

УДК 539.3

К вопросу об устойчивости пластин переменной жесткости**Ерков А.П.*, Дудченко А.А.****

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: ap.erkov@yandex.ru*

***e-mail: a_dudchenko@mail.ru*

Аннотация

В статье рассматриваются три задачи устойчивости пластин переменной жесткости: со ступенчатым изменением толщины, с непрерывным линейным изменением толщины и с комбинированным изменением толщины (где есть как участки постоянной толщины, так и участки с непрерывно изменяемой толщиной). Принято нагружение пластин в виде сжимающей, равномерно распределенной по двум торцам силы, приложенной в срединной плоскости. Граничные условия – шарнирное закрепление по всем четырем сторонам пластины. Рассмотрены пластины из изотропного материала и из слоистого композита.

Для исследования устойчивости пластин переменной жесткости использовался вариационный метод Ритца. В работе показано применение метода к задачам устойчивости пластин переменной жесткости. Приведены результаты расчета для нескольких вариантов геометрии пластин.

Ключевые слова: устойчивость пластин, пластины переменной жесткости, метод Ритца, критическая сила, устойчивость пластин переменной жесткости, композитные пластины.

Введение

Актуальность задач обусловлена тем, что вопросы устойчивости пластин переменной жесткости еще недостаточно широко исследованы аналитически. На текущий момент, подобные задачи решаются в основном численными или численно-аналитическими методами, аналитические методы используются мало. В [1] Зотов А.А. приводит метод решения задачи устойчивости стержней и пластин переменной жесткости на основе аппарата единичных и ступенчатых базисных функций. В [2] авторы решают задачу устойчивости пластины переменной жесткости, используя метод Бубнова-Галеркина. В [3] рассмотрена задача устойчивости цилиндрической панели переменной толщины, а в [4] задача устойчивости пластины переменной жесткости с начальным прогибом. В [2], [3] и [4] задача устойчивости решается аналитически, но рассматриваются пластины и панели с законом изменения толщины не имеющим практического интереса. В [5], [6] и [7] изучена устойчивость пластин переменной толщины с учетом физической нелинейности, для решения задач применялись численные методы. Также следует отметить исследования по устойчивости цилиндрических оболочек переменной жесткости, например [8]-[11]. Устойчивость пластин постоянной жесткости исследована наиболее полно и описана в [12]-[22].

Задачи устойчивости пластин наиболее актуальны для авиационной и

космической отраслей, где широко применяются тонкостенные конструкции. Крыло, оперение и фюзеляж самолета – классические примеры тонкостенных конструкций. При проектировании подобных конструкций важным расчетом является проверка на устойчивость, как общую, так и местную. При расчете на устойчивость часто используется идеализация конструкции. Например, клетка образованная двумя стрингерами и двумя нервюрами, рассматривается как пластина, шарнирно опертая по четырем сторонам. Для подобных пластин постоянной толщины аналитические решения получены более века назад [12]. Развитие теории устойчивости пластин отражено, к примеру, в [13], [14]. Также при проектировании панелей рассматривается потеря устойчивости подкрепляющего набора, например, один из подходов при проектировании подкрепленной панели самолета рассмотрен в [24], а в [25] рассмотрена задача устойчивости перекрестно подкрепленной пластины.

Аналитические методы расчета на устойчивость пластин переменной жесткости не получили распространения, судя по всему, ввиду того, что в конструкциях стараются избегать таких мест, т.е. стараются делать пластину постоянной толщины. Тем не менее, задача устойчивости пластины переменной жесткости представляет научный и практический интерес. Кроме того, подобные пластины могут быть изготовлены из слоистого композиционного материала.

В работе рассматривается решение задачи устойчивости для трех типов пластин переменной жесткости: со ступенчатым изменением толщины, с непрерывным линейным изменением толщины и с комбинированным изменением

толщины (где есть как участки постоянной толщины, так и участки с непрерывно изменяемой толщиной).

Методология решения задачи устойчивости, предлагаемая в данной работе, основана на вариационном методе Ритца. Ранее, схожий подход был применен к решению задачи устойчивости пластин постоянной жесткости, например в [16]. В данной работе метод решения распространен на задачи устойчивости пластин переменной жесткости, при этом, дана иная математическая реализация метода. Также, схожий подход был применен в [2], но был использован метод Бубнова-Галеркина.

Научная новизна заключается в решении задачи устойчивости для трех типов пластин переменной жесткости с конфигурацией изменения толщины имеющей практический интерес. Также методы, применяемые для решения задач устойчивости изотропных пластин переменной жесткости, применены к решению задачи устойчивости пластин переменной жесткости из слоистого композиционного материала.

В работе принято, что до потери устойчивости, напряжения в пластинах находятся в упругой зоне и не приводят к их разрушению.

Устойчивость пластины со ступенчатым изменением толщины

Рассмотрим пластину со ступенчатым изменением толщины (см. Рис. 1). Нагружение пластины примем в виде сжимающей равномерно распределенной по двум торцам (перпендикулярным оси x) нагрузки, приложенной в срединной плоскости в направлении оси x . Граничные условия – шарнирное закрепление по всем четырем сторонам пластины. Рассмотрим сначала пластину из изотропного материала.

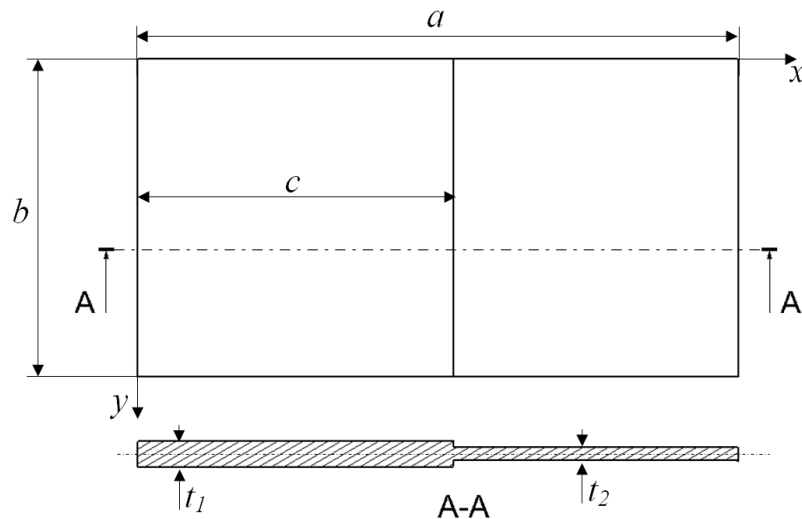


Рис. 1 – Пластина со ступенчатым изменением толщины

В методе Ритца (см. [13, 16]) функция прогиба пластины должна быть представлена в виде ряда. Для пластины со ступенчатым изменением толщины будем использовать тригонометрический ряд, который широко используется в задачах устойчивости пластин постоянной жесткости:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{mx\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{b}\right) \quad (1)$$

Потенциальная энергия деформации пластины постоянной толщины определяется как:

$$V = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \quad (2)$$

Для пластины, состоящей из двух участков постоянной толщины, потенциальная энергия деформации может быть представлена суммой:

$$V = V_1 + V_2, \quad (3)$$

где:

$$V_1 = \frac{1}{2} D_1 \int_0^c \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy$$

- потенциальная энергия деформации для первого участка пластины;

$$V_2 = \frac{1}{2} D_2 \int_c^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy$$

- потенциальная энергия деформации для второго участка пластины;

D_1 - цилиндрическая жесткость для первого участка пластины;

D_2 - цилиндрическая жесткость для второго участка пластины.

Работа внешних сил для пластины постоянной толщины определяется как:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{1}{2} N_x \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (4)$$

Для пластины, состоящей из двух участков постоянной толщины, работа внешних сил будет определяться тем же выражением (4), поскольку прогиб описывается одной функцией (в виде тригонометрического ряда) для обоих участков.

Полная энергия упругой системы определится как:

$$\mathcal{E} = V - T \quad (5)$$

Следуя методу Ритца, вариацию полной энергии системы представим в виде:

$$\delta\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial A_{ij}} \delta A_{ij} \quad (6)$$

Так как рассматриваемые состояния являются равновесными, то вариация должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial A_{ij}} \delta A_{ij} = 0 \quad (7)$$

Вариации δA_{ij} можно считать независимыми друг от друга, поэтому равенство нулю вариации полной энергии возможно при условии:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial A_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

В итоге получим $m \times n$ линейных алгебраических однородных уравнений относительно коэффициентов A_{ij} . Для того чтобы система уравнений имела ненулевое решение необходимо чтобы определитель составленный из коэффициентов при A_{ij} был равен нулю:

$$\Delta = 0 \quad (9)$$

Выражение для определителя дает уравнение степени $m \times n$ относительно N_x . Решая уравнение, получим $m \times n$ корней. Корни уравнения являются значениями критических нагрузок. В практических расчетах обычно требуется определить минимальную критическую нагрузку, в этом случае необходимо взять минимальное значение из $m \times n$ корней.

Рассмотрим теперь пластину из слоистого композиционного материала.

Примем, что укладка слоев симметричная и сбалансированная, т.е. матрица смешенных жесткостей состоит из нулей. Пусть также как и на Рис. 1 пластина состоит из двух участков постоянной толщины. Рассмотрим особенности расчета устойчивости композитной пластины.

Потенциальная энергия деформации композитной слоистой пластины постоянной толщины определяется как [16]:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \quad (10)$$

Для композитной пластины, состоящей из двух участков постоянной толщины, потенциальная энергия может быть определена (аналогично изотропной пластине) выражением (3). Работа внешних сил для композитной пластины определяется также как и для изотропной пластины (4). В остальном, алгоритм решения задачи устойчивости слоистой композитной пластины состоящей из двух участков постоянной толщины аналогичен алгоритму, рассмотренному выше для изотропной пластины.

Устойчивость пластины с непрерывным линейным изменением толщины

Рассмотрим пластину с непрерывным линейным изменением толщины (Рис. 2). Нагружение пластины примем в виде сжимающей равномерно распределенной по двум торцам (перпендикулярным оси x) нагрузки, приложенной в срединной плоскости в направлении оси x . Граничные условия – шарнирное закрепление по

всем четырем сторонам пластины. Рассмотрим сначала пластину из изотропного материала. Для пластины с непрерывным изменением толщины используем тригонометрический ряд (1) с некоторыми изменениями:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi(x-a)}{b-a}\right) \sin\left(\frac{ny\pi}{c}\right), \quad (11)$$

где: $a = t_a l / (t_b - t_a)$ - величина смещения системы координат.

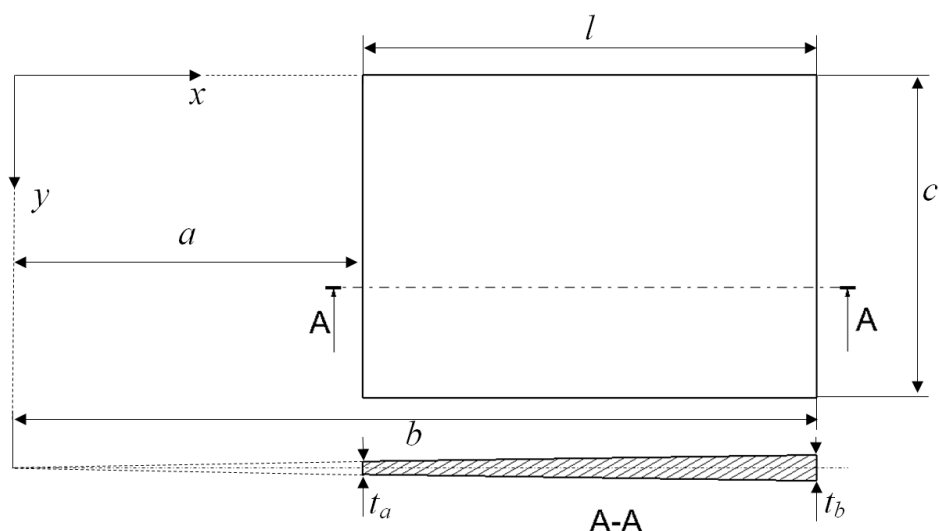


Рис. 2 – Пластина с непрерывным изменением толщины

Изменения в тригонометрический ряд внесены вследствие смещения начала системы координат (Рис. 2). Смещение начала системы координат упрощает вид функции цилиндрической жесткости пластины:

$$D = f(x) \Rightarrow D(x) = \frac{EI_b}{b^3(1-\mu^2)} x^3, \quad (12)$$

где: $I_b = \frac{t_b^3}{12}$ - момент инерции сечения полоски единичной ширины на правом торце.

Для пластины с непрерывным изменением толщины потенциальная энергия деформации будет иметь вид:

$$V = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^c D(x) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \quad (13)$$

В выражении (13) цилиндрическая жесткость является переменной величиной, поэтому она должна быть занесена под знак интеграла.

Работа внешних сил для пластины с непрерывным изменением толщины определяется тем же выражением что и для пластины постоянной толщины (4).

Дальнейший ход вычислений такой же, как и для пластины со ступенчатым изменением толщины.

Следует отметить, что методика решения применима для пластины с любым законом изменения толщины, который можно описать непрерывной функцией.

Рассмотрим особенности расчета композитной слоистой пластины с квазинепрерывным изменением толщины (см. Рис. 3). Толщина меняется квазинепрерывно вследствие того, что в слоистом композите невозможно изменить толщину без ступенек (вследствие прерывания слоев). На Рис. 3 показано продольное сечение слоистой пластины с квазинепрерывным изменением толщины. На рисунке пронумерованы участки с постоянной толщиной. В подобном случае, для решения задачи устойчивости необходимо рассматривать каждый участок в отдельности, т.е. мы будем иметь не два участка, как было рассмотрено выше, а n участков.

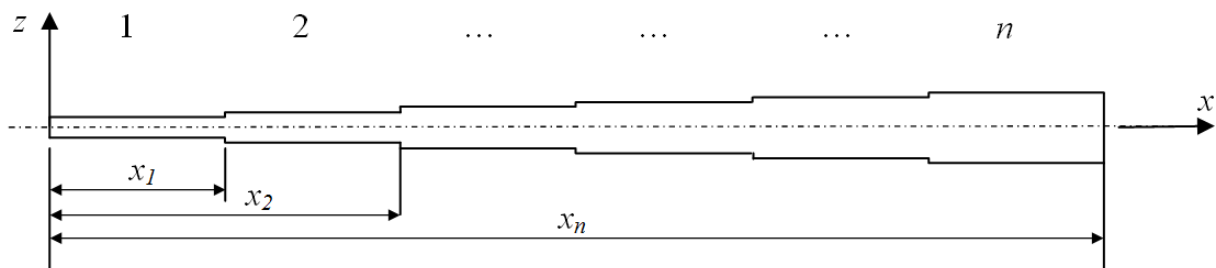


Рис. 3 – Композитная пластина с квазинепрерывным изменением толщины

Согласно указанному выше, мы будем иметь для каждого участка пластины свой набор изгибных жесткостей: $D_{11}^{(i)}, D_{22}^{(i)}, D_{66}^{(i)}, D_{12}^{(i)}, D_{16}^{(i)}, D_{26}^{(i)}$. В связи с этим, выражение для потенциальной энергии деформации можем записать в таком виде:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_0^c \left[D_{11}^{(i)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22}^{(i)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(D_{12}^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16}^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2D_{26}^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \quad (14)$$

Следует учесть, что выражение (14) справедливо в том случае, если на каждом участке укладка слоев будет симметричная (матрица $[B]=0$) и сбалансированная (члены матрицы $[A] A_{16} = A_{26} = 0$). На практике такой вариант укладки практически не реализуем, поскольку при прерывании слоев неизбежно будут обрезаться слои ориентированные не под 0 и 90 градусов, что приведет к появлению ненулевых членов матрицы $[A] A_{16}$ и A_{26} . В случае, если прерывание слоев приведет к несимметричной структуре слоев, то появятся ненулевые члены в матрице $[B]$. Появление ненулевых членов в матрице смешанных жесткостей $[B]$ может привести к тому, что даже при простом нагружении (к примеру, сжатию в продольном направлении) в пластине будет появляться изгиб или кручение, а в таком случае, это

уже не задача бифуркационной устойчивости, поскольку появится возмущающий фактор. Если же появятся ненулевые члены матрицы $[A]$ A_{16} и A_{26} , то это приведет к появлению сдвига в плоскости пластины (при нагружении сжатием/растяжением) и этот фактор сдвига будет необходимо учитывать в задаче устойчивости. В случае если сдвиг будет существенным, а методика не будет скорректирована для учета сдвига, полученная аналитически критическая сила окажется некорректной.

Проверка точности аналитического решения для подобной задачи (композитной пластины) выходит за рамки данной работы.

Устойчивость пластины с комбинированным изменением толщины

Рассмотрим пластину с комбинированным изменением толщины (Рис. 4). Нагружение пластины примем в виде сжимающей равномерно распределенной по двум торцам (перпендикулярным оси x) нагрузки, приложенной в срединной плоскости в направлении оси x . Граничные условия – шарнирное закрепление по всем четырем сторонам пластины.

Рассмотрим сначала пластину из изотропного материала. Для пластины с комбинированным изменением толщины используем тригонометрический ряд (1). Вид функции цилиндрической жесткости пластины на втором участке в выбранной системе координат:

$$D_2 = f(x) \Rightarrow D_2(x) = \frac{E \cdot h^3(x)}{12(1 - \mu^2)}, \text{ где } h(x) = \frac{x(t_3 - t_1) + t_1 l_2 - l_1(t_3 - t_1)}{l_2} \quad (15)$$

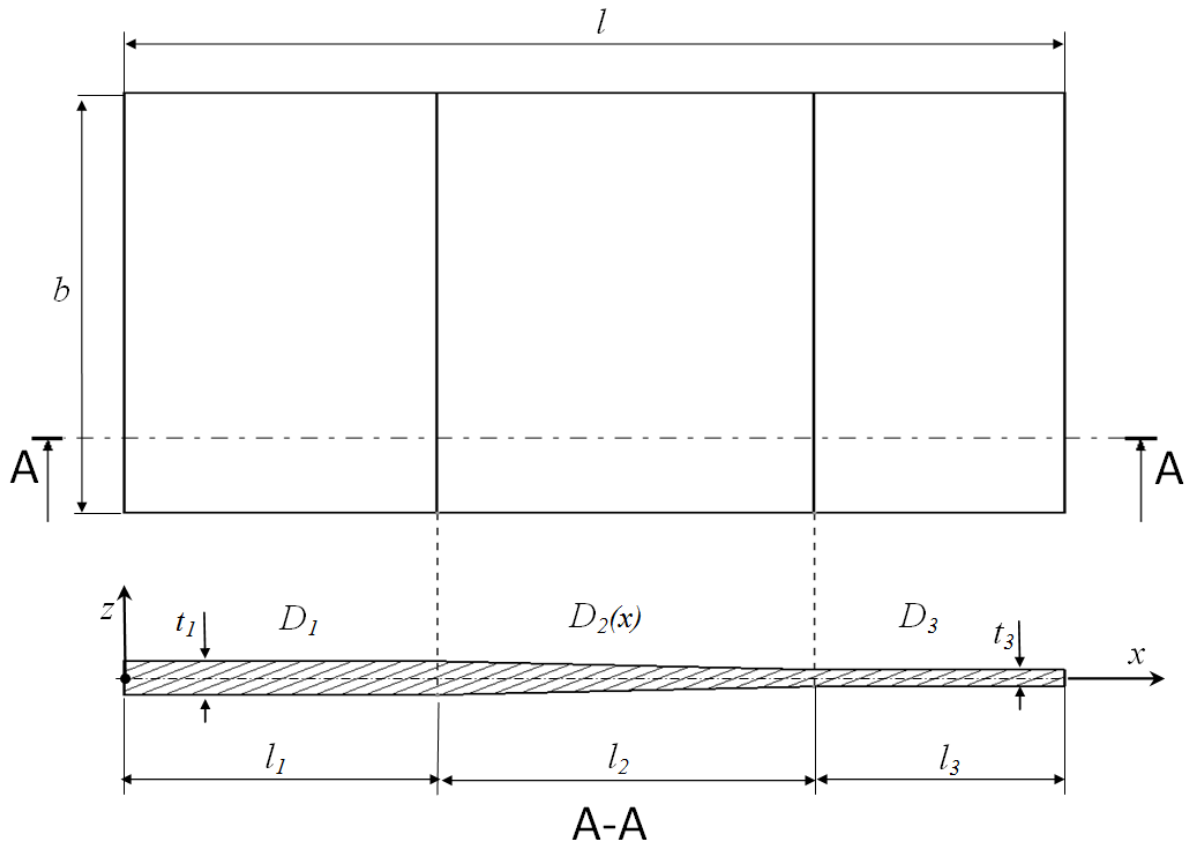


Рис. 4 – Пластина с комбинированным изменением толщины

Для пластины, состоящей из трех участков, потенциальная энергия деформации может быть представлена суммой:

$$V = V_1 + V_2 + V_3, \quad (16)$$

где:

$$V_1 = \frac{1}{2} D_1 \int_0^{l_1} \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy$$

- потенциальная энергия деформации для первого участка пластины;

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_1+l_2} \int_0^b D_2(x) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy$$

- потенциальная энергия деформации для второго участка пластины;

$$V_3 = \frac{1}{2} D_3 \int_{l_1+l_2}^l \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy$$

- потенциальная энергия деформации для третьего участка пластины;

D_1 - цилиндрическая жесткость для первого участка пластины;

$D_2(x)$ - цилиндрическая жесткость для второго участка пластины;

D_3 - цилиндрическая жесткость для второго участка пластины.

В выражении (16) цилиндрическая жесткость $D_2(x)$ является переменной величиной, поэтому она должна быть занесена под знак интеграла.

Работа внешних сил для пластины с комбинированным изменением толщины определяется тем же выражением что и для пластины постоянной толщины (4).

Дальнейший ход вычислений такой же, как и для пластины со ступенчатым изменением толщины.

Следует отметить, что методика решения применима для пластины с любым законом изменения толщины на втором участке, который можно описать непрерывной функцией. Вообще, методика применима для пластин с любым законом изменения момента инерции на каждом из участков, а также допускает разный материал на каждом из участков пластины.

Если принять что пластина состоит из слоистого композита, то все выводы и формулы из предыдущего раздела (композитная пластина с квазинепрерывным изменением толщины пакета) справедливы и для данной пластины. Пластина с комбинированным изменением толщины (толщины пакета) получается, если рассмотреть пластину на Рис. 3 у которой участки 1 и n имеют длины l_1 и l_3 (со

схемы на Рис. 4). Проверка точности аналитического решения для подобной задачи выходит за рамки данной работы.

Верификация аналитических расчетов устойчивости пластин

Для верификации результатов аналитического расчета использовались результаты, полученные методом конечных элементов в пакете программ MSC.Patran/Nastran. В Табл. 1 дана геометрия пластин, использованная в исследовании.

Табл. 1 – Геометрические характеристики пластин

Характеристики		вариант 1	вариант 2	вариант 3
Изотропная пластина со ступенчатым изменением толщины (см. Рис 1)				
t_1 и t_2 , м		0,004 / 0,002		
c , м		0,07	0,1	0,13
a и b , м		0,2 / 0,1		
Изотропная пластина с линейным непрерывным изменением толщины (см. Рис 2)				
c , м		0,1		
t_a и t_b , м		0,002 / 0,004		
l , м		0,1	0,15	0,2
Изотропная пластина с комбинированным изменением толщины (см. Рис 4)				
t_1, t_3 , м		0,004 / 0,002		
l_1 , м		0,03545	0,07412	0,11162
l_2 , м		0,05713		
l_3 , м		0,10742	0,06875	0,03125
b , м		0,1		
l , м		0,2		
Композитная пластина со ступенчатым изменением толщины (см. Рис 1)				
t_1 и t_2 , м	Укладка 1	0,0032 / 0,0016		
	Укладка 2	0,004 / 0,002		
	Укладка 3	0,0032 / 0,0016		
c , м		0,07	0,1	0,13
a и b , м		0,2 / 0,1		

Рассмотрены пластины из изотропного материала и из слоистого композита. В качестве изотропного материала взят алюминиевый сплав со свойствами: $E=6,867 \cdot 10^{10}$ Па и $\mu=0,3$. В Табл. 2 даны механические характеристики произвольного монослоя со средними свойствами, характерными для однонаправленных препрегов на основе углеволокна и эпоксидным связующим, а в Табл. 3 ÷ Табл. 5 даны укладки и изгибные жесткости пакета для композитной пластины состоящей из двух участков постоянной толщины.

Табл. 2 – Механические свойства монослоя на основе углеволокна

Толщина, м	E_{11} , МПа	E_{22} , МПа	μ_{12}	G_{12} , МПа	G_{23} , МПа	G_{31} , МПа
0,0002	147150	7360	0,25	3430	3430	3430

Табл. 3 – Изгибные жесткости композитной пластины. Укладка №1

Участок пластины	Толщина, м	D_{11}	D_{22}	D_{66}	D_{12}	D_{16}	D_{26}
Первый участок	0,0032	укладка:	[0 / 45 / -45 / 90 / 0 / 45 / -45 / 90] _s				
		220707	113011	54127	49800	8975	8975
Второй участок	0,0016	укладка:	[0 / 45 / -45 / 90] _s				
		35145	8221	5940	5400	2244	2244

Табл. 4 – Изгибные жесткости композитной пластины. Укладка №2

Участок пластины	Толщина, м	D_{11}	D_{22}	D_{66}	D_{12}	D_{16}	D_{26}
Первый участок	0,004	укладка:	[0 / 45 / -45 / 90 / 0 / 90 / 45 / -45 / 90 / 0] _s				
		395058	269414	99376	90926	12340	12340
Второй участок	0,002	укладка:	[90 / 45 / -45 / 90 / 0] _s				
		16338	66446	12560	11503	3365	3365

Табл. 5 – Изгибные жесткости композитной пластины. Укладка №3

Участок пластины	Толщина, мм	D_{11}	D_{22}	D_{66}	D_{12}	D_{16}	D_{26}
Первый участок	0,0032	укладка:	[0 / 30 / -30 / 90 / 0 / 30 / -30 / 90] _s				
		277518	78580	42936	38610	11585	3959
Второй участок	0,0016	укладка:	[0 / 30 / -30 / 90] _s				
		41198	4552	4748	4207	2896	990

При рассмотрении различных вариантов изотропной пластины с непрерывным изменением толщины, варьировалась только длина пластины (см. Табл. 1).

На Рис. 5 ÷ Рис. 7 показаны результаты конечно-элементного анализа устойчивости изотропных пластин (решатель SOL105 MSC.Nastran).

Следует отметить, что показанные на Рис. 5 формы потери устойчивости будут характерны и для композитных пластин (с двумя участками).

Исследование показало, что для задачи определения значения минимальной критической силы изотропной пластины со ступенчатым изменением толщины и с комбинированным изменением толщины достаточно принять $m=6$ и $n=1$, а для задачи с непрерывным изменением толщины - $m=4$ и $n=1$. Результаты сравнения аналитического расчета и расчета методом конечных элементов даны в Табл. 6.

Для композитной пластины решение сходится хуже, чем для изотропной. В Табл. 7 показаны результаты сравнения аналитического расчета и расчета методом конечных элементов. На Рис. 8 ÷ Рис. 10 даны графики сходимости решения при изменении числа членов ряда (1).

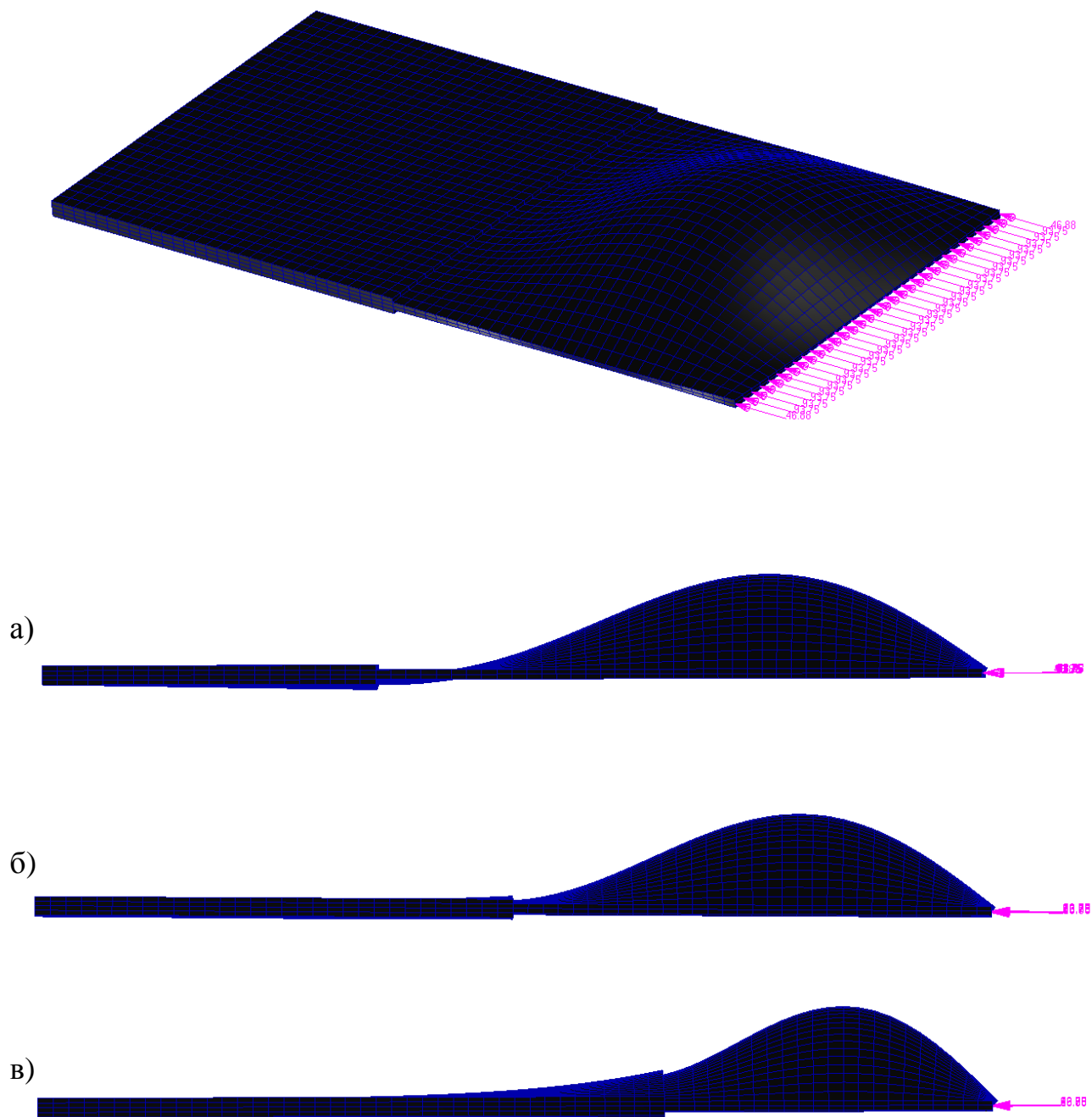


Рис. 5 – Нагружение и формы потери устойчивости изотропных пластин со ступенчатым изменением толщины: а) вариант 1, б) вариант 2, в) вариант 3

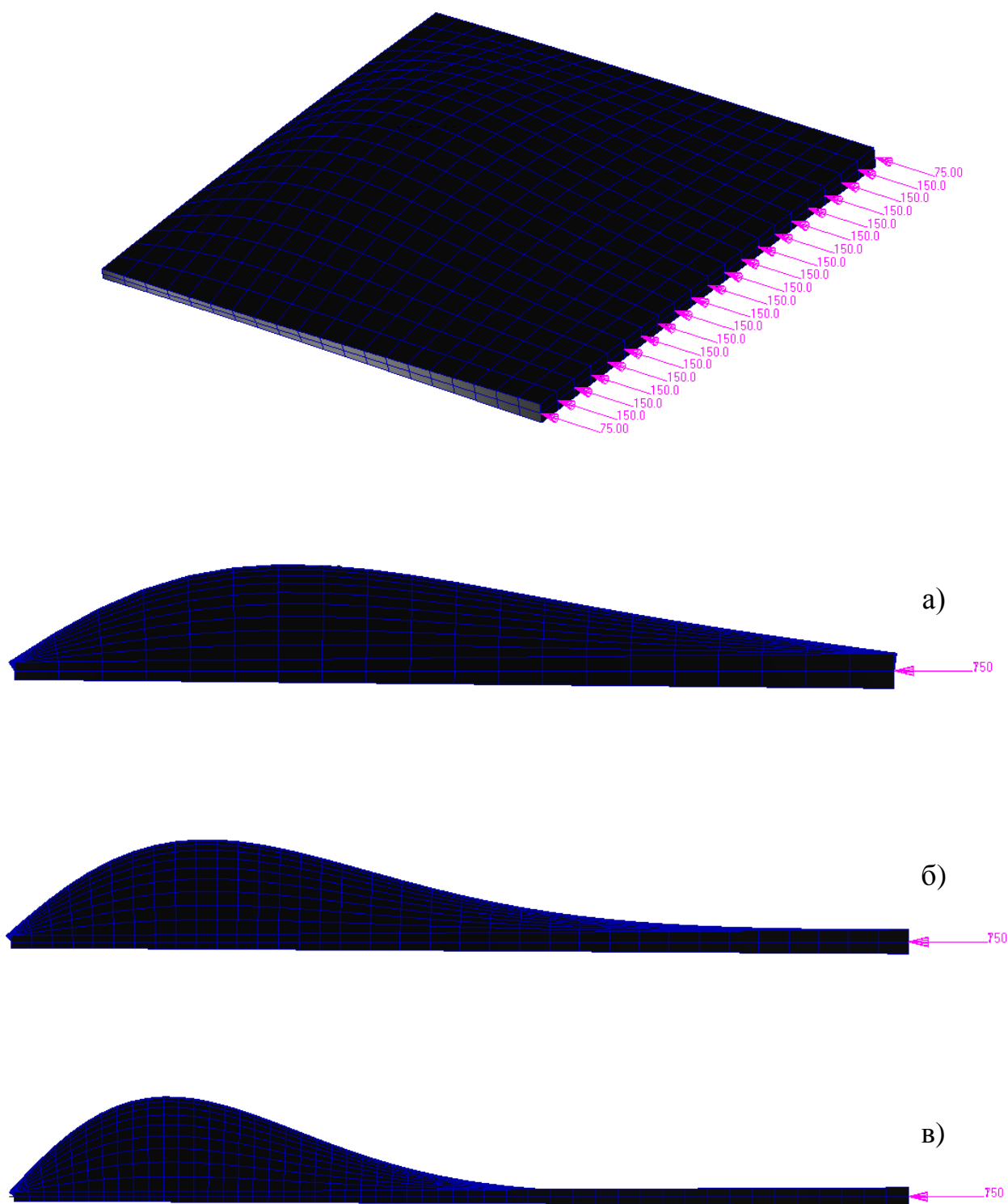


Рис. 6 – Нагружение и формы потери устойчивости рассмотренных изотропных пластин с непрерывным линейным изменением толщины:

а) вариант 1, б) вариант 2, в) вариант 3

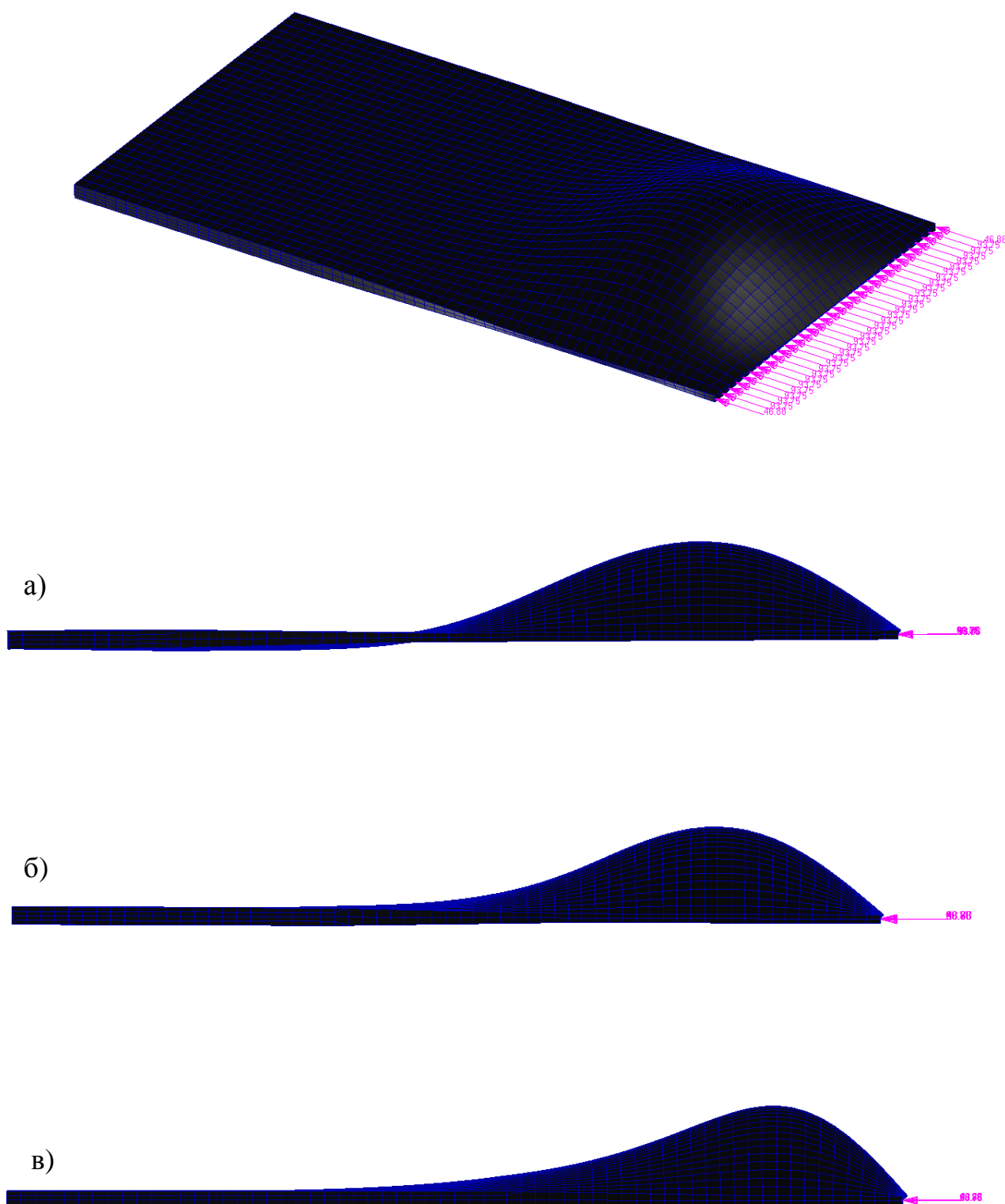


Рис. 7 – Нагружение и формы потери устойчивости рассмотренных изотропных пластин с комбинированным изменением толщины:

а) вариант 1, б) вариант 2, в) вариант 3

Табл. 6 – Сравнение результатов аналитического расчета изотропной пластины с МКЭ

Тип расчета	Минимальная критическая сила N_x , Н/м								
	Ступенчатая пластина			Непрерывная пластина			Комбинированная пластина		
	вар. 1	вар. 2	вар. 3	вар. 1	вар. 2	вар. 3	вар. 1	вар. 2	вар. 3
Аналитика*	224650	246230	318830	523854	439490	397305	225238	256630	373074
МКЭ	220948	234763	298126	515790	425528	372172	223275	252313	350119
Δ^{**}	1,7 %	4,9 %	6,9 %	1,6 %	3,3 %	6,8 %	0,9 %	1,73 %	6,6 %

* - Взято $m=6$ и $n=1$ для ступенчатой и комбинированной, и $m=4$ и $n=1$ для непрерывной
 ** - погрешность относительно МКЭ

Табл. 7 – Сравнение результатов аналитического расчета композитной пластины с МКЭ

Тип расчета	Минимальная критическая сила N_x , Н/м								
	Укладка №1			Укладка №2			Укладка №3		
	вар. 1	вар. 2	вар. 3	вар. 1	вар. 2	вар. 3	вар. 1	вар. 2	вар. 3
Аналитика*	85818	104300	142902	146905	151790	171783	78480	100023	136899
МКЭ	80138	96442	131228	136879	140940	152006	73752	93352	128050
Δ^{**}	7,1 %	8,1 %	8,9 %	7,3 %	7,7 %	13,0 %	6,4 %	7,1 %	6,9 %

* - Взято $m=12$ и $n=1$ для всех вариантов пластины
 ** - погрешность относительно МКЭ

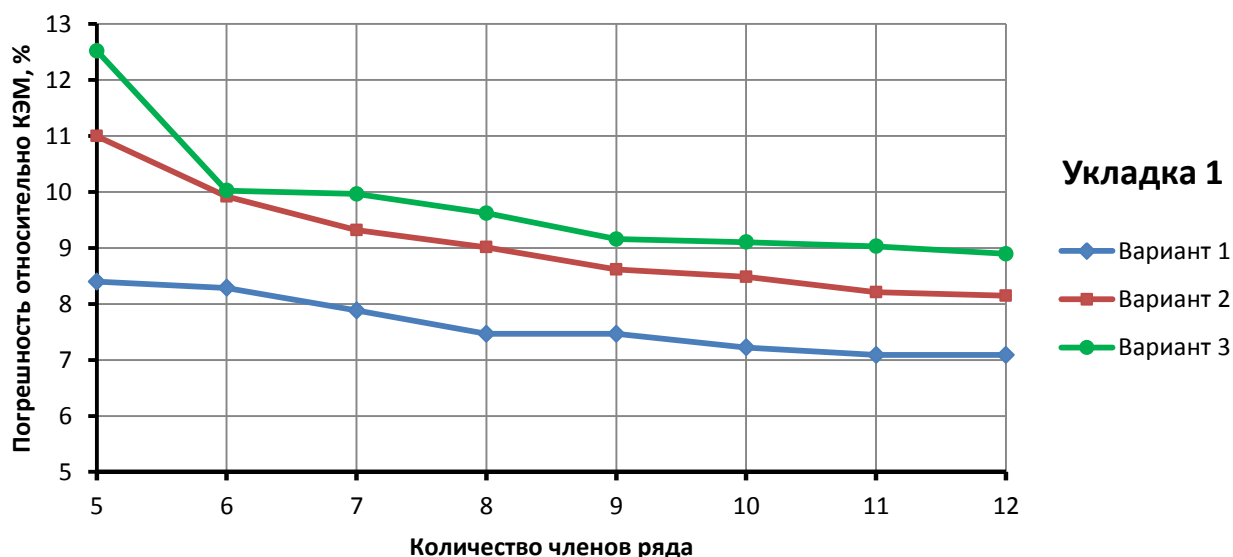


Рис. 8 – Зависимость погрешности аналитического расчета от числа членов ряда.

Укладка 1

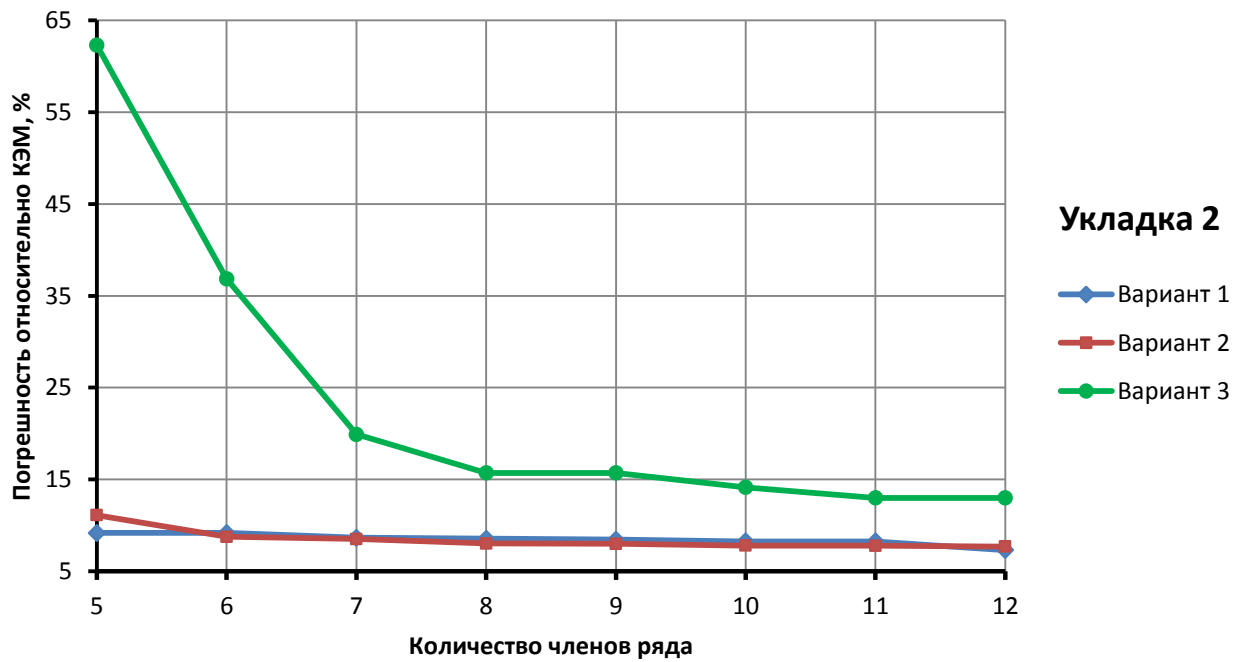


Рис. 9 – Зависимость погрешности аналитического расчета от числа членов ряда.

Укладка 2

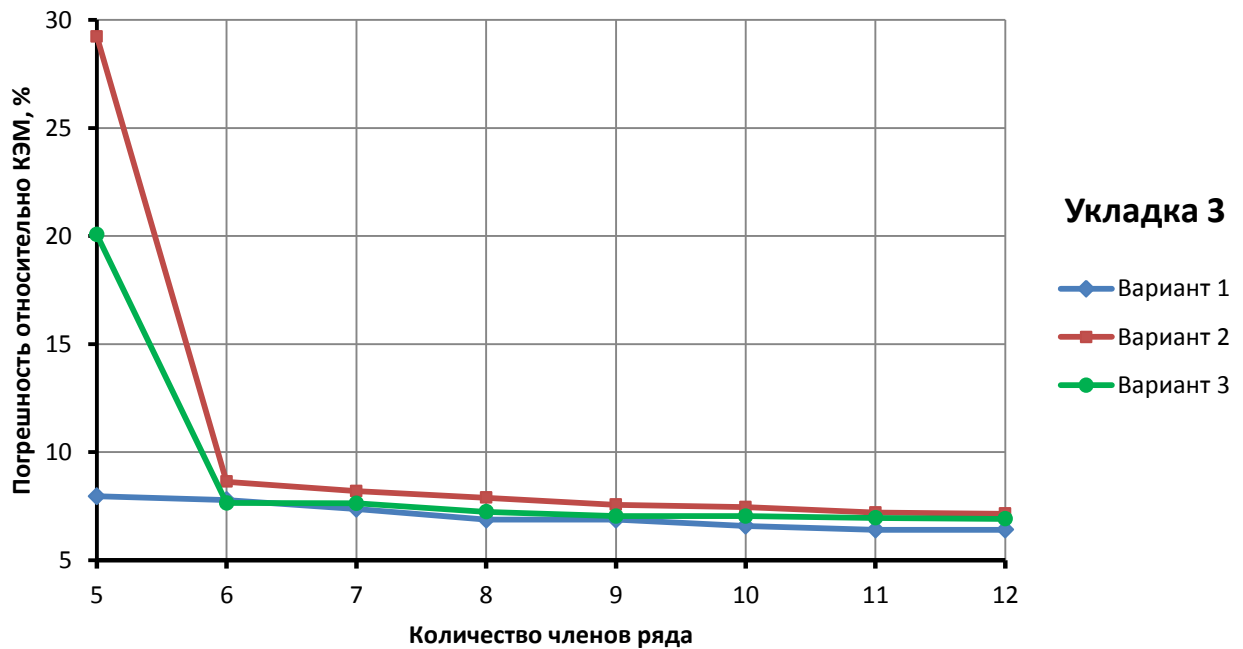


Рис. 10 – Зависимость погрешности аналитического расчета от числа членов ряда.

Укладка 3

Следует отметить, что методология, изложенная в работе, применима для произвольного отношения сторон пластин, поскольку метод универсален. Также метод применим для иных граничных условий и нагружения пластин, но тогда минимально необходимое число членов ряда и вид членов ряда будет иным (отличным от тех, что использованы в данной работе). Тем не менее, следует отметить, что шарнирное опирание по всем сторонам пластины – одно из наиболее простых граничных условий. В общем случае, точность метода зависит от двух основных факторов:

- 1) Корректность аппроксимирующей функции. Аппроксимирующая функция должна удовлетворять геометрическим граничным условиям пластины;
- 2) Число взятых членов ряда. Сходимость задачи, в большинстве случаев, тем лучше, чем больше взято членов ряда.

Выводы

- Разработана методика расчета на устойчивость для трех типов пластин переменной жесткости;
- Методы расчета устойчивости изотропных пластин переменной жесткости применены к решению задачи устойчивости слоистых пластин переменной жесткости из композиционного материала;
- Работа имеет прикладной характер, поскольку рассмотрены пластины с геометрией, которая возможна в тонкостенных конструкциях;
- Методика может быть применена для пластин с тремя и более участками

постоянной толщины, а также для пластин с комбинированными участками, где переход с одной толщины на другую происходит по линейному или нелинейному закону. Также метод применим для произвольного соотношения сторон пластинки;

- Методика расчета пластин на устойчивость реализована в среде Maple, что позволяет быстро получить значение критической силы;
- Метод решения задачи устойчивости примененный в данной работе к пластинам применим и к расчету на устойчивость стержней переменного сечения. В случае стержня ряд будет одномерным, а выражения для потенциальной энергии деформации и работы внешней силы будут иметь иной вид [23].

Библиографический список

1. Зотов А.А. Автоматизированный расчет на прочность и устойчивость конструкций летательных аппаратов. – Москва: МАИ, 1992. – 152 с.
2. N.T.H. Luong, D.T.M. Tuong. Tri Influence of variable thickness on stability of rectangular plate under compression // *Mechanics Research Communications*, 2005, vol. 32, no. 2, pp. 139 – 146.
3. N.T.H. Luong, T.S.S. Hoach. Stability of cylindrical panel with variable thickness // *Vietnam Journal of Mechanics*, 2006, vol. 28, no. 1, pp. 56 – 65.
4. N.T.H. Luong, D.T.M. Tuong. Buckling of the initial imperfect rectangular thin plate with variable thickness // *Vietnam Journal of Mechanics*, 2006, vol. 28, no. 2, pp. 103 – 110.

5. Lotfi S., Azhari M., Heidarpour A. Inelastic initial local buckling of skew thin thickness-tapered plates with and without intermediate supports using the isoparametric spline finite strip method // *Thin-Walled Structures*, 2011, vol. 49, no. 11, pp. 1475 - 1482.
6. Jaberzadeh E., Azhari M., Boroomand B. Inelastic buckling of skew and rhombic thin thickness-tapered plates with and without intermediate supports using the element-free Galerkin method // *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, pp. 6838 - 6854.
7. A. John Wilson, S. Rajasekaran. Elastic stability of all edges clamped stepped and stiffened rectangular plate under uni-axial, bi-axial and shearing forces // *Meccanica*, 2013, vol. 48, no. 10, pp. 2325 - 2337.
8. Koiter W., Elishakoff I., Y. Li, J. Starnes Buckling of an axially compressed cylindrical shell of variable thickness // *International Journal of Solids and Structures*, 1994, vol. 31, no. 6, pp. 797 - 805.
9. Mahboubi Nasrekani F., Eipakchi H.R. An Analytical Procedure for Buckling Load Determination of an Axisymmetric Cylinder with Non-Uniform Thickness Using Shear Deformation Theory // *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, vol. 1, no. 2, pp. 211 - 218.
10. Chen L., Rotter J.M., Doerich C. Buckling of cylindrical shells with stepwise variable wall thickness under uniform external pressure // *Engineering Structures*, 2011, vol. 33, no. 12, pp. 3570 - 3578.
11. Zhou F., Chen Z., Fan H., Huang S. Analytical study on the buckling of cylindrical shells with stepwise variable thickness subjected to uniform external pressure // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2016, vol. 23, no. 10, pp. 1207 - 1215.

12. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
13. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
14. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 568 с.
15. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
16. Laszlo P. Kollar, George S. Springer Mechanics of Composite Structures, Cambridge University Press, New York, 2003, 500 p.
17. Авдонин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1969. – 402 с.
18. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – Москва: Машиностроение, 1988. – 272 с.
19. Образцов И.Ф. Строительная механика летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
20. Уманский А.А. Строительная механика самолета. – М.: Оборонгиз, 1961. – 530 с.
21. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. - М.: Физматлит, 2013. – 272 с.
22. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957 – 416 с.
23. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов. – М.:

Физматлит, 2005. – 544 с.

24. Кичеев В.Е. Проектирование сжатых панелей легких самолетов с использованием критерия подобия // Труды МАИ. 2007. № 27. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=34006>

25. Ивашкевич И.Э. Один вариант решения задачи устойчивости перекрестно подкрепленной пластины при дискретном учете ребер // Вестник Московского авиационного института. 1996. Т. 3. № 1. С. 49 - 53.