

Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 11. С. 504–514
Thermal processes in engineering, 2023, vol. 15, no. 11, pp. 504–514

Научная статья
УДК 533.6.011

О роли диссипативных слагаемых при математическом моделировании разреженных потоков газа

Д.С. Янышев[✉]

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

[✉]*dyanishev@gmail.com*

Аннотация. Анализируются методы расчета разреженных струйных течений. Приводится формулировка математической модели разреженного течения на основе квазигазодинамических уравнений, отличающихся от классических уравнений Навье — Стокса дополнительными диссипативными слагаемыми. Приводятся данные расчетов, полученные с помощью указанной модели, а также уравнений Навье — Стокса с учетом второй вязкости. Проводится сравнение с экспериментом.

Ключевые слова: течение разреженного газа, математическое моделирование, струи, квазигазодинамические уравнения

Для цитирования. Янышев Д.С. О роли диссипативных слагаемых при математическом моделировании разреженных потоков газа // Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 11. С. 504–514. URL: <https://tptmai.ru/publications.php?ID=177596>

Original article

Regarding the role of dissipative terms in simulation of rarefied gas flow

D.S. Yanyshev[✉]

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

[✉]*dyanishev@gmail.com*

Abstract. In this paper methods for calculating rarefied jet flows are analyzed. The formulation of a mathematical model of rarefied flow based on quasi-gasdynamics equations, which differ from the classical Navier — Stokes equations by additional dissipative terms, is presented. Calculation results obtained using both this model and the Navier — Stokes system taking into account second viscosity in comparison vs. experimental data, are presented.

Keywords: rarefied gas flow, mathematical modeling, jets, quasi-gasdynamics equations

For citation. Yanyshev D.S. Regarding the role of dissipative terms in simulation of rarefied gas flow. *Thermal processes in engineering*, 2023, vol. 15, no. 11, pp. 504–514 (In Russ.). URL <https://tptmai.ru/publications.php?ID=177596>

Введение

Математическое моделирование течений газа на больших высотах представляет серьезную проблему, поскольку происходит нарушение условия сплошности среды. В связи с этим становится невозможным адекватное описание течений в рамках механики сплошной среды.

Главной характеристикой степени разреженности, как известно, является число Кнудсена:

$$\text{Kn} = \frac{\lambda_m}{L} \quad (1)$$

Принято считать, что гипотеза сплошности соблюдается при $\text{Kn} \rightarrow 0$. На практике обычно принимается, что гипотеза сплошности справедлива в случаях, когда $\text{Kn} < 0,01$.

Вместе с тем практика показывает, что применимость механики сплошной среды можно расширить на течения до чисел Кнудсена порядка 10. Ключевым фактором здесь является появление дополнительных диссипативных членов в уравнениях, описывающих течение жидкости.

Настоящая работа является обобщением результатов научной группы под руководством А.М. Молчанова по моделированию струйных разреженных течений, полученных при непосредственном участии автора. Частично данные результаты были опубликованы ранее в работах [1, 2].

Математическая модель течения разреженного потока

Основными подходами к математическому моделированию разреженных течений на сегодняшний день являются:

- решение кинетического уравнения Больцмана;
- так называемый метод прямого моделирования Монте-Карло (Direct Simulation Monte-Carlo — DSMC).

Для моделирования течений газа с использованием DSMC-методов используется специальный подход, основанный на моделировании газа с помощью небольшого числа лагранжевых частиц, которые представляют пакеты молекул газа. То есть проводится численный эксперимент, в котором прослеживается история ограниченного числа частиц, каждая из которых представляет «пакет», состоящий из большого числа W реальных молекул. Величина W называется «весовым множителем» (weighting factor).

Для каждой из частиц запоминаются ее координаты, скорость и энергия. По этим величинам

путем осреднения по всем частицам определяются газодинамические параметры течения.

Численное решение уравнения Больцмана, а также применение методов прямого численного моделирования (DSMC) требует использования огромных компьютерных ресурсов, в особенности при числах Кнудсена меньше 10.

Вместе с тем, как показывает практика [5], получаемые в рамках гипотезы сплошности результаты расчетов разреженных течений можно улучшить, приняв во внимание ненулевой коэффициент второй (объемной) вязкости ζ .

В этом случае тензор вязких напряжений жидкости примет вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \zeta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right]. \quad (2)$$

Обычно при расчетах течений газа большинство авторов, следуя гипотезе Стокса, предполагает $\zeta = 0$. При течениях с числом Кнудсена, стремящемся к нулю, это оказывается в целом справедливым, поскольку вклад слагаемого $\zeta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$ в тензор вязких напряжений в любом случае мал по сравнению с другими членами.

При разреженном течении вклад данного слагаемого становится заметен, в особенности в области скачков уплотнения. Например, Г.А. Тирским и др. [3] было продемонстрировано, что при учете ненулевой второй вязкости толщина скачков уплотнения становится ближе к измеренной экспериментально.

Как известно, толщина скачка уплотнения пропорциональна длине свободного пробега частиц газа. В случаях, когда $\text{Kn} > 0,01$ (то есть длина свободного пробега составляет более 1% от характерного размера рассматриваемой задачи), данный эффект начинает оказывать заметное влияние на структуру течения.

Тем не менее одного лишь учета второй вязкости для успешного моделирования недостаточно.

Более сложным подходом, основывающимся на механике сплошной среды, является так называемая модель квазигазодинамики, предложенная Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и развиваемая профессором Т.Г. Елизаровой [4].

Для получения квазигазодинамических (QGD) уравнений необходимо проинтегрировать особым образом кинетическое уравнение для функции распределения (подробнее см. [4]). В результате получается система уравнений, сходная с уравнениями Навье — Стокса, но имеющая дополнительные диссипативные добавки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \nabla \cdot \left[\mathbf{j} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] &= \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \cdot \mathbf{q}, \end{aligned} \quad (3)$$

где через \mathbf{j}_m обозначен вектор плотности массы:

$$\mathbf{j} = \rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (4)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho} (\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p). \quad (5)$$

Тензор вязких напряжений в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{NS} + \tau \mathbf{u} \left[\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p \right] + \\ + \tau \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{NS}$ определяется через формулу (2).

Векторы, входящие в уравнение энергии, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} - p \frac{\mathbf{j}}{\rho}, \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_{NS} - \tau \rho \mathbf{u} \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \varepsilon + p (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

В данных выражениях τ представляет собой время релаксации, вычисляемое по следующей формуле:

$$\tau = \frac{\mu}{p}. \quad (8)$$

Описанные уравнения можно обобщить на случай термически неравновесного газа с превалирующей поступательно-колебательной неравновесностью.

Аналогично процедуре вывода, описанной в [4], получим уравнение переноса колебательной энергии m -ой моды (выкладки опускаются):

$$\frac{\partial E_{v(m)}}{\partial t} + \nabla \cdot (E_{v(m)} \mathbf{j}) = \nabla \cdot \mathbf{F}_{(m)} + \dot{E}_{v(m)}, \quad (9)$$

где поток определяется следующим образом:

$$\mathbf{F}_{(m)} = \tau \left(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \frac{1}{Pr} p \mathbf{I} \right) \nabla \cdot \left(\frac{E_{v(m)}}{\rho} \right). \quad (10)$$

Таблица 1. Циклограмма полета Titan-IIIВ согласно [10]

Высота, км	100	110	120	130	140	150	160	168
Время полета, с	220	237	253	275	300	334	368	421
Скорость, м/с	2730	2905	3139	3438	3920	4673	5405	5523

Источник определяется в зависимости от конкретного процесса энергообмена (исчерпывающий обзор таких процессов с указанием формы источников приведен, например, в [6]).

Для подкрепления изложенных в данном разделе выводов приведем результаты и анализ ряда задач по истечению струй для случая нарушения гипотезы сплошности.

Использовавшиеся методы моделирования для струйных течений хорошо известны и аналогичны применявшимся, например в [7, 8]. Их описанию посвящены, в частности, работы [9, 10].

Моделирование струи двигателя Titan-IIIВ

Для начала рассмотрим задачу моделирования истечения из сопла американской ракеты-носителя Titan-IIIВ. По данной задаче имеются опубликованные данные летного эксперимента [10].

В таблице 1 представлена циклограмма полета данного изделия.

Параметры на срезе сопла:

– состав (в мольных долях): $[H_2] = 0,0185$; $[H_2O] = 0,4652$; $[CO] = 0,0141$; $[CO_2] = 0,1051$; $[N_2] = 0,3563$; $[H] = 0,0089$; $NO = 0,0141$; $[OH] = 0,0021$; сумма (O_2, O, N) = 0,0167;

– температура, скорость и давление на срезе сопла: $T_a = 1318$ К; $U_a = 3200$ м/с; $p_a = 9900$ Па;

– угол наклона на срезе — 10° ;

– диаметр одного сопла — 1,63 м.

В летном эксперименте измерялось излучение струи. В данной работе расчет излучения проводился по методике, подробно описанной в [12].

Газодинамическая картина рассчитывалась по трем вариантам:

1) уравнения Навье — Стокса без учета второй вязкости;

2) уравнения Навье — Стокса с учетом второй вязкости по модели С.А. Лосева [13];

3) уравнения QGD.

Результаты приведены на рис. 1. Учет ненулевой второй вязкости позволяет получить результаты расчета ближе к экспериментальным данным. Более удачными представляются результаты расчета с использованием модели QGD.

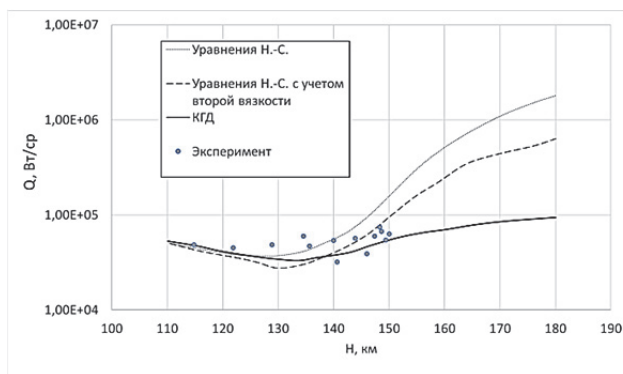


Рис. 1. Зависимость интегрального излучения струи по высоте

Струя модельного двигателя на разных высотах

Рассмотрим модельную задачу из [14]. В указанной работе рассматривался данный модельный двигатель на высотах порядка 10 км или предельный случай — истечение в вакуум. В данной работе рассматривается диапазон высот от 100 до 200 км с детальным расчетом газовой динамики.

Расчет проводился для семи высот полета: 100 км (скорость внешнего потока 2950 м/с), 110 км (3130 м/с), 120 км (3340 м/с), 130 км (3550 м/с), 150 км (4060 м/с), 180 км (4900 м/с), 200 км (5500 м/с). Параметры на срезе сопла для всех режимов одинаковые (табл. 2).

Таблица 2. Параметры на срезе сопла

$T_{аб}, K$	$U_{аб}, м/с$	$R_{аб}, м$	$P_{аб}, атм$	H_2	H_2O	CO	CO_2	N_2
2000	2500	0,5	0,3	0,05	0,4	0,05	0,15	0,35

На каждой высоте проводилось пять вариантов расчета:

1) решение системы уравнений Навье — Стокса с учетом термической неравновесности с нулевым значением коэффициента второй вязкости (на графиках обозначен как «NS» или «NS Neq»);

2) решение системы уравнений Навье — Стокса с учетом термической неравновесности со значением коэффициента второй вязкости по модели Лосева [13] — на графиках обозначено как «NS-bulk»;

3) решение системы квазигазодинамических уравнений с учетом термической неравновесности (на графиках обозначен как «QGD» или «QGD Neq»);

4) решение системы уравнений Навье — Стокса в предположении термического равновесия, то есть $T = T_{TR} = T_{\vartheta m}$ (на графиках обозначен как «NS Eq»);

5) решение системы квазигазодинамических уравнений в предположении термического равновесия (на графиках обозначен как «QGD Eq»).

В результате получены пространственные распределения газодинамических параметров для всех указанных выше вариантов. Данные распределения затем использовались для расчета излучения струй в диапазоне длин волн от 1 до 7 мкм.

Наиболее важными диапазонами длин волн являются:

1) в районе 2,7-мкм излучение H_2O с переходами с верхнего уровня третьей моды v_3 ;

2) колебательная температура $T_{H_2O}(v_2)$ наиболее важна в районе 6-мкм;

3) в районе 2,7-мкм ($3400-3800\text{ см}^{-1}$) излучение CO_2 связано с переходами с верхних уровней $2v_2 + v_3, v_1 + v_3$;

4) очень сильная линия излучения CO_2 находится в районе 4,3-мкм и связана с переходами с верхнего уровня третьей моды v_3 ;

5) наконец, линия излучения CO находится в районе 4,7-мкм.

Поскольку CO_2 и H_2O практически всегда присутствуют в струях, особое внимание уделим диапазону 2,7-2,9-мкм. На рис. 2 представлена зависимость интегральной интенсивности излучения (Вт/ср) от высоты в диапазоне длин волн 1-7 мкм. Здесь и далее рассматривалась длина струи 5 км. Расчет проведен с учетом термической неравновесности.

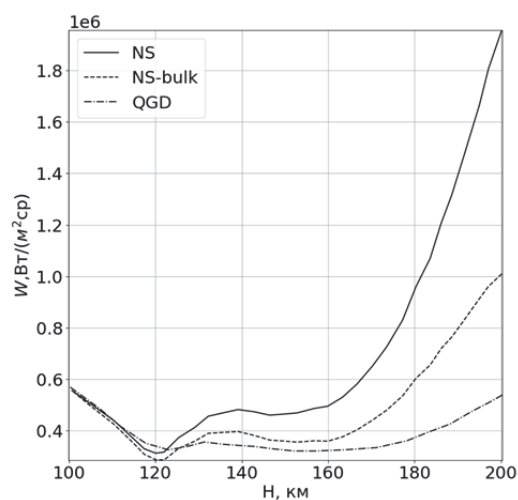


Рис. 2. Зависимость интегральной интенсивности излучения (диапазон 1-7-мкм) от высоты: NS — расчет с использованием уравнений Навье — Стокса с учетом термической неравновесности; NS-bulk — то же, но с учетом второй вязкости; QGD — расчет с использованием квазигазодинамических уравнений с учетом термической неравновесности

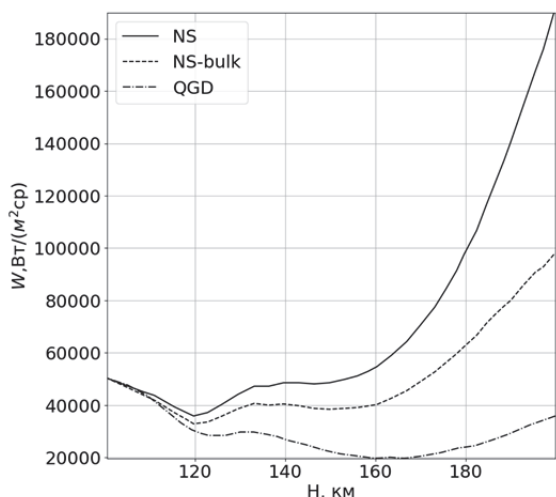


Рис. 3. Зависимость интегральной интенсивности излучения (диапазон 2,7–2,9 мкм) от высоты (см. пояснение к рис. 2)

Начиная со 120 км (длина свободного пробега в окружающей атмосфере на этой высоте составляет порядка 3 м) в расчете с использованием уравнений Навье — Стокса (без учета второй вязкости) наблюдается существенный рост излучения с высотой. В расчете с использованием QGD интегральное излучение практически не меняется по высоте. Результаты NS-bulk (уравнения Навье — Стокса с учетом второй вязкости) располагаются где-то посередине.

Аналогичные результаты и для интегрального излучения в диапазоне 2,7–2,9 мкм (рис. 3).

Распределение излучения в зависимости от высоты, полученное с использованием QGD, более всего соответствует наблюдаемой в реальности картине.

Также для полноты изложения приведем более развернутые результаты для вариантов расчетов NS (уравнения Навье — Стокса без учета второй вязкости) и QGD. Вариант расчета NS-bulk (т.е. с использованием уравнений Навье — Стокса с учетом второй вязкости) для большей читаемости результатов опустим. На рис. 4–6 показано распределение погонной интенсивности излучения (Вт/(ср см)) по длине струи для трех высот: 100, 150 и 180 км.

Данные результаты аналогичны полученным в [2], где использовался несколько более упрощенный численный метод.

На высоте 100 км оба варианта расчета практически совпадают. На высотах 150, 180 км наблюдается существенное различие. Наибольшее отличие погонной интенсивности излучения в обоих диапазонах проявляется на расстоянии 400–1000 м от среза сопла.

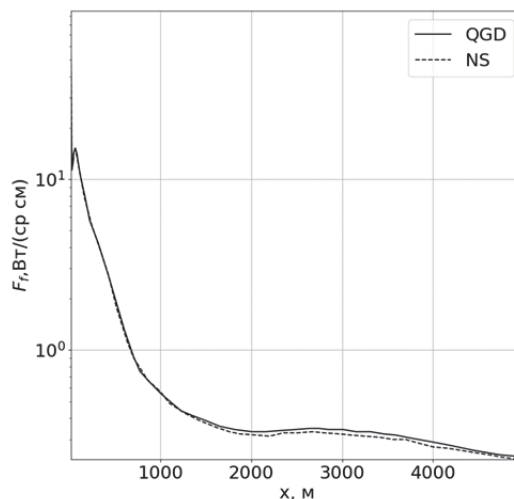


Рис. 4. Распределение погонной интенсивности излучения по длине струи для высоты 100 км в диапазоне длин волн 1÷7 мкм (см. пояснение к рис. 2)

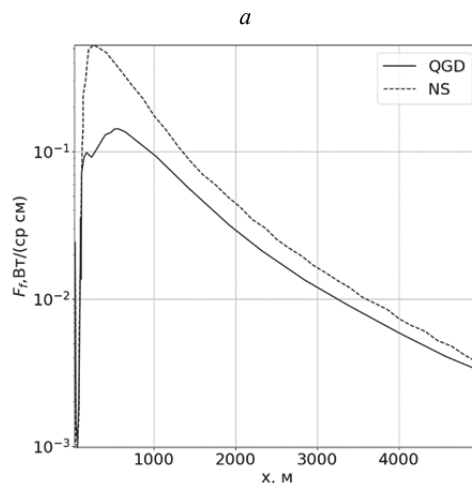
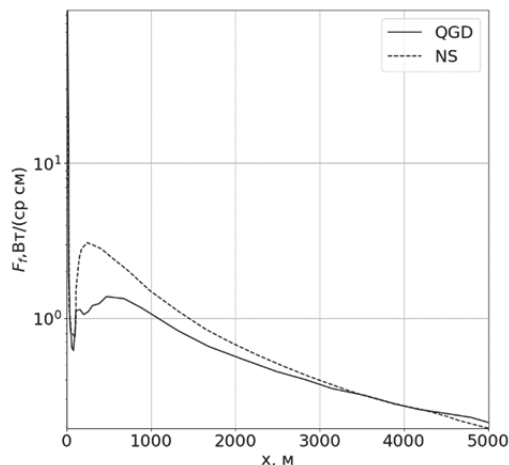


Рис. 5. Распределение погонной интенсивности излучения по длине струи для высоты 150 км: а — в диапазоне 1÷7 мкм; б — в диапазоне 2,7÷2,9 мкм (см. пояснение к рис. 2)

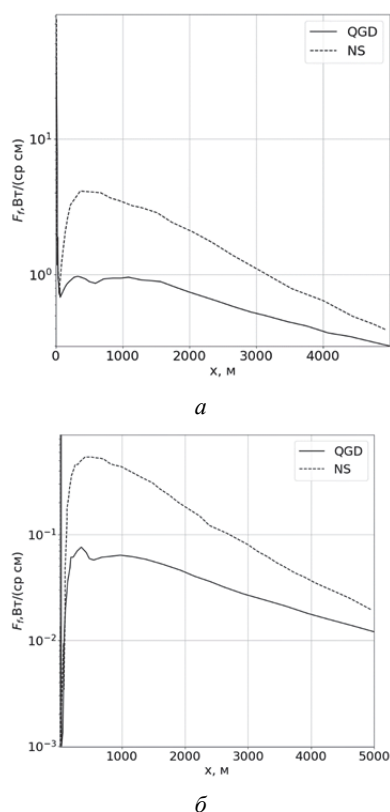


Рис. 6. Распределение погонной интенсивности излучения по длине струи для высоты 180 км: *a* — в диапазоне 1–7 мкм; *б* — в диапазоне 2,7–2,9 мкм (см. пояснение к рис. 2)

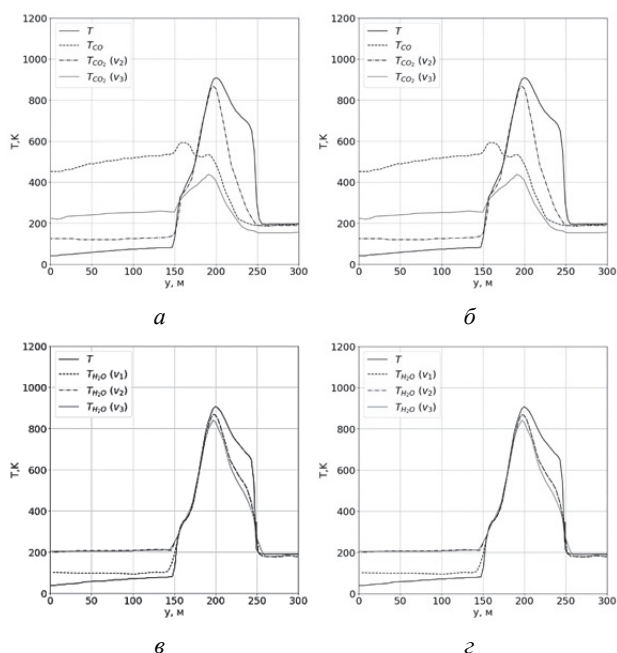


Рис. 7. $h = 100$ км. Поперечные профили температур на расстоянии 400 м от среза сопла на высоте 100 км. *a, б* — расчет с использованием уравнений Навье — Стокса с учетом термической неравновесности; *в, г* — расчет с использованием квазигазодинамических уравнений с учетом термической неравновесности

Рассмотрим поперечные профили температур на расстоянии 400 м от среза сопла, в которых наблюдается аналогичная картина.

На рис. 7 представлены поперечные профили температур (поступательно-вращательной и колебательных) на расстоянии 400 м от среза сопла на высоте 100 км.

На рассматриваемой высоте результаты с использованием уравнений Навье — Стокса и QGD, как уже отмечалось ранее, практически совпадают.

Однако по данным профилям уже ярко виден эффект термической неравновесности: в области сжатого слоя происходит резкий заброс поступательной температуры. В равновесном случае здесь энергия равномерно перераспределится бы по всем степеням свободы газа. В реальности колебательные температуры «не успевают» выровняться с поступательной. Как будет показано ниже, данный эффект существенно усиливается с ростом высоты (падением давления).

Интересно проанализировать спектральную интенсивность излучения для обоих случаев. Она показана на рис. 8. Спектры практически совпадают.

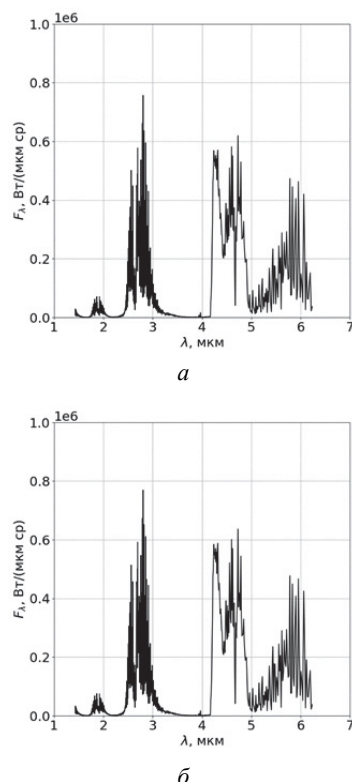


Рис. 8. $h = 100$ км. Спектральная интенсивность излучения на высоте 100 км. *a* — расчет с использованием уравнений Навье — Стокса с учетом термической неравновесности; *б* — расчет с использованием квазигазодинамических уравнений с учетом термической неравновесности

Мы видим сильные линии H₂O (районы 2,7 мкм и 6 мкм), CO₂ (районы 2,7 мкм и 4,3 мкм) и CO (район 4,7 мкм). Действительно, соответствующие колебательные температуры, связанные с излучением в этих диапазонах спектра, еще достаточно велики на этой высоте.

На рис. 9 представлены поперечные профили температур (поступательно-вращательной и колебательных) на расстоянии 400 м от среза сопла на высоте 150 км.

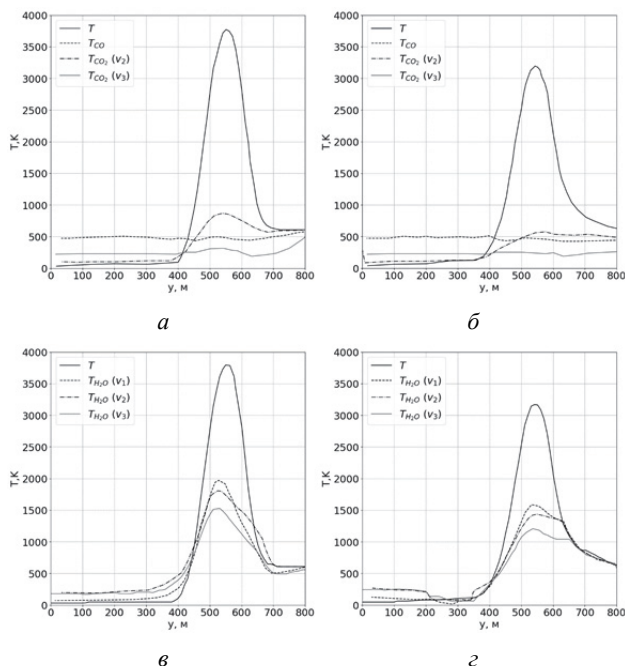


Рис. 9. $h = 150$ км. Поперечные профили температур на расстоянии 400 м от среза сопла на высоте 150 км (см. пояснение к рис. 7)

Расчеты с использованием уравнений Навье — Стокса и QGD уже отличаются. Это относится как к поступательно-вращательной температуре, так и колебательным температурам. Колебательные температуры $T_{CO_2}(v_3)$ и T_{CO} практически заморожены в обоих случаях, и их вклад в спектральное излучение (рис. 10) одинаков соответственно в районах 4,3 мкм и 4,7 мкм.

Влияние разреженности гораздо сильнее проявляется для колебательных температур воды и $T_{CO_2}(v_2)$ и, соответственно, в диапазоне спектра 2,7 мкм.

Аналогичные результаты получены для высоты 180 км (рис. 11 и 12). Влияние разреженности газа проявляется еще сильнее: все колебательные температуры значительно ниже, а все важные линии спектра существенно ослабевают.

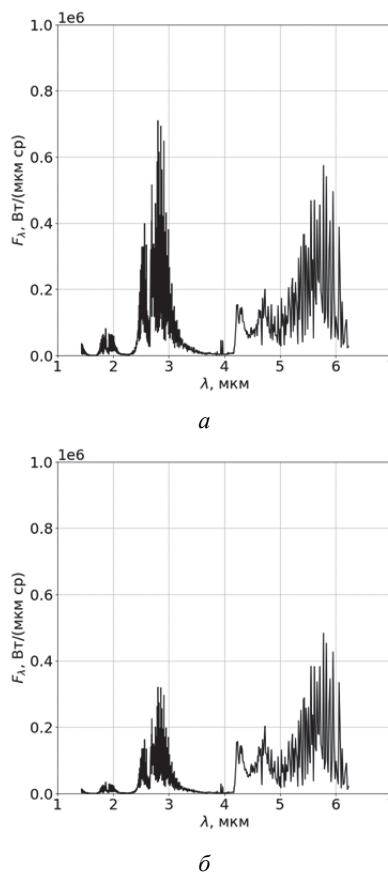


Рис. 10. $h = 150$ км. Спектральная интенсивность излучения на высоте 150 км (см. пояснение к рис. 8)

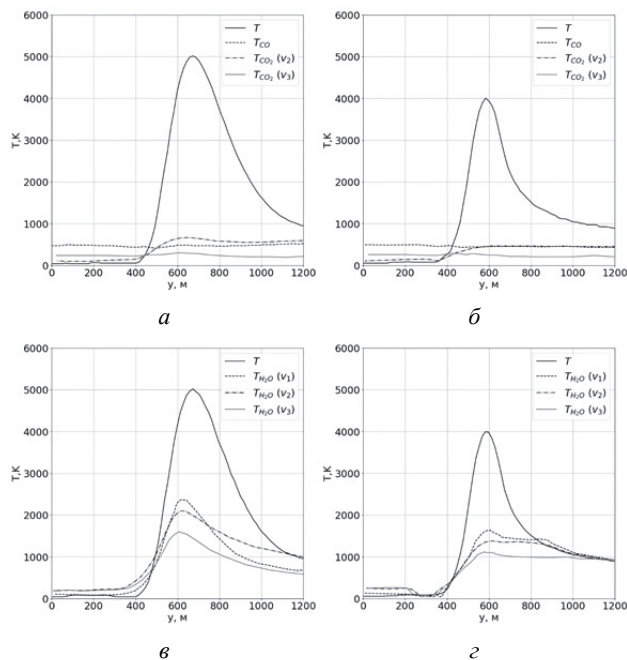


Рис. 11. $h = 180$ км. Поперечные профили температур на расстоянии 400 м от среза сопла на высоте 180 км (см. пояснение к рис. 7)

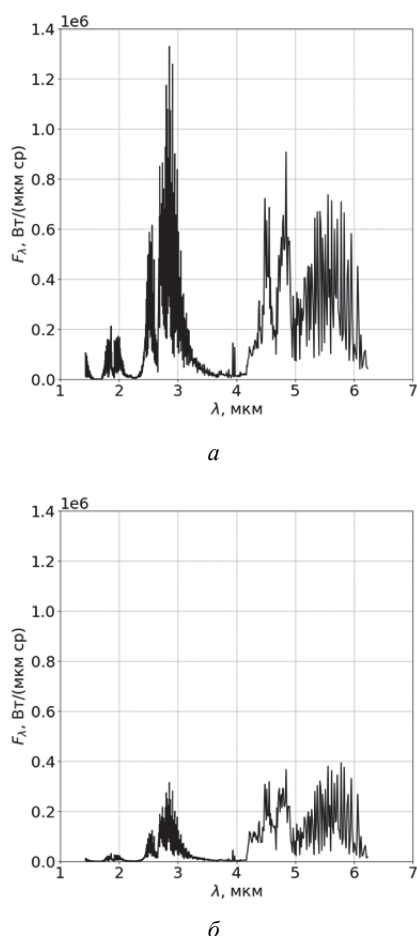


Рис. 12. $h = 180$ км. Спектральная интенсивность излучения на высоте 180 км (см. пояснение к рис. 8)

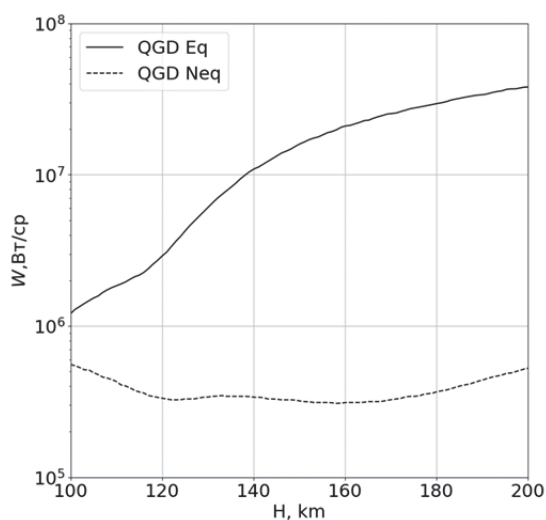


Рис. 13. Зависимость интегральной интенсивности излучения (диапазон $1 \div 7$ мкм) от высоты: QGD Eq — расчет с использованием квазигазодинамических уравнений в предположении термического равновесия; QGD Neq — расчет с использованием квазигазодинамических уравнений с учетом термической неравновесности

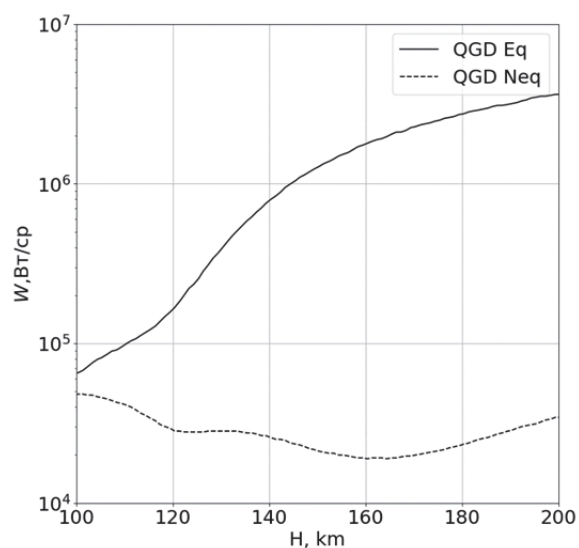


Рис. 14. Зависимость интегральной интенсивности излучения (диапазон $2,7 \div 2,9$ мкм) от высоты (см. пояснение к рис. 13)

В заключение для иллюстрации важности учета термической неравновесности на рис. 13, 14 приведено сравнение результатов расчетов решение системы QGD уравнений с учетом неравновесности (QGD Neq) и без ее учета (QGD Eq).

Видно, что отличие двух расчетов проявляется уже на высоте 100 км и на 200 км достигает двух порядков.

Моделирование истечения из звукового микросопла

Рассмотрим струю, истекающую из звукового микросопла диаметром $D = 300$ мкм в разреженное пространство. Рабочее тело — CO_2 . Данная задача исследовалась экспериментально и теоретически в [15, 16].

Рассматривались четыре варианта полного давления:

$$P_0^I = 203 \times 10^3 \text{ Па}, P_0^{II} = 103 \times 10^3 \text{ Па},$$

$$P_0^{III} = 44 \times 10^3 \text{ Па}, P_0^{IV} = 23 \times 10^3 \text{ Па}.$$

Проведем два варианта расчета: с использованием обычных уравнений Навье — Стокса и системы QGD.

На рис. 15 представлено изменение температуры вдоль оси струи. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными в пределах 15–30%, которые декларированы для данного эксперимента.

Как видно из рисунков, применение модели QGD позволяет получить результаты более близкие к экспериментальным.

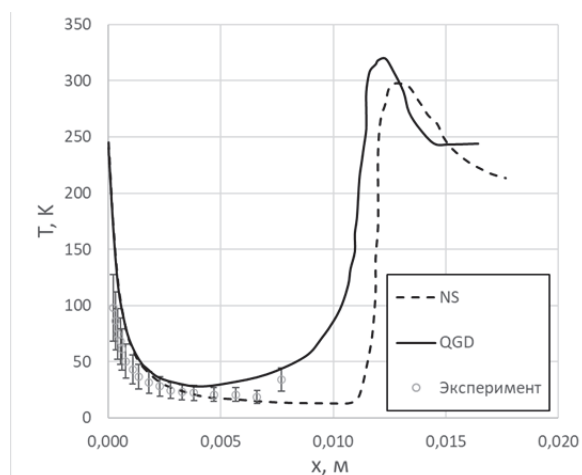


Рис. 15. Осевое распределение температуры для варианта I

Заключение

На основе проведенного анализа можно сделать следующие выводы.

1. При расчете с использованием QGD уравнений интенсивность излучения существенно ниже, чем при расчете с использованием стандартной системы уравнений Навье — Стокса. Это отличие начинается примерно с высоты полета 120 км, и на высоте 200 км достигает почти 5 раз.

2. Интенсивность излучения при использовании QGD уравнений практически не зависит от высоты полета.

3. Более низкая интенсивность излучения, полученная при использовании QGD уравнений по сравнению с уравнениями Навье — Стокса, обусловлена тем, что температуры (поступательная, вращательные и колебательные) в слое смешения струи с окружающим воздухом имеют более низкое значение.

4. Особенно важное значение указанный эффект имеет в диапазоне длин волн в районе 2,7 мкм, так как использование QGD уравнений приводит к существенному уменьшению колебательных температур, соответствующих излучению в данном диапазоне.

5. Расчет с использованием предположения о термическом равновесии (то есть равновесия между всеми энергетическими модами) приводит к совершенно нефизичным результатам: излучение завышается на 1–2 порядка.

6. Меньшая интенсивность излучения, получаемая при использовании QGD уравнений и уравнений Навье — Стокса с учетом ненулевого коэффициента второй вязкости (по сравнению с уравнениями Навье — Стокса с нулевым коэффи-

циентом второй вязкости) объясняется тем, что в названных уравнениях учитывается увеличение толщины скачка и уменьшается температура в сжатом слое.

Список источников

1. **Kochetkov Y.M., Molchanov A.M., Siluyanov M.V.** Calculation of high-altitude jets of the rocket engine based on quasi-gasdynamics equations // *Russian Aeronautics*. 2019. Vol. 62. No. 3. P. 423–428. URL: <https://doi.org/10.3103/S1068799819030097>
2. **Молчанов А.М., Попов В.Э.** Расчет газовой динамики и излучения высотных струй // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2018. Т. 19. Вып. 2. URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-2/articles/753/>
3. **Chikitkin A., Rogov B., Tirskey G., Utyuzhnikov S.** Effect of bulk viscosity in supersonic flow past spacecraft // *Applied Numerical Mathematics*. 2015. Vol. 93. P. 47–60. URL: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2014.01.004>
4. **Elizarova T. G.** Quasi-gas-dynamic Equations. Springer, Berlin Heidelberg, 2009. 286 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-00292-2>
5. **Молчанов А.М., Янышев Д.С., Быков Л.В.** О роли второй вязкости и справедливости гипотезы стока при математическом моделировании теплообмена и гидродинамики в высокоскоростных течениях // *Материалы Восьмой Российской национальной конференции по теплообмену (17–22 октября 2022 г., Москва)*. В 2 т. Т. 1. Москва: МЭИ, 2022.
6. *Физико-химические процессы в газовой динамике. Справочник*. В 3 т. Т. 2. Физико-химическая кинетика и термодинамика / под ред. С.А. Лосева. Москва: Научный издательский центр механики, 2002. 368 с.
7. **Быков Л.В., Молчанов А.М.** Математическое моделирование струй реактивных двигателей // *Тепловые процессы в технике*. 2011. Т. 3. № 3. С. 98–107.
8. **Быков Л.В., Завелевич Ф.С., Молчанов А.М.** Расчет теплового излучения струй реактивных двигателей // *Тепловые процессы в технике*. 2011. Т. 3. № 4. С. 164–176.
9. **Molchanov A.M.** Numerical Simulation of Supersonic Chemically Reacting Turbulent Jets // *20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference (27–30 June, 2011, Honolulu, Hawaii)*. URL: <https://doi.org/10.2514/6.2011-3211>
10. **Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V., Varaksin A.Y.** The Adaptive Composite Block-Structured Grid Calculation of the Gas-Dynamic Characteristics of an Aircraft Moving in a Gas Environment // *Mathematics*. 2022. Vol. 10(12). Article number 2130. URL: <https://doi.org/10.3390/math10122130>
11. **Simmons F.S.** Rocket Exhaust Plume Phenomenology. El Segundo: Aerospace Press. 2000, 286 p. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/book/10.2514/4.989087>

12. **Molchanov A.M., Bykov L.V., Yanyshev D.S.** Calculating thermal radiation of a vibrational nonequilibrium gas flow using the method of k-distribution // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2017. Vol. 24. No. 3. P. 399–419. URL: <https://doi.org/10.1134/S086986431703009X>
13. Физико-химические процессы в газовой динамике. Справочник. В 3 т. Т. 3. Модели процессов молекулярного переноса в физико-химической газодинамике / под ред. С.А. Лосева. Москва: Физматлит, 284 с.
14. **Vitkin E.I., Karelin V.G., Kirillov A.A., Suprun A.S., Khadyka J.V.** A physico-mathematical model of rocket exhaust plumes // *International journal of heat and mass transfer*. 1997. Vol. 40. No. 5. P. 1227–1241. URL: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00140-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00140-8)
15. **Maté B., Tejeda G., Montero S.** Raman spectroscopy of supersonic jets of CO₂: Density, condensation, and translational, rotational, and vibrational temperatures // *The Journal of Chemical Physics*. 1998. Vol. 108. No. 7. P. 2676–2685. URL: <https://doi.org/10.1063/1.475660>
16. **Maté B., Graur I. A., Elizarova T., Chirokov I., Tejeda G., Fernández J., Montero S.** Experimental and numerical investigation of an axisymmetric supersonic jet // *Journal of Fluid Mechanics*. 2001. Vol. 426. P. 177–197. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112000002329>
1. **Kochetkov Y.M., Molchanov A.M., Siluyanov M.V.** Calculation of high-altitude jets of the rocket engine based on quasi-gasdynamic equations. *Russian Aeronautics*, 2019, vol. 62, no. 3, pp. 423–428. URL: <https://doi.org/10.3103/S1068799819030097>
2. **Molchanov A.M., Popov V.E.** Calculation of Gas Dynamics and Radiation of High-Altitude Jets. *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2018, vol. 19, iss. 2. URL: <http://chemphys.edu.ru/issues/2018-19-2/articles/753/>
3. **Chikitkin A., Rogov B., Tirsky G., Utyuzhnikov S.** Effect of bulk viscosity in supersonic flow past spacecraft. *Applied Numerical Mathematics*, 2015, vol. 93, pp. 47–60. URL: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2014.01.004>
4. **Elizarova T. G.** Quasi-gas-dynamic Equations. Springer, Berlin Heidelberg, 2009, 286 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-00292-2>
5. **Molchanov A.M., Yanyshev D.S., Bykov L.V.** O roli vtoroi vyazkosti i spravedlivosti gipotezy stoksa pri matematicheskom modelirovanii teploobmena i gidrodinamiki v vysokoskorostnykh techeniyakh [On the role of the second viscosity and the validity of the Stokes hypothesis in mathematical modeling of heat transfer and hydrodynamics in high-speed flows]. *Materialy Vos'moi Rossiiskoi national'noi konferentsii po teploobmenu* [Proceedings of the Eighth Russian National Conference on Heat Transfer Materialy Vos'moi Rossiiskoi national'noi konferentsii po teploobmenu (17–22 october 2022, Moscow)]. In 2 vol. Vol. 1. Moscow: Moscow Power Engineering Institute, 2022
6. Физико-химические процессы в газовой динамике. Справочник. В 3 томах. Том 2. Физико-химическая кинетика и термодинамика [Physico-chemical processes in gas dynamics. Handbook in 3 vol. Vol. 2. Physico-chemical kinetics and thermodynamics]. Ed. by S.A. Losev. Moscow: Nauchnyj izdatel'skiy centr mehaniki, 2002. 368 p.
7. **Bykov L.V., Molchanov A.M.** Mathematical modeling of jets from jet engines. *Thermal processes in engineering*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 98–107.
8. **Bykov L.V., Zavelevich F.S., Molchanov A.M.** Calculation of thermal radiation from jet engines. *Thermal processes in engineering*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 164–176.
9. **Molchanov A.M.** Numerical Simulation of Supersonic Chemically Reacting Turbulent Jets. *20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference (27–30 June, 2011, Honolulu, Hawaii)*. URL: <https://doi.org/10.2514/6.2011-3211>
10. **Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V., Varaksin A.Y.** The Adaptive Composite Block-Structured Grid Calculation of the Gas-Dynamic Characteristics of an Aircraft Moving in a Gas Environment. *Mathematics*, 2022, vol. 10(12), article number 2130. URL: <https://doi.org/10.3390/math10122130>
11. **Simmons F.S.** Rocket Exhaust Plume Phenomenology. El Segundo: Aerospace Press, 2000, 286 p. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/book/10.2514/4.989087>
12. **Molchanov A.M., Bykov L.V., Yanyshev D.S.** Calculating thermal radiation of a vibrational nonequilibrium gas flow using the method of k-distribution. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2017, vol. 24, no. 3, pp. 399–419. URL: <https://doi.org/10.1134/S086986431703009X>
13. Физико-химические процессы в газовой динамике. Справочник. В 3 томах. Том 3. Модели процессов молекулярного переноса в физико-химической газодинамике [Physico-chemical processes in gas dynamics. Handbook. In 3 vol. Vol. 3. Models of molecular transfer processes in physical and chemical gas dynamics]. Ed. by S.A. Losev. Moscow: Fizmatlit, 2012, 284 p.
14. **Vitkin E.I., Karelin V.G., Kirillov A.A., Suprun A.S., Khadyka J.V.** A physico-mathematical model of rocket exhaust plumes. *International journal of heat and mass transfer*, 1997, vol. 40, no. 5, pp. 1227–1241. URL: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00140-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00140-8)
15. **Maté B., Tejeda G., Montero S.** Raman spectroscopy of supersonic jets of CO₂: Density, condensation, and translational, rotational, and vibrational temperatures. *The Journal of Chemical Physics*, 1998, vol. 108, no. 7, pp. 2676–2685. URL: <https://doi.org/10.1063/1.475660>
16. **Maté B., Graur I. A., Elizarova T., Chirokov I., Tejeda G., Fernández J., Montero S.** Experimental

and numerical investigation of an axisymmetric supersonic jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, vol. 426,

pp. 177–197. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112000002329>

Статья поступила в редакцию 28.10.2023; одобрена после рецензирования 10.11.2023; принята к публикации 18.11.2023.

The article was submitted on 28.10.2023; approved after reviewing on 10.11.2023; accepted for publication on 18.11.2023.