УДК 531+621.865.8+629.78

Рекуррентный алгоритм вычисления коэффициентов уравнений динамики космических манипуляторов

Н.А. Яскевич

Аннотация:
Рассматривается новый рекуррентный алгоритм вычисления коэффициентов уравнений динамки в замкнутой форме для простой кинематической цепи. Он имеет вычислительную эффективность $O(n^2)$ и предназначен для моделирования движения космических манипуляторов с вращательными шарнирами. Этот алгоритм может быть модифицирован для учета упругости звеньев и реализации параллельных вычислений.

Ключевые слова:
космический манипулятор; уравнения динамики; рекуррентный алгоритм; вычислительная эффективность;

Вычислительная механика системы твердых и деформируемых тел развивается с конца 50-х годов 20-го века, с момента появления первых серийных компьютеров. Основные направления развития теории моделирования динамики таких систем на современном этапе проанализированы в обзоре [1]. Существуют различные алгоритмы расчета коэффициентов уравнений динамики в замкнутой форме. Среди них вычислительно наиболее эффективным является рекуррентный алгоритм, впервые предложенный Ю.А Степаненко [2] и имеющий вычислительную эффективность $O(n^2)$, где n- количество степеней свободы системы. Позднее он был назван алгоритмом составного твердого тела (CRBA – Composite Rigid Body Algorithm) [3]. Он основан на многократном использовании более простого алгоритма решения обратной задачи динамики. Близким к нему по эффективности является алгоритм «косынка» [4, 5] с эффективностью $O(n^3)$. Его рекуррентные соотношения основаны на аналитической записи уравнений движения в блочно-матричной форме. Это расширяет его возможности, в частности при моделировании систем деформируемых тел. В настоящей работе предлагается новый алгоритм расчета коэффициентов уравнений динамики механических систем со структурой простой кинематической цепи, имеющий эффективность $O(n^2)$ и основанный на аналитической записи уравнений динамики. Исходной точкой для его разработки являются соотношения, полученные из уравнений Кейна [6], являющихся одной из форм записи общего уравнения динамики [7]. Перспективность уравнений Кейна, как теоретической основы для новых алгоритмов моделирования динамики механических систем была отмечена в обзоре [1].

В данной работе рассматривается механическая система в виде простой кинематической цепи N тел, соединенных шарнирами с одной степенью свободы во вращательном относительном движении. То есть общее число степеней свободы системы равно числу ее тел ($n = N$). Такой вид системы обусловлен конструкцией космических манипуляторов, что, в свою очередь, связано с внешними условиями работы и характером операций, производимых космическим манипулятором.

В системе обозначений, принятой для описания геометрических и инерционных свойств механической системы, компоненты большинства векторов выражены в базовой (инерциальной) системе координат. При использовании локальных систем координат тел их номера указываются в качестве верхнего индекса векторов или матриц. Системы координат, используемые для описания двух смежных тел простой кинематической цепи, показаны на рис. 1. В $j-$м шарнире локальный базис $\mathbf{x}_j\mathbf{y}_j\mathbf{z}_j$ $j-$го тела движется относительно локального базиса $\mathbf{x}^o_{j-1}\mathbf{y}^o_{j-1}\mathbf{z}^o_{j-1}$ предшествующего, $(j-1)-$го тела. При этом $\boldsymbol{\alpha}_j$ – матрица преобразования поворота из $\mathbf{x}^o_{j-1}\mathbf{y}^o_{j-1}\mathbf{z}^o_{j-1}$ в $\mathbf{x}_j\mathbf{y}_j\mathbf{z}_j$, $\mathbf{t}_j$ – вектор относительного поступательного перемещения. Постоянные вектор $\mathbf{l}^{(j-1)}_{j-1}$ и матрица $\boldsymbol{\gamma}_{j-1}$ определяют положение $\mathbf{x}^o_{j-1}\mathbf{y}^o_{j-1}\mathbf{z}^o_{j-1}$ относительно $\mathbf{x}_{j-1}\mathbf{y}_{j-1}\mathbf{z}_{j-1}$ в предшествующем, $(j-1)-$м теле. Инерционные характеристики $j-$го тела определяются массой m_j, радиус-вектором $\mathbf{d}^{(j)}_j$ центра масс относительно $\mathbf{x}_j\mathbf{y}_j\mathbf{z}_j$ и тензором инерции $\mathbf{I}^{(j)}_j$.

Кинематика такой механической системы описывается рекуррентными соотношениями

$$\boldsymbol{\theta}_j = \boldsymbol{\gamma}_{j-1}\boldsymbol{\tau}_{j-1}, \qquad \boldsymbol{\tau}_j = \boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\theta}_j, \tag{1}$$

$$\mathbf{r}_{j-1,j} = \boldsymbol{\tau}^T_{j-1}(\mathbf{l}_{j-1} + \boldsymbol{\gamma}^T_{j-1}\mathbf{t}_j), \tag{2}$$

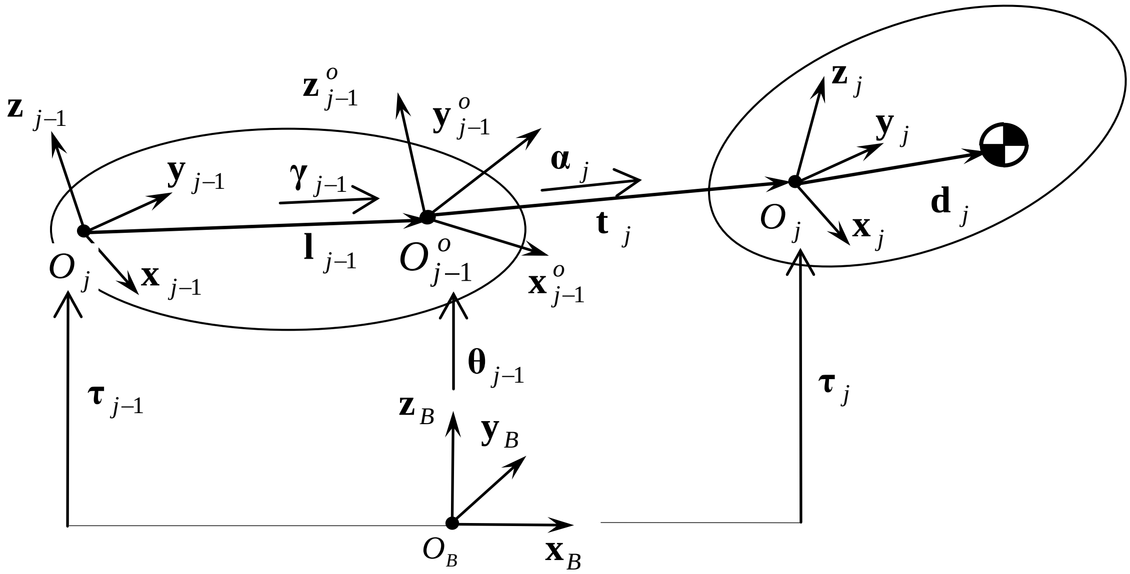


Рис.1 . Системы координат смежных тел простой кинематической цепи

$$\mathbf{R}_j^{rel} = \boldsymbol{\theta}_j^T \mathbf{R}_j^{rel\,(j)},\ \ \mathbf{T}_j^{rel} = \boldsymbol{\theta}_j^T \mathbf{T}_j^{rel\,(j)},$$

$$\boldsymbol{\omega}_j^{rel} = \mathbf{R}_j^{rel}\,\dot{\mathbf{q}},$$

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_{j-1} + \boldsymbol{\omega}_j^{rel}, \qquad (3)$$

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_{j-1} + \mathbf{R}_j^{rel},$$

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{T}_{j-1} + \tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j}^T \mathbf{R}_{j-1} + \mathbf{T}_j^{rel},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \boldsymbol{\varepsilon}_{j-1} + \boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \boldsymbol{\omega}_j^{rel}, \qquad (4)$$

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_{j-1} + \mathbf{E}_{j-1}\mathbf{r}_{j-1,j} + 2\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times \mathbf{v}_j^{rel}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{r}_{j-1,j}$ – вектор из O_{j-1} в O_j; $\mathbf{q} - (n \times 1) -$ вектор обобщенных координат; $\mathbf{v}_j^{rel}$, $\boldsymbol{\omega}_j^{rel}$ – векторы относительных поступательной и угловой скоростей в j – м шарнире; $\mathbf{v}_j, \boldsymbol{\omega}_j$ – абсолютные скорость точки O_j угловая скорость j – го тела; $\mathbf{R}_j^{rel\,(j)} = \partial \boldsymbol{\omega}_j^{rel\,(j)} / \partial \dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{T}_j^{rel\,(j)} = \partial \mathbf{v}_j^{rel\,(j)} / \partial \dot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{R}_j = \partial \boldsymbol{\omega}_j / \partial \dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{T}_j = \partial \mathbf{v}_j / \partial \dot{\mathbf{q}} - (3 \times n) -$ матрицы; $\varepsilon_j, \mathbf{w}_j$ – векторы составляющих абсолютных ускорений, нелинейно зависящих от $\dot{q}$; $\mathbf{E}_j = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j - (3 \times 3)$ – матрица; $\tilde{\mathbf{a}}$ – кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора $\mathbf{a}$, то есть $\tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Постоянный вектор $\mathbf{c}_j^{(j)} = m_j \mathbf{d}_j^{(j)}$ вычисляется однократно до начала процесса интегрирования уравнений движения, где m – масса звена. В базовую систему координат инерционные характеристики j –го тела преобразуются с помощью соотношений

$$\mathbf{c}_j = \boldsymbol{\tau}_j^T \mathbf{c}_j^{(j)}, \qquad \mathbf{I}_j = \boldsymbol{\tau}_j^T \mathbf{I}_j^{(j)} \boldsymbol{\tau}_j. \tag{6}$$

На систему действуют внешние силы и моменты

$$\mathbf{f}_{l,j}^E = \boldsymbol{\tau}_{l,j}^T \mathbf{f}_{l,j}^{E(j)}, \ \mathbf{m}_{l,j}^E = \boldsymbol{\tau}_{l,j}^T \mathbf{m}_{l,j}^{E(j)}, \tag{7}$$

а также внутренние силы и моменты $\mathbf{f}_j^{J(j)}$, $\mathbf{m}_j^{J(j)}$ в шарнирах.

Матрица $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ обобщенной инерции, имеющая размерность $(n \times n)$, и $(n \times 1)$ – вектор $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ обобщенных сил в уравнениях динамики в замкнутой форме

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \tag{8}$$

могут быть вычислены с использованием соотношений, полученных из уравнений Кейна [6]

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \mathbf{T}_j^T m_j \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j^T \tilde{\mathbf{c}}_j^T \mathbf{R}_j + [\mathbf{T}_j^T \tilde{\mathbf{c}}_j^T \mathbf{R}_j]^T + \mathbf{R}_j^T \mathbf{I}_j \mathbf{R}_j \right\}, \tag{9}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^{N} [\mathbf{T}_j^T \mathbf{f}_j^{IE} + \mathbf{R}_j^T \mathbf{m}_j^{IE}] + \sum_{j=1}^{N} [\mathbf{T}_j^{rel(j)T} \mathbf{f}_j^{J(j)} + \mathbf{R}_j^{rel(j)T} \mathbf{m}_j^{J(j)}], \tag{10}$$

где $\mathbf{f}_j^{J(j)}, \mathbf{m}_j^{J(j)}$ – векторы сил и моментов, развиваемых приводами шарниров, а суммарные векторы инерционных и внешних сил и моментов определяются выражениями

$$\mathbf{f}_j^{IE} = \mathbf{f}_j^E - m_j \mathbf{w}_j - \mathbf{E}_j \mathbf{c}_j, \ \mathbf{m}_j^{IE} = \mathbf{m}_j^E - \tilde{\mathbf{c}}_j \mathbf{w}_j - \mathbf{I}_j \boldsymbol{\varepsilon}_j - \mathbf{m}_{\omega,j}, \tag{11}$$

где $\mathbf{E}_j = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_j + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j$ и $\mathbf{m}_{\omega,j} = \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j$

Эффективность вычисления сумм (9) и (10) составляет $O(n^3)$ вследствие того, что $(3 \times n)$ – матрицы $\mathbf{T}_j$ и $\mathbf{R}_j$ входят в каждое из $n = N$ слагаемых суммы (9).

Матрицы $\mathbf{T}_j$ и $\mathbf{R}_j$ содержат одинаковые столбцы, соответствующие обобщенным скоростям в предшествующих шарнирах. Поэтому предлагаемый новый рекуррентный алгоритм основан на изменении порядка суммирования, что обеспечивает увеличение вычислительной эффективности алгоритма моделирования. С учетом составления уравнений динамики космических манипуляторов в дальнейшем рассматриваются только шарниры вращательного типа. В результате этого, $\mathbf{T}_j^{rel} = \mathbf{0}$, что упрощает суммы (9) и (10) и уменьшает количество необходимых вычислений.

На первом этапе рекуррентно вычисляются векторы $\mathbf{r}_{i,j}$ из исходного базиса каждого очередного $i-$го тела в исходные базисы всех последующих тел

$$\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_{i,i+1} + \mathbf{r}_{i+1,j}, \; j = \overline{N,3}; \; i = \overline{j-2,1}. \qquad (12)$$

После этого только при наличии в кинематической цепи поступательных шарниров определяются векторы, обеспечивающие расчет центробежного момента инерции механической системы относительно каждой кинематической пары

$$\mathbf{c}_{i,i} = \mathbf{c}_i, \qquad i = \overline{N,1}; \qquad (12а)$$

$$\mathbf{c}_{i,j} = m_j \mathbf{r}_{i,j} + \mathbf{c}_j, \; i = \overline{N-1,1}; \; j = \overline{N, i+1} \qquad (12б)$$

Рекуррентное вычисление сумм, определяющие инерционные параметры подцепей простой кинематической цепи, а также действующие на нее суммарные силы и моменты, выполняется в следующей последовательности.

1. Матрицы инерции, обусловленные удаленностью от очередного $i-$го шарнира центров масс последующих тел от последнего до $j-$го включительно

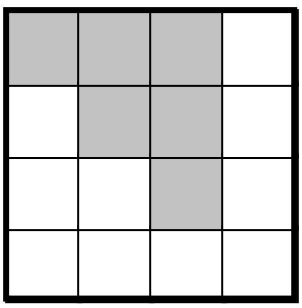
$$\mathbf{M}_N^{rr,1} = \mathbf{I}_N \qquad (13а)$$

$$\mathbf{M}_j^{rr,1} = \mathbf{I}_j + \mathbf{M}_{j+1}^{rr,1}, \qquad j = \overline{N-1,1}; \qquad (13б)$$

для вычисления этих матриц необходимо $9(N-1)$ сложений.

$$\mathbf{M}_{i,N-1}^{rr,2} = m_N \tilde{\mathbf{r}}_{i,N} \tilde{\mathbf{r}}_{N-1,N}^T, \; i = \overline{1, N-1} \qquad (14а)$$

$$\mathbf{M}_{i,j}^{rr,2} = m_{j+1} \tilde{\mathbf{r}}_{i,j+1} \tilde{\mathbf{r}}_{j,j+1}^T + \mathbf{M}_{i,j+1}^{rr,2}, \quad i = \overline{N-2,1}; \; j = \overline{N-2, i} \qquad (14б)$$



Структура матрицы $\mathbf{M}_{i,j}^{rr,2}$

Для каждой из $N-1$ матриц $\mathbf{M}_{i,N-1}^{rr,2}$ (14а) необходимо выполнить $(3ум + 3сл) * 9 + 9ум = 27ум + 27сл + 9ум = 36ум + 27сл$. (ум – умножений, сл – сложений)

Для всех матриц: $(36N - 36)ум + (27N - 27)сл = 63N - 63$ операций.

Для каждой из

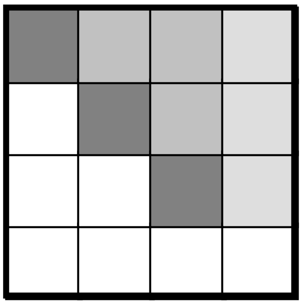
$((N-2)^2-(N-2))/2+(N-2)=(N^2-3N+2)/2$ матриц $\mathbf{M}_{i,j}^{rr,2}$ (14б) необходимо выполнить $(3ум+3сл)*9+9ум+9сл=27ум+27сл+9ум+9сл=36ум+36сл$, всего 72 операции.

Для всех матриц: $18N^2-54N+36ум$ + $18N^2-54N+36сл$.

Итого для матриц $\mathbf{M}_{i,j}^{rr,2}$: $18N^2-18$ $ум$ и $18N^2-27N+9$ $сл$.

$$\mathbf{M}_{i,N-1}^{rr,3}=\tilde{\mathbf{c}}_N\,\tilde{\mathbf{r}}_{i,N}^{T},\quad i=\overline{1,\,N-1} \tag{15а}$$

$$\mathbf{M}_{i,j}^{rr,3}=\tilde{\mathbf{c}}_{j+1}\,\tilde{\mathbf{r}}_{i,j+1}^{T}+\mathbf{M}_{i,j+1}^{rr,3},\; i=\overline{N-2,1};\; j=\overline{N-2,\,i} \tag{15б}$$



Структура матрицы $\mathbf{M}_{i,j}^{rr,3}$

Для вычисления каждой из $N-1$ матриц $\mathbf{M}_{i,N-1}^{rr,3}$ (15а) нужно выполнить $(3ум+3сл)*9=27ум+27сл=54оп$

Для всех матриц: $27(N-1)ум+27(N-1)сл$,

всего $54(N-1)$ операций.

Для вычисления каждой из $((N-2)^2-(N-2))/2+(N-2)=(N^2-3N+2)/2$ матриц $\mathbf{M}_{i,j}^{rr,3}$ (15б) необходимо выполнить $(3ум+3сл)*9+9сл=27ум+36сл=63оп$,

Для всех матриц: $(13{,}5N^2-40.5N+27)ум+(18N^2-54N+36)сл$.

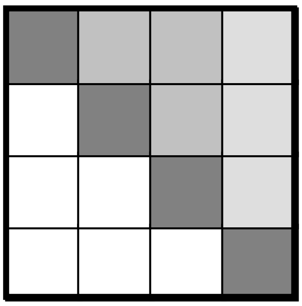
2. Суммарные $(3\times3)-$матрицы инерции относительно $i-$го шарнира, которые обусловлены последующими телами от последнего до $j-$го ($j\geq i$) включительно

$$\mathbf{M}_{i,i}^{\Sigma,rr}=\mathbf{M}_{i}^{rr,1}+\mathbf{M}_{i,i}^{rr,2}+\mathbf{M}_{i,i}^{rr,3}+\mathbf{M}_{i,i}^{rr,3\,T},\; i=\overline{1,\,N-1};$$

$$\mathbf{M}_{N,N}^{\Sigma,rr}=\mathbf{M}_{N}^{rr,1};$$

$$\mathbf{M}_{i,j}^{\Sigma,rr}=\mathbf{M}_{j}^{rr,1}+\mathbf{M}_{i,j}^{rr,2}+\mathbf{M}_{j,j}^{rr,3}+\mathbf{M}_{i,j-1}^{rr,3\,T},\; i=\overline{1,\,N-2};\; j=\overline{i+1,\,N-1};$$

$$\mathbf{M}_{i,N}^{\Sigma,rr}=\mathbf{M}_{N}^{rr,1}+\mathbf{M}_{i,N-1}^{rr,3\,T},\quad i=\overline{1,\,N-1} \tag{16}$$



Структура матриц $\mathbf{M}_{i,j}^{\Sigma,rr}$

Для вычисления всех N диагональных матриц $\mathbf{M}_{i,i}^{\Sigma,rr}$ надо затратить $(3*9)(N-1)сл=(27N-27)сл$.

Для всех $N-1$ матриц $\mathbf{M}_{i,N}^{\Sigma,rr}$ последнего столбца надо затратить

$9*(N-1)сл=(9N-9)сл$.

Для всех $((N-2)^2-(N-2))/2+(N-2)=(N^2-3N+2)/2$ матриц $\mathbf{M}_{i,j}^{\Sigma,rr}$ надо затратить

((3*9)* $(N^2-3N+2)/2)сл$= $=(13{,}5N^2-40{,}5N+27)сл$

Для вычисления всех матриц $\mathbf{M}_{i,i}^{\Sigma,rr}$, необходимо выполнить $(13{,}5N^2-4{,}5N-9)сл$.

3. Суммарные внешние и инерционные силы и моменты тел от последнего до $j-$го включительно

$$\mathbf{f}_j^{\Sigma}=\mathbf{f}_j^{IE}, \qquad j=\overline{1,\ N} \tag{17а}$$

$$\mathbf{f}_j^{\Sigma}=\mathbf{f}_j^{IE}+\mathbf{f}_{j+1}^{\Sigma}, \qquad j=\overline{N-1,1} \tag{17б}$$

$$\mathbf{m}_j^{\Sigma,1}=\mathbf{m}_j^{IE} \qquad j=\overline{1,\ N} \tag{18а}$$

$$\mathbf{m}_j^{\Sigma,1}=\mathbf{m}_j^{IE}+\mathbf{m}_{j+1}^{\Sigma,1}, \qquad j=\overline{N-1,1} \tag{18б}$$

$$\mathbf{m}_N^{\Sigma}=\mathbf{m}_N^{\Sigma,1} \tag{19а}$$

$$\mathbf{m}_j^{\Sigma}=\mathbf{m}_j^{\Sigma,1}+\sum_{k=N}^{j+1}\tilde{\mathbf{r}}_{j,k}\,\mathbf{f}_k^{IE},\ \ j=\overline{N-1,1} \tag{19б}$$

4. На основе приведенных выше рекуррентно вычисляемых сумм определяются непересекающиеся множества элементов симметричной матрицы обобщенной инерции $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ размерности $(n\times n)$

$$\mathbf{A}_{j\ge i}^{rr}=\sum_{i=1}^{N}\ \sum_{j=i}^{N}\ \mathbf{R}_i^{rel\,T}\,\mathbf{M}_{i,j}^{\Sigma,rr}\,\mathbf{R}_j^{rel},$$

$$\mathbf{A}_{j\ge i}=\mathbf{A}_{j\ge i}^{rr},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})=\mathbf{A}^{rr} \tag{20}$$

и непересекающиеся множества элементов $(n\times 1)-$вектора обобщенных сил $\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$

$$\mathbf{b}_1=\sum_{j=1}^{N-1}\mathbf{R}_j^{rel\,T}\mathbf{m}_j^{\Sigma}+\mathbf{R}_N^{rel\,T}\mathbf{m}_N^{\Sigma,1},$$

$$\mathbf{b}_2=\sum_{j=1}^{N}\mathbf{R}_j^{rel(j)\,T}\mathbf{m}_j^{J(j)},$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2. \tag{21}$$

Для вычисления каждой из $(N^2+N)/2$ сумм $\mathbf{A}_{j\geq i}^{rr}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{N}\mathbf{R}_i^{rel\,T}\mathbf{M}_{i,j}^{\Sigma,rr}\mathbf{R}_j^{rel}$ (все шарниры вращения с одной степенью свободы), необходимо $(3ум+3сл)*2=12оп$, всего $3(N^2+N)умн$ + $3(N^2+N)сл$ операций с учетом использования только ненулевых столбцом матриц и наличия вращения в каждом шарнире.

Сравнительная оценка вычислительных затрат при расчете различными методами матрицы обобщенной инерции простой кинематической цепи из N тел приведена в таблице 1. Число операций, необходимых при использовании метода Степаненко, было рассчитано при условии использования приведенных в этой статье обозначений и кинематических соотношений. Оценка объема вычислений, необходимых алгоритму «косынка», взята из докторской диссертации [5].

Таблица 1.

Оценка вычислительных затрат при расчете матрицы обобщенной инерции для простой кинематической цепи из N тел при наличии только вращательных шарниров

№	Вектор, матрица	Число умножений	Число сложений
1	m_j^{Σ}	0	N
2	$\mathbf{r}_{i,j}$	0	$1.5N^2-4.5N+3$
3	$\mathbf{c}_{i,j}^{J}$	$1.5N^2-1.5N$	0
4	$\mathbf{c}_{i,j}$	0	$1.5N^2-1.5N$
6	$\mathbf{M}_j^{rr,1}$	0	$9N-9$
7	$\mathbf{M}_{i,j}^{rr,2}$	$18N^2-18$	$18N^2-27N+9$
8	$\mathbf{M}_{i,j}^{rr,3}$	$13{,}5N^2-40{,}5N+27$	$18N^2-54N+36$
9	$\mathbf{M}_{i,j}^{\Sigma,rr}$	0	$13{,}5N^2-4{,}5N-9$
10	$\mathbf{A}^{rr}$	$3N^2+3N$	$3N^2+3N$
11	Рекуррентный алгоритм	$36N^2-39N+9$	$55{,}5N^2-97{,}5N+30$
12	Алгоритм «косынка»	$3N^3+24N^2-9N$	$11N^3+105N^2-50N$
13	Алгоритм Степаненко	$38N^2+38N$	$31N^2+31N$
14	Рекуррентный алгоритм всего вычислений	$91{,}5N^2-136{,}5N+39$	
15	Алгоритм «косынка» всего вычислений	$14N^3+129N^2-59N$	
16	Алгоритм Степаненко всего вычислений	$69N^2+69N$	

Для расчета матрицы обобщенной инерции манипулятора типа SSRMS, состоящего из семи звеньев, шесть из которых одновременно могут быть подвижными, требуется следующее количество операций

Рекуррентный:	умножений 1071,	сложений 1443,	всего 2514
Косынка:	умножений 1458,	сложений 5856,	всего 7314
Степаненко:	умножений 1596,	сложений 1302,	всего 2898

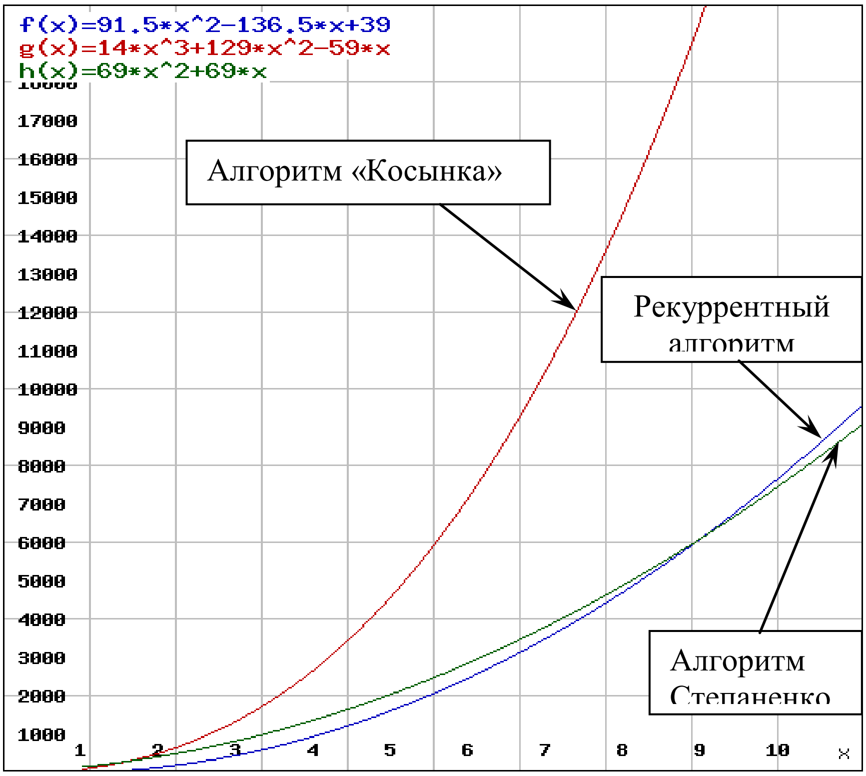


Рис. 2. Число операций, необходимое для вычисления матрицы обобщенной инерции, как функция числа звеньев простой кинематической цепи

Алгоритм вычисления непересекающихся множеств элементов обобщенной матрицы инерции на основе сумм (13) – (16) и (20) имеет вид

for $i = 1$ **to** N

for $j = i$ **to** N

$$\{\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{R}_i^{rel\,T}[\mathbf{M}_{i,j}^{\Sigma,rr}\,\mathbf{R}_j^{rel}]\}$$

end; end;

Аналогично вычисление непересекающиеся множеств элементов вектора обобщенных сил на основе сумм (17) – (19) и (21) выполняется в соответствии со следующим алгоритмом

for $j = 1$ **to** N

if $j < N$ **then** $\{\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{R}_j^{rel\,T}\mathbf{m}_j^{\Sigma}\}$

else $\{\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{R}_N^{rel\,T}\mathbf{m}_N^{\Sigma,1}\}$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{R}_j^{rel(j)T}\mathbf{m}_j^{J(j)}$$

end;

Все операции с матрицами парциальных скоростей $\mathbf{R}_j^{rel}$, в том числе и умножение их на постоянный множитель или на $(3\times 3)-$матрицу слева, производятся только с их ненулевыми столбцами, номера которых образуют непрерывные целочисленные множества, задаваемые соответствующими начальным и конечным значениями. Поэтому добавление к матрице обобщенной инерции $\mathbf{A}$ обозначенного фигурными скобками очередного произведения

$$\{\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{M}_L^T \mathbf{M}_R\}$$

левого и правого сомножителей в виде $(3\times n)-$матриц $\mathbf{M}_L$ и $\mathbf{M}_R$ осуществляется с учетом диапазонов $(j_{L,B}, j_{L,E})$, $(j_{R,B}, j_{R,E})$ их ненулевых столбцов и симметрии матрицы $\mathbf{A}$

for $i_1 = j_{L,B}$ **to** $j_{L,E}$

for $j_1 = i_1$ **to** $j_{R,E}$

for $k = 1$ **to** 3

$$\mathbf{A}(i_1, j_1) = \mathbf{A}(i_1, j_1) + \mathbf{M}_L(k, i_1)\mathbf{M}_R(k, j_1)$$

end;

$$\mathbf{A}(j_1, i_1) = \mathbf{A}(i_1, j_1)$$

end; end;

Аналогично добавление к вектору обобщенных сил $\mathbf{b}$ обозначенного фигурными скобками очередного произведения

$$\mathbf{b} = \mathbf{b} + \{\mathbf{M}_L^T \mathbf{v}_R\}$$

левого и правого сомножителей в виде $(3\times n)-$матрицы $\mathbf{M}_L$ и $(3\times 1)-$вектора $\mathbf{v}_R$ осуществляется с учетом диапазона $(j_{L,B}, j_{L,E})$ ненулевых столбцов $\mathbf{M}_L$ в соответствии со следующим алгоритмом

for $j_1 = j_{L,B}$ **to** $j_{L,E}$

for $k = 1$ **to** 3

$$\mathbf{b}(j_1) = \mathbf{b}(j_1) + \mathbf{M}_L(k, j_1)\mathbf{v}_R(k)$$

end; end;

Все вычисляемые рекуррентно векторные и матричные динамические суммы механической системы выражены в ее базовой системе координат. Запись этих соотношений в локальных системах координат тел приводит к значительному росту объема вычислений. Это объясняется тем, что в этом случае векторные или матричные динамические суммы (12) – (19) должны быть выражены в локальных системах координат всех предшествующих тел кинематической цепи.

Таким образом, получен новый рекуррентный алгоритм расчета инерционных коэффициентов уравнений динамики в замкнутой форме. Его вычислительная эффективность оценивается как $O(n^2)$. В частности, для простой кинематической цепи только с шарнирами вращения для вычисления матрицы обобщенной инерции необходимо выполнить $91{,}5N^2 - 136{,}5N + 39$ операций умножения и сложения. Метод Степаненко обладает сравнимой вычислительной эффективностью, он параллелизуем, поскольку каждый столбец матрицы инерции может вычисляться отдельно, но определен только для жестких звеньев механической системы, и поэтому не позволяет учесть упругость в виде функций формы. Предлагаемый алгоритм также параллелизуем – позволяет реализовать параллельное вычисление промежуточных сумм и матрицы инерции. Но, в отличие от алгоритма Степаненко, его основой являются условия равновесия, выраженные в форме общего уравнения динамики, эквивалентной записью которого являются уравнения Кейна. Поэтому предлагаемый алгоритм может быть доработан для описания динамики простой кинематической цепи деформируемых тел с использованием функций формы. Это позволит разрабатывать более адекватные и вычислительно эффективные модели космических манипуляторов.

Библиографический список

1. Featherstone R., Orin, D. Robot dynamics: equations and algorithms. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, San Francisco, CA, April 2000, pp. 826-834.

2. Степаненко Ю.А. Алгоритм анализа динамики пространственных механизмов с разомкнутой кинематической цепью. Механика машин, - М.: Наука, 1974, вып. 44, с. 77-88.

3. Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. International Journal of Robotic Research, vol. 2, no. 1, 1983 pp. 13-30.

4. Лесков А.Г., Ющенко А.С. Моделирование и анализ робототехнических систем. – М.: Машиностроение, 1992. – 80 с.

5. Лесков А.Г. Теоретические основы моделирования и анализа динамки манипуляционных роботов, их приложение к задачам проектирования и подготовки операторов. //Дисс. на соискание ученой степени доктора технических наук. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002 г, 329 с.

6. Kane T.R., Wang C.F.. On the derivation of equations of motion, - Journal of the Society of Industrial and applied mathematics, vol. 13, no. 2, June 1965, pp. 487-492.

7. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. – 2-е изд. – М.:Наука, 1991 г., 256 с.

Яскевич Никита Андреевич, аспирант Московского Государственного Технического Университета им. Н.Э.Баумана, тел: +7(926)1344019, e-mail: nikita.yaskevich@gmail.com 105005.