s}}\left(N\bar{\varepsilon}\right) + div\vec{q} = 0 \end{cases}, \tag{12}$$

где $\Pi_{\alpha\beta} = \int m v_\alpha v_\beta f d\Gamma$ - тензор плотности потока импульса, $\vec{q} = \int \varepsilon \vec{v} f d\Gamma$ - плотность потока энергии в газе (жидкости).

В отсутствии вязкости и теплопроводности первые два уравнения (12) представляют собой систему «модифицированных» уравнений Эйлера. Записанные в более привычной форме - в виде уравнений в частных производных, при учете внешних сил, они имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial \rho}{\partial \tilde{s}} + \nabla\left(\rho \vec{V}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla P + \vec{F} \end{cases}. \tag{13}$$

В качестве решений системы уравнений (13) будут выступать значения скорости $\vec{V} = \vec{V}\left(t, \vec{r}, \tilde{s}; \tau\right) = \vec{V}\left(t, \vec{r}, \tilde{s}(\varphi); \tau\right)$ и плотности $\rho = \rho\left(t, \vec{r}, \tilde{s}; \tau\right) = \rho\left(t, \vec{r}, \tilde{s}(\varphi); \tau\right)$, которые могут реализоваться с вероятностью $\varphi$ (на масштабе рассмотрения $\tau$) в момент времени $t$, в точке $\vec{r}(x, y, z)$.

Дополнительный член в уравнении неразрывности на больших интервалах времени в турбулентном режиме будет описывать «сглаживание» - уменьшение изменения плотности (из-за возбуждения стохастических возмущений и роста энтропии), например, в волновых процессах или в процессах, в которых возникают ударные волны.

Для несжимаемой жидкости систему уравнений (13) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \nabla\vec{V} = 0 \\ \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial\widetilde{s}} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla P + \vec{F} \end{cases}. \tag{14}$$

Если во втором уравнении системы (12) дополнительно (по сравнению с уравнениями Эйлера) учитываются силы вязкого трения, действующие по поверхности выделенного объема жидкости и характеризуемые коэффициентом вязкости $\eta$, а также эффекты, связанные с деформацией жидкости от объемного сжатия, описываемые коэффициентом второй вязкости $\xi$, то получаются «модифицированные» уравнения Навье-Стокса (УНС):

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k\frac{\partial V_i}{\partial x_k}\right) + \frac{\rho}{\tau}\frac{\partial V_i}{\partial\widetilde{s}} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\xi\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right) + F_i .$$

Предполагая, что коэффициенты вязкости $\eta$ и второй вязкости $\xi$ являются константами, их можно записать в векторном виде:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\nabla\right)\vec{V} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\widetilde{s}} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\vec{V} + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\nabla div\vec{V} + \vec{F}/\rho , \tag{15}$$

где $\nu=\eta/\rho$, $\eta$ и $\rho$ – вязкость и плотность жидкости, $\nabla P$ - градиент давления, $\tau$ – временной масштаб, на котором происходит изменение энтропии на единицу, $\widetilde{s}$ -

переменная, характеризующая возникновение стохастических возмущений, $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{x}, \tilde{s}; \tau)$.

Дополнительные вязкие силы вводятся, как осредненные (статистические) эффекты от процессов, происходящих на уровне теплового движения молекул (а для второй вязкости $\xi$ еще и на уровне их колебательных и вращательных степеней свободы). Они не описывают изменение энтропии, возникающее при реализации турбулентного режима в результате возбуждения стохастических возмущений, имеющих самоподобный ***многомасштабный*** характер на масштабах, превышающих масштаб теплового движения.

В работах [1-3] были рассмотрены вопросы о возможности возникновения и поддержания стохастических процессов в реальных - «физических» - системах. Было показано, что существенную роль в этом могут играть несовместимые между собой граничные условия. В этом случае становится невозможным существование одного гладкого решения уравнений, и можно говорить лишь о наличии двух или более непересекающихся или пересекающихся негладким образом (с разрывом производных) асимптот решения. Область, находящаяся между этими асимптотами (или в окрестности точки «разрыва» производных) является областью неопределенности, порождающая стохастический процесс.

Для описания процессов, характеризующихся двумя непересекающимися или пересекающимися негладким образом асимптотами, было использовано понятие - «обобщенное» решение, в котором учитывается вклад каждой асимптоты решения в общее решение в каждой точке исследуемой области.

В такой постановке в работах [1-3] были найдены «ламинарные» и обобщенные «турбулентные» решения для задачи Хагена-Пуазейля (в трубе кругового сечения), плоской задачи Куэтта (для безнапорного течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости, находящейся между движущимися в противоположных направлениях плоскими стенками канала) и плоской задачи Пуазейля. Сравнение с экспериментальными данными показало работоспособность представленного подхода к решению такого рода задач.

Все эти задачи были решены в приближении вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкости, поэтому уравнение переноса тепла в них не использовалось, а уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости не подвергалось изменениям.

В работе [4] исследовалась возможность учета производства энтропии за счет стохастических возмущений для вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости. В соответствии с этим были рассмотрены изменения в расширенном фазовом пространстве не только уравнений сохранения импульса, но и уравнения неразрывности, и уравнения переноса энергии и тепла в полной системе УНС.

В результате было получено уравнение полного сохранения энергии с учетом стохастических возмущений в широком диапазоне масштабов:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho\varepsilon\right)+\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial \tilde{s}}\left(\frac{\rho V^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\nabla\left(\rho\vec{V}\left(\frac{V^2}{2}+\varepsilon+\frac{P}{\rho}\right)-\left(\vec{V}\overline{\sigma}'\right)-\kappa\nabla T\right), \tag{16}$$

а также общее уравнение переноса тепла:

$$\rho T\left(\frac{\partial S_T}{\partial t}+\vec{V}\nabla S_T\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}+\nabla\left(\kappa\nabla T\right), \tag{17}$$

где $S_T$ - термодинамическая энтропия (это обозначение введено, чтобы не путать ее с энтропией $S$, характеризуемой стохастическими возмущениями в широком диапазоне масштабов), постоянная $\kappa$ – это коэффициент теплопроводности, а вязкий тензор напряжений $\sigma'_{ik}$ имеет вид:

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}\right) + \xi\delta_{ik}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}. \qquad (18)$$

Уравнение (17) является общим уравнением переноса тепла и по своему виду (в отличие от уравнения полного сохранения энергии (16)) полностью совпадает с аналогичным уравнением, выведенным для случая, в котором не учитывались случайные стохастические процессы на масштабах, превышающих масштаб теплового движения молекул [4]. Это может служить доказательством того, что однородные изотропные стохастические процессы, реализующиеся в широком диапазоне масштабов, превосходящие масштаб теплового движения молекул, не влияют непосредственно на процесс теплопереноса. Об этом свидетельствует и тот факт, что температура жидкости при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения практически не изменяется.

Между тем, процесс переноса полной энергии, описываемый уравнением (16), зависит от стохастического процесса в жидкости. В турбулентном и ламинарном режимах этот процесс происходит по-разному. И при описании турбулентного режима должно учитываться второе слагаемое, стоящее в левой части уравнения (16), характеризующее производство энтропии за счет стохастических возмущений в широком диапазоне масштабов. В ламинарном режиме производство энтропии за счет стохастических возмущений становится равным нулю, это слагаемое исчезает, и уравнение полного сохранения энергии приобретает «традиционный» вид.

Вывод и обоснование корректности записи «модифицированных» уравнений системы Навье-Стокса в работах [1-4] производится по отдельности для каждого из уравнений: неразрывности, импульса, энергии. Данная работа служит цели вывода всех этих уравнений из одного «модифицированного» уравнения Больцмана, которое находится из «модифицированного» уравнения Лиувилля через цепочку «модифицированных» уравнений Боголюбова.

**Заключение**

На мезо- и макро- масштабах проявляются существенные отличия между ламинарным и турбулентным режимами. Турбулентный режим, имеет черты стохастического необратимого по времени процесса на ***всех*** масштабах рассмотрения, причем, стохастические пульсации в турбулентном режиме на разных масштабах являются коррелированными – имеют коллективный характер. В отличие от него, ламинарный режим является детерминированным и обратимым по времени на всех масштабах, существенно превосходящих масштаб теплового движения молекул. Поэтому, плотности вероятности реализации различных значений скорости и их эволюции, характеризующие ламинарный и турбулентный режимы, должны быть различными, а уравнения, описывающие как ламинарный, так и турбулентный режимы течения, должны допускать неединственные решения, с негладкими и неоднозначно определенными переходами между ними.

Уравнение Лиувилля подчиняется теореме Коши о существовании и единственности и описывает полностью обратимый процесс и «гладкие» функции, характеризующие эволюцию плотности вероятности или распределения случайной величины (например, пульсации скорости) в фазовом пространстве переменных. С его помощью невозможно описать процессы с двумя или более режимами и «скачкообразными» переходами между ними.

Уравнение Больцмана является «укороченной» версией цепочки уравнений Боголюбова, получаемых из уравнений Лиувилля.

Переход к уравнению Больцмана осуществляется обрывом цепочки на масштабе столкновения отдельных молекул. При этом не учитывается дальнодействие молекул и столкновение более двух молекул одновременно. Не учёт этих и других факторов делает описываемый процесс необратимым. Но при этом, уравнение Больцмана не несет никакой более качественно сложной информации о процессе, чем та, которая была заложена в исходное уравнение Лиувилля и, соответственно, не приводит к возможности описания турбулентного режима.

В данной работе предложено рассматривать уравнение Лиувилля в расширенном фазовом пространстве, где в качестве дополнительной переменной используется энтропия, которая может характеризовать различие между ламинарным и турбулентным режимами течения жидкости или газа. В результате, в выражении для полной производной по времени появляется дополнительное слагаемое, характеризуемое производством энтропии за счет возбуждения стохастических возмущений на разных масштабах.

В работе показана возможность перехода от «модифицированного» уравнения Лиувилля к «модифицированному» уравнению Больцмана через цепочку «модифицированных» уравнений Боголюбова. Приводится вывод «модифицированной» системы уравнений Навье-Стокса из этих уравнений.

Ранее в работах [1-3] уже были найдены «ламинарные» и обобщенные «турбулентные» решения «модифицированных» уравнений Навье-Стокса для течения несжимаемой нетеплопроводной жидкости в задаче Хагена-Пуазейля, в плоской задаче Куэтта и в плоской задаче Пуазейля. Сравнение с экспериментальными данными показало работоспособность представленного подхода к решению такого рода задач.

В работе [4] показано, что включение дополнительного слагаемого, характеризующего производство энтропии за счет стохастических возмущений в широком диапазоне масштабов, изменяет левую часть уравнения полного сохранения энергии. При этом уравнение распространения тепла, которое характеризуется процессами, происходящими на масштабах теплового движения молекул, не изменяется – имеет традиционный вид.

Вывод и обоснование корректности записи «модифицированных» уравнений системы Навье-Стокса в работах [1-4] производится по отдельности для каждого из уравнений: неразрывности, импульса, энергии. Данная работа позволяет сделать вывод, что все этих уравнения можно получить из одного «модифицированного» уравнения Больцмана, которое находится из «модифицированного» уравнения Лиувилля через цепочку «модифицированных» уравнений Боголюбова.

## Список источников


1. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=158211. DOI: 10.34759/trd-2021-118-02

2. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=164194. DOI: 10.34759/trd-2022-122-07

3. Хатунцева О.Н. Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=165492. DOI: 10.34759/trd-2022-123-08

4. Хатунцева О.Н. Учет производства энтропии в системе уравнений Навье-Стокса при описании турбулентного течения вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости // Труды МАИ. 2023. № 131. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=175916. DOI: 10.34759/trd-2023-131-10

5. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=75565

6. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=44440

7. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58536

8. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29361

9. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34840

10. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // Physics of Fluids, 1995, no. 7, pp. 335-343. DOI: 10.1209/0295-5075/28/4/002

11. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // Journal of Fluid Mechanics, 1980, no. 96, pp. 59-205. DOI: 10.1017/S0022112080002066

12. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21. DOI: 10.2514/6.1993-2906

13. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation // Computers Fluids, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.

14. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // Journal of Fluid Mechanics, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566. DOI: 10.1017/S0022112075001814

15. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation // International Journal of Heat and Fluid Flow, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263. DOI: 10.1016/S0142-727X(00)00007-2

16. Березко М.Э., Никитченко Ю.А. Сравнение комбинированных кинетическо-гидродинамических моделей различных порядков на примере течения Куэтта // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=112842. DOI: 10.34759/trd-2020-110-8

17. Никитченко Ю.А. Моментные модели для течения с большим числом Маха // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. № 4. С. 39-48.

18. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // Physics of Fluids, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510–520. DOI: 10.1063/1.858424

19. Шелест А.В. Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений. - М.: Наука, 1990. - 159 с.

20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 731 с.

21. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. X. Физическая кинетика. - М.: Наука, 2002. - 536 с.

22. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=98854

## References

1.Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2021, no. 118. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158211. DOI: 10.34759/trd-2021-118-02

2. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164194. DOI: 10.34759/trd-2022-122-07

3. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165492. DOI: 10.34759/trd-2022-123-08

4. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2023, no. 131. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=175916. DOI: 10.34759/trd-2023-131-10

5. Larina E.V., Kryukov I.A., Ivanov I.E. *Trudy MAI*, 2016, no. 91. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75565

6. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 70. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=44440

7. Kravchuk M.O., Kudimov N.F., Safronov A.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58536

8. Vu M.Kh., Popov S.A., Ryzhov Yu.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 53. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29361

9. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence, *Trudy MAI*, 2012, no. 59. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34840

10. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids*, 1995, no. 7, pp. 335-343. DOI: 10.1209/0295-5075/28/4/002

11. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, no. 96, pp. 59-205. DOI: 10.1017/S0022112080002066

12. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows, *AIAA Paper*, 1993, N93-2906, pp. 21. DOI: 10.2514/6.1993-2906

13. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation, *Computers Fluids*, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.

14. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure, *Journal of Fluid Mechanics*, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566. DOI: 10.1017/S0022112075001814

15. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263. DOI: 10.1016/S0142-727X(00)00007-2

16. Berezko M.E., Nikitchenko Yu.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112842. DOI: 10.34759/trd-2020-110-8

17. Nikitchenko Yu.A. *Aerospace MAI Journal*, 2014, vol. 21, no. 4, pp. 39-48.

18. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Physics of Fluids*, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510–520. DOI: 10.1063/1.858424

19. Shelest A.V. *Metod Bogolyubova v dinamicheskoi teorii kineticheskikh uravnenii* (Bogolyubov's method in the dynamic theory of kinetic equations), Moscow, Nauka, 1990, 159 p.

20. Landau L.D., Lifshits E.M. *Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann, 1987, vol. 6, 558 p

21. Lifshits E.M., Pitaevsky L.P. *Physical kinetics*, Butterworth-Heinemann, 2002, vol. 10, 536 p.

22. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98854

Статья поступила в редакцию 11.01.2024

Одобрена после рецензирования 17.01.2024

Принята к публикации 27.02.2024

The article was submitted on 11.01.2024; approved after reviewing on 17.01.2024; accepted for publication on 27.02.2024