

УДК 532.507

## **Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта**

**Хатунцева О.Н.**

*Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва,  
ул. Ленина, 4А, Королев, Московская область, 141070, Россия  
e-mail: Olga.Khatuntseva@rsce.ru*

### ***Аннотация***

Учет производства энтропии в уравнениях Навье-Стокса, обусловленного возбуждением стохастических пульсаций в потоке жидкости, позволил теоретически найти два решения задачи течения жидкости в плоской задаче Куэтта. Одно из них соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному. Первое решение реализуется при любых значениях числа Рейнольдса и характеризуется линейным профилем скорости во всей области течения жидкости, второе – реализуется только при достаточно больших значениях числа Рейнольдса и характеризуется профилем скорости, пропорциональным гиперболическому синусу с параметром, зависящим от значения числа Рейнольдса. Найдено критическое значение числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Приведено сравнение результатов с имеющимися экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** стохастические системы, плотность вероятности, турбулентность, плоское течение Куэтта, критическое число Рейнольдса.

## 1. Введение

В настоящее время разработано большое количество подходов к численному решению задач гидродинамики на основе уравнения Навье-Стокса (УНС) как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения жидкости [1-9]. Практический интерес к такого рода задачам нельзя переоценить, поскольку они встречаются повсеместно, начиная от вопросов, связанных с расчетом ветровых нагрузок на здания и конструкции, и заканчивая аэро- и гидродинамическими задачами в авиации и ракетостроении. Несмотря на это, на математическом уровне строгости так и не удалось ответить на главный вопрос: описывают ли УНС оба этих режима.

Уравнения Навье-Стокса представляют собой второй закон Ньютона для выделенного достаточно малого, но конечного объема изотермической жидкости, и описывают ускорение этого объема под действием силы, обусловленной градиентом давления и внешних сил, с одной стороны, а также вязкой силы, действующей по поверхности этого объема, с другой стороны.

В случае детерминированного – ламинарного режима течения жидкости корректность использования УНС для описания такого процесса не вызывает сомнений. Однако при переходе к турбулентному режиму течения в жидкости

возникает большое число дополнительных - стохастических степеней свободы. В связи с этим вопрос о возможности описания такой системы с помощью детерминированных уравнений Навье-Стокса остается открытым.

В работах [10-12] показано, что получение «турбулентных» решений при интегрировании УНС на основе прямого численного моделирования можно сравнить с моделированием стохастического процесса на основе аналоговых принципов. Приближенные численные методы (методы осреднения по Рейнольдсу, методы крупных вихрей) изменяют УНС за счет введения дополнительных членов, описывающих корреляции пульсаций, и уравнений, моделирующих замыкание осредненных моментов пульсации. По сути, их решения уже нельзя рассматривать, как результат непосредственного интегрирования УНС.

Очевидно, что вопрос о возможности или невозможности описания турбулентного режима течения на основе УНС проще всего рассмотреть на примере тех задач гидродинамики, которые допускают аналитические решения. К сожалению, в силу своей сложности УНС имеют такие решения в ограниченном круге задач - для очень простых геометрий. Самыми известными из них являются задача Хагена-Пуазейля, описывающая течение несжимаемой нетеплопроводной жидкости в трубе кругового сечения, и задача, названная в честь Мориса Мари Альфреда Куэтта, описывающая течение несжимаемой нетеплопроводной жидкости, расположенной между двумя бесконечными параллельными плоскими пластинами, движущимися с постоянными скоростями в противоположных

относительно друг друга направлениях в собственных плоскостях (см. рис.1). Течение Куэтта происходит под действием сил вязкого трения, действующих на жидкость, и сдвигового напряжения параллельного стенкам.

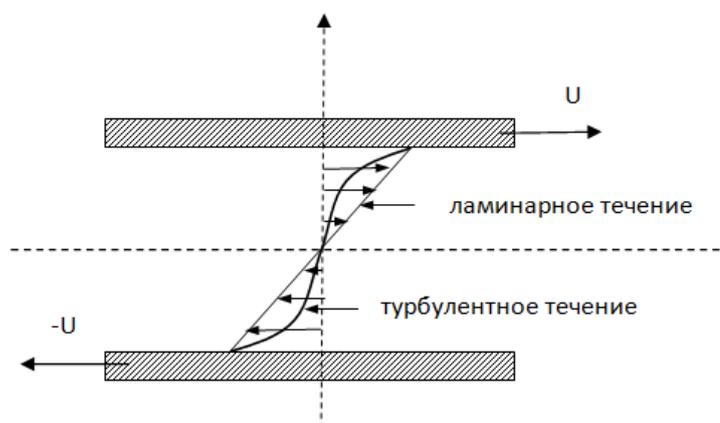


Рис. 1. Схематическое изображение профилей скорости течения Куэтта для ламинарного и турбулентного режимов

И для задачи Хагена-Пуазейля, и для задачи Куэтта при любых значениях числа Рейнольдса имеется единственное аналитическое решение, которое описывает стационарный профиль скорости. В задаче Хагена-Пуазейля – это параболический профиль скорости, в задаче Куэтта – линейный [13]. В обоих случаях этот профиль соответствует ламинарному режиму течения.

Причем, решения обеих задач являются устойчивыми в линейном приближении (для бесконечно малых возмущений) [14]. Данный вывод плохо соотносится с огромным количеством экспериментов, в которых при достаточно больших значениях числа Рейнольдса практически невозможно “удержать”

жидкость в ламинарном состоянии - происходит потеря устойчивости и переход к турбулентному режиму течения. В качестве попыток разрешения возникающих противоречий в вопросах устойчивости обычно выдвигаются предположения о неустойчивости течений к конечным возмущениям. Однако в такой постановке не вполне понятным остается отсутствие других (помимо ламинарных) квазистационарных аналитических решений УНС, к переходу к которым и должны стремиться режимы течения при потере устойчивости.

В работах [11-12] был подробно рассмотрен вопрос о возможности описания турбулентного режима течения жидкости с помощью УНС в расширенном фазовом пространстве и необходимости учета производства энтропии в таком процессе. С помощью предложенного в работе [11] подхода аналитически была решена задача течения жидкости в трубе кругового сечения (задача Хагена-Пуазейля). Найдено два решения, одно из которых отвечает ламинарному, а второе - турбулентному режиму течения. Аналитически определено значение постоянной Кармана.

В работе [12] на основе метода «разрывных функций» предложен подход, позволяющий определить критическое значение числа Рейнольдса, при котором становится возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. В задаче Хагена-Пуазейля это значение составило примерно 1970

Воспользовавшись подходом, предложенным в работах [11-12], попытаемся найти аналитические решение для двух режимов течения, а также определить критическое число Рейнольдса, при котором становится возможен переход из

ламинарного в турбулентный режим течения в плоской задаче Куэтта.

## **2. Применение метода расширения фазового пространства с использованием стохастической переменной для описания турбулентности в плоской задаче Куэтта.**

Турбулентный режим, также как и другие стохастические процессы, обладает важным статистическим свойством – возбуждением большого количества независимых степеней свободы (пульсаций) на разных масштабах рассмотрения системы. При этом второй закон Ньютона для выделенного объема жидкости (в форме уравнений Навье-Стокса), записанный без учета такого процесса, нарушается, поскольку, не все суммарное воздействие, направленное на выделенный объем, идет на его ускорение: часть такого воздействия должно пойти на возбуждение дополнительных - внутренних - степеней свободы.

Параметром, характеризующим связь между микро- и макропроцессами, является энтропия [15] и, следовательно, в таком процессе необходимо учесть производство энтропии выделенного объема жидкости. Исходя из этого рассуждения, можно переписать уравнения Навье-Стокса, включив в их левую часть – полную производную по времени – дополнительный член, отвечающий за изменение скорости, при изменении энтропии  $S$  выделенного объема:

$$S(t, \vec{r}) = - \int \varphi[p(t, \vec{r})] \ln \varphi[p(t, \vec{r})] d[p(t, \vec{r})].$$

В выражении для энтропии функция  $\varphi[p(t, \vec{r})]$  - это плотность вероятности реализации возмущения скорости величины  $p(t, \vec{r})$  в заданный момент времени  $t$  в рассматриваемой точке пространства  $\vec{r}$ .

Дифференциальная энтропия распределения с ограниченной дисперсией максимальна в случае гауссова распределения вероятностей, то есть когда события происходят независимо друг от друга (не коррелированы). Изменение энтропии в стохастической системе будет характеризовать возникновение коррелированных событий.

Расширяя фазовое пространство дополнительной переменной, характеризующей энтропию  $S : (t, \vec{r}) \rightarrow (t, \vec{r}; S)$ , ускорение выделенного объема жидкости, на который действуют силы, стоящее в правой части УНС, можно записать в виде:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{V}(t + \Delta t, \vec{r} + \Delta \vec{r}, S + \Delta S) - \vec{V}(t, \vec{r}, S)}{\Delta t}.$$

Добавляя и одновременно вычитая векторы в это выражение, его можно переписать в виде:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\vec{V}(t + \Delta t, \vec{r} + \Delta \vec{r}, S + \Delta S) - \vec{V}(t, \vec{r} + \Delta \vec{r}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{\vec{V}(t, \vec{r} + \Delta \vec{r}, S + \Delta S) - \vec{V}(t, \vec{r}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{\vec{V}(t, \vec{r}, S + \Delta S) - \vec{V}(t, \vec{r}, S)}{\Delta t} \right].$$

В результате можно заметить, что при выполнении условий:  $\Delta \vec{r} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ ,

$\Delta S \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ , в полученном выражение для ускорения выделенного объема жидкости

первое слагаемое равно:  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ ; второе слагаемое:  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (\vec{V}\nabla)\vec{V}$ ;

третье слагаемое:  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt}$ .

Таким образом, учет влияния производства энтропии в выделенном объеме жидкости на его ускорение, приведет к изменению левых частей уравнений Навье-Стокса, характеризующих ускорение выделенного объема жидкости и представляющих собой полные производные по времени. В расширенном фазовом пространстве их можно записать, включив дополнительный член, отвечающий за изменение скорости, при производстве энтропии  $S$  в выделенном объеме:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial S} \frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f}.$$

Отсчет энтропии можно начинать с любого уровня и, поэтому, возникает неопределенность при постановке начальных и граничных условий в расширенном пространстве переменных к полученному уравнению. Чтобы этого избежать, представим модифицированное уравнение Навье-Стокса через переменную, характеризующую плотность вероятности реализации возмущения скорости:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \varphi} \frac{1}{\delta S / \delta \varphi} \frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f}. \quad (1)$$

Производная  $\delta S / \delta \varphi$ , входящая в уравнение (1), может быть определена как функциональная производная. Найдем ее значение:

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \varphi}, h \right\rangle = - \frac{d}{d \varepsilon} \int (\varphi(p) + \varepsilon h(p)) \ln(\varphi(p) + \varepsilon h(p)) dp \Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= - \int (\ln \varphi(p) + 1) h(p) dp = \langle -(\ln \varphi(p) + 1), h \rangle.$$

Откуда следует, что  $\delta S / \delta \varphi = -\ln \varphi(p) - 1$ . Поскольку,  $-(\ln \varphi + 1) \delta \varphi = \delta(-\varphi \ln \varphi)$ , то, обозначив,  $\tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p)$ , перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} \frac{dS}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f}.$$

Производство энтропии:  $dS/dt$  можно охарактеризовать временным масштабом  $\tau$ , на котором происходит изменение энтропии стохастической системы на единицу. В результате, полученное уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f}. \quad (2)$$

Решением уравнения (2) (с граничными и начальными условиями, соответствующими конкретной задаче) будет являться значение скорости  $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}; \tau) = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}(\varphi); \tau)$ , реализующейся с вероятностью  $\varphi$ , в системе, в которой производство энтропии характеризуется временным интервалом  $\tau$ , в момент времени  $t$ , в точке  $\vec{r}(x, y, z)$ .

Для того чтобы корректно в общем случае описывать дополнительное слагаемое в левой части модифицированного уравнения Навье – Стокса, необходимо построить замыкающую модель стохастических процессов и метод их описания [16-18]. Однако в тех случаях, когда дополнительный член уравнения существенно влияет на вид решения но, при этом, само решение практически не зависит от дополнительной переменной (в данном случае  $\tilde{s}$ ), можно обойтись без построения такой модели. Исследование показало, что описание плоского течения Куэтта относится именно к такому классу задач.

Для этой задачи достаточно рассмотреть систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и модифицированных УНС:

$$\begin{cases} \nabla(\rho\vec{V})=0 \\ \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\vec{V}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tilde{s}}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+v\Delta\vec{V}. \end{cases}$$

Задачу будем решать в классической постановке [13], а именно, в предположении постоянства давления. Тогда уравнение сохранения импульса с учетом уравнения неразрывности, а также добавочного члена для описания стохастических пульсаций скорости при квазистационарном (когда  $\partial V/\partial t=0$ ) течении вязкой несжимаемой жидкости, можно переписать в виде соотношения:

$$\frac{1}{\tau}\frac{\partial V}{\partial\tilde{s}}=v\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Или, по-другому,

$$\frac{h^2}{4\tau\nu} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2},$$

где  $\tilde{y} = \frac{y}{h/2}$ ,  $h$  - ширина канала,  $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = V/U$  - безразмерная квазистационарная компонента скорости в продольном направлении в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной  $\tilde{s}$ ,  $U$  - модуль скорости стенок относительно неподвижной системы координат,  $\nu$  - вязкость жидкости.

Необходимо подчеркнуть, что в случае турбулентного режима, течение будет, безусловно, иметь пространственный - трехмерный характер. Однако нерассмотренные в уравнении пространственные компоненты скорости имеют характер стохастических пульсаций. Их влияние на структуру осредненного течения учитывается введением в уравнение переменной  $\tilde{s}$ , характеризующей производство энтропии в турбулентном потоке.

Полученное уравнение будем решать, используя граничные условия - «прилипание» жидкости на стенках в отсутствии пульсаций:  $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1 \\ \tilde{s}=0}} = \pm 1$ , и условие симметрии на оси канала:  $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{s}=0}} = 0$ .

Уравнение можно упростить, введя вместо временного масштаба  $\tau$  безразмерный коэффициент  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ) - параметр, характеризующий пространственный масштаб, и воспользовавшись соотношением:  $\tau = \frac{\gamma h}{U} = \frac{\gamma h^2}{\nu Re}$ , где

$Re = \frac{Uh}{\nu}$  - число Рейнольдса. Подставляя зависимость  $\tau(\gamma)$  в уравнение, приходим к

соотношению:

$$\frac{Re}{4\gamma} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2}.$$

Решая его методом разделения переменных:  $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = N(\tilde{s})F(\tilde{y})$ , получим два уравнения:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{d\tilde{s}} = \frac{4a\gamma}{Re} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 F}{d\tilde{y}^2} = aF, \quad (3)$$

где  $a = a(\gamma, Re)$  - произвольная константа при любых фиксированных значениях параметров  $\gamma$  и  $Re$ . Нетрудно заметить, что нулевое значение константы  $a$  соответствует решению уравнений Навье-Стокса для ламинарного течения несжимаемой жидкости в плоской задаче Куэтта. Это решение будет также являться первым решением плоской задачи Куэтта с учетом стохастических возмущений скорости для любых значений числа Рейнольдса.

В случае  $a \neq 0$ , решением первого уравнения (3) являются функции  $N(\tilde{s}) = N_0 e^{\frac{4a\gamma\tilde{s}}{Re}}$ , где  $N_0 = const$ . Решения второго уравнения (3) в неявном виде можно записать:

$$\left| F + \sqrt{F^2 \pm c^2} \right| = k e^{\sqrt{a}\tilde{y}} \quad \text{или} \quad F = F_0 e^{\pm\sqrt{a}\tilde{y}}, \quad (4)$$

где  $c$ ,  $k$  и  $F_0$  - константы интегрирования.

Исследуем первое решение (4). Из условия симметрии на оси канала для скорости  $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = N_0 e^{\frac{4a}{\text{Re}} \tilde{s}} F(\tilde{y})$ , следуют соотношения:  $F(\tilde{y})|_{\tilde{y}=0} = 0$ , которое при подстановке в уравнение (4) позволяет выразить константу интегрирования  $C$  через  $k$ :  $\pm C^2 = k^2$ . Подставляя это соотношение в зависимость (4), получим уравнение:  $\left| F + \sqrt{F^2 + k^2} \right| = k e^{\sqrt{a}\tilde{y}}$ , из которого для положительных значений  $F$  следует соотношение:  $F = k \left( e^{\sqrt{a}\tilde{y}} - e^{-\sqrt{a}\tilde{y}} \right) / 2$  или, по другому,  $F = k \cdot \text{sh}(\sqrt{a}\tilde{y})$ . Подставляя его в выражение для скорости, находим

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = b e^{\frac{4a}{\text{Re}} \tilde{s}} \text{sh}(\sqrt{a}\tilde{y}), \quad \text{где } b = N_0 k.$$

Из условия «прилипания» в отсутствии пульсаций на стенках:  $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s})|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1 \\ \tilde{s}=0}} = \pm 1$ , можно найти значение константы  $b$ :  $b = 1 / \text{sh}\sqrt{a}$ . И, следовательно, выражение для скорости можно переписать в виде:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{\text{sh}(\sqrt{a}\tilde{y})}{\text{sh}\sqrt{a}} e^{\frac{4a}{\text{Re}} \tilde{s}}, \quad a \neq 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) видно, что с увеличением числа Рейнольдса модуль показателя экспоненты будет уменьшаться. И, следовательно, при достаточно больших значениях числа Рейнольдса изменением стохастической переменной можно пренебречь. Поэтому, выбор записи уравнения Навье-Стокса в расширенном фазовом пространстве в виде уравнения типа (2) без учета уравнений, описывающих

эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве, является оправданным при достаточно больших числах Рейнольдса.

Для того чтобы определить условия, накладываемые на постоянную  $a$ , используем формулу (5) для нахождения безразмерной динамической скорости  $\tilde{V}_*$ , которая реализуется на безразмерной длине вязкого слоя:

$$\tilde{y}_* = \frac{y_*}{h/2} = \frac{y_* V_*}{\nu} \frac{\nu}{U h/2 V_*} \sim \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{\tilde{V}_*}, \quad (y_* V_* / \nu \sim 1)$$

вблизи точки перегиба:  $\tilde{y} = 0$ , при нулевом значении стохастического возмущения ( $\tilde{s} = 0$ ):

$$\tilde{V}_* = \frac{sh(\sqrt{a} \tilde{y}_*)}{sh\sqrt{a}}. \quad (6)$$

Безразмерную динамическую скорость можно записать в виде:

$$\tilde{V}_* = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{1}{U} \sqrt{\nu \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{s}=0}}} = \frac{1}{U} \sqrt{\nu \frac{U}{h/2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{s}=0}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{sh\sqrt{a}}}, \quad (7)$$

здесь  $\sigma$  - отнесенная к единице площади сила трения.

Подставляя в выражение (6) формулы для  $\tilde{V}_*$  и  $\tilde{y}_*$ , получим зависимость:

$$\sqrt{2} \frac{\sqrt{ash\sqrt{a}}}{\text{Re}} \sim sh \left( \sqrt{2} \frac{\sqrt{ash\sqrt{a}}}{\text{Re}} \right), \quad a \neq 0.$$

Это соотношение выполняется с высокой точностью, если  $k = 2\sqrt{a} \cdot sh\sqrt{a}/Re < 1$ . При выполнении этого условия, экспоненту, стоящую в соотношении (5), можно разложить в ряд Тейлора с точностью до  $O\left((a/Re)^2\right)$ :

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{sh(\sqrt{a}\tilde{y})}{sh\sqrt{a}} \left( 1 + \frac{4a}{Re} \gamma \tilde{s} \right) + O\left(\left(\frac{a}{Re}\right)^2\right).$$

Второе слагаемое в скобках этого выражения характеризует возмущение безразмерной скорости, реализующейся с вероятностью, описываемой стохастической переменной  $\tilde{s}$ . В каждой точке возмущение безразмерной скорости должно быть порядка величины безразмерной динамической скорости. Такое ограничение, с одной стороны, позволит стохастическому возмущению скорости «диссипировать» на длине вязкого масштаба, а, с другой стороны, не даст ему полностью исчезнуть. Поэтому можно записать:

$$\frac{4a}{Re} \sim \tilde{V}_* \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Re}} \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{sh\sqrt{a}}}$$

или

$$8(\sqrt{a})^3 sh\sqrt{a} \sim Re. \quad (8)$$

Соотношение (8) и уравнение (5) позволят при совместном использовании определять профиль скорости течения от поперечной координаты в плоской задаче Куэтта для различных значений числа Рейнольдса.

Нетрудно видеть, что второе решение (4):  $F = F_0 e^{\pm\sqrt{a}\tilde{y}}$ , при  $a > 0$ , не соответствует условию симметрии распределения скорости в канале относительно продольной оси. При  $a < 0$ , скорость, соответствующая этому решению, будет выражаться соотношением:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{\sin(\sqrt{|a|}\tilde{y})}{\sin\sqrt{|a|}} e^{-\frac{4|a|}{\text{Re}}\tilde{s}}. \quad (9)$$

Значение постоянной  $a$  в этом случае также можно определить, используя соотношение для скорости на длине вязкого слоя вблизи точки перегиба. Используя выражения для безразмерных динамической скорости и динамической длины, получим соотношение для  $|a|$ :  $8(\sqrt{|a|})^3 \sin\sqrt{|a|} \sim \text{Re}$ . При больших значениях числа Рейнольдса зависимость  $|a|$  от  $\text{Re}$  будет иметь быстроменяющийся немонотонный характер. И, поэтому, второе решение (4) (в виде соотношения (9)) будет неустойчивым.

Во второй главе будут рассмотрены вопросы, связанные с определением критического значения числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения жидкости. Однако здесь хотелось бы подчеркнуть, что переход от одного режима к другому при достижении критического значения числа Рейнольдса не является однозначным, поскольку ниже критического значения может существовать только ламинарный режим течения, а выше этого значения может быть как турбулентный, так и ламинарный режимы

течения. Об этом свидетельствует наличие двух решений уравнений (3). Одно из которых (для нулевого значения константы  $a$ ) соответствует ламинарному режиму течения для любых значений числа Рейнольдса, а второе (для которого значение константы  $a$ , связано с конкретным значением числа Рейнольдса и определяется соотношением (8)), соответствует турбулентному режиму течения.

Сравним полученный результат с экспериментальными данными, приведенными в [19], со ссылкой на работы тридцатых годов прошлого века на немецком языке Райхардта. На рисунке 2 показано сравнение теоретических и экспериментальных данных для профиля скорости течения от поперечной координаты в плоской задаче Куэтта для следующих значений числа Рейнольдса:  $Re = 1200$ ,  $Re = 2900$  и  $Re = 34000$ .

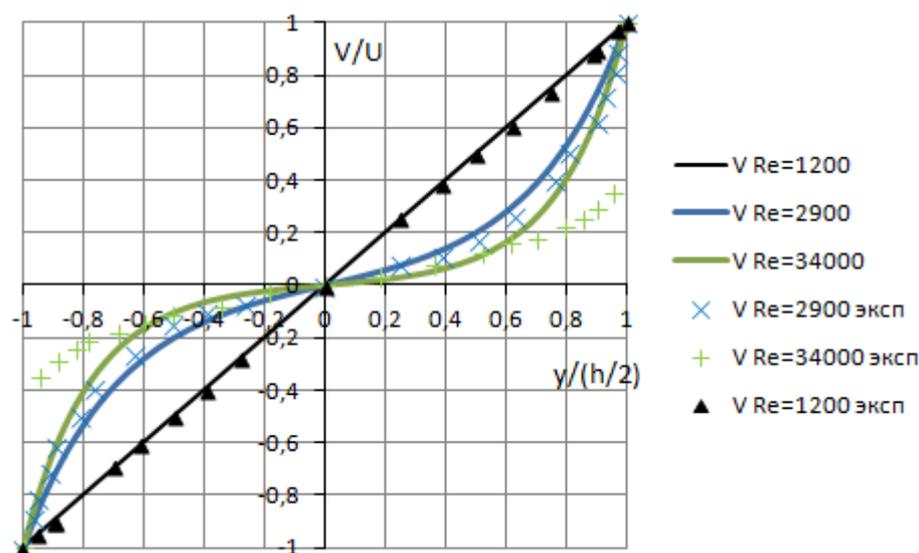


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и теоретических значений профиля скорости течения Куэтта при различных числах Рейнольдса

Для значения  $Re = 1200$  в эксперименте получен ламинарный режим течения. Одно из найденных теоретических решений соответствует ламинарному режиму течения и, поэтому, на рисунке для этого режима течения нанесен теоретический профиль скорости, соответствующий ламинарному режиму.

Для значений числа Рейнольдса  $Re = 2900$  и  $Re = 34000$  экспериментально получены турбулентные режимы течения и, поэтому они сравниваются с теоретическими решениями, соответствующими турбулентному режиму.

Значения  $\sqrt{a}$ , найденные из уравнения (8) для чисел Рейнольдса  $Re = 2900$  и  $Re = 34000$ , соответственно равны:  $\sqrt{a} \approx 3,14$  и  $\sqrt{a} \approx 4,52$ . Профили находятся при подстановке этих значений в уравнение (5) при значении  $\tilde{\tau} = 0$ .

Из рисунка 2 видно довольно хорошее совпадение теоретического и экспериментальных профилей для значения числа Рейнольдса  $Re = 2900$ .

Для значения числа Рейнольдса  $Re = 34000$  теоретический и экспериментальный профили практически совпадают в центральной части трубы. Отличие профилей вблизи стенок при таком – довольно большом числе Рейнольдса и, следовательно, малом размере вязкого слоя – может быть обусловлено нарушением условия прилипания жидкости из-за влияния шероховатости и/или смачиваемости стенок. Кроме того, гладкость решения вблизи стенок может нарушаться за счет того, что значение  $\tilde{V}_*$  (см. (7)), определенное в центре – в окрестности точки перегиба профиля и, определенное вблизи стенок, будут

различаться. Действительно, если записать выражение, аналогичное (7) для точек  $\tilde{y} = \pm 1$ , то получим:

$$\tilde{V}_{*cm} = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{1}{U} \sqrt{v \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1 \\ \tilde{s}=0}}} = \frac{1}{U} \sqrt{v \frac{U}{h/2} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1 \\ \tilde{s}=0}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\sqrt{a} \cdot \text{cth} \sqrt{a}} \Big|_{\sqrt{a}>1} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt[4]{a} .$$

Разница значений  $\tilde{V}_*$  для точки перегиба (соотношение (7)) и пристеночных значений  $\tilde{V}_{*cm}$  растет с ростом числа  $a$ , а, следовательно, и с ростом числа Рейнольдса.

В работе [19], к сожалению, не приведено значение точности экспериментальных данных, что затрудняет их анализ. Поэтому, в данной работе далее не будем останавливаться на учете отличий влияния стенок и точки перегиба на динамические характеристики потока и, тем самым, на решение задачи Куэтта.

### **3. Метод теоретического определения минимального значения числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в плоской задаче Куэтта.**

В работах [12], [20] был предложен и подробно рассмотрен метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы (метод описания «разрывных функций»). В работе [12] на основе этого метода было определено критическое число Рейнольдса, при котором становится возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения для задачи Хагена-Пуазейля. В этой главе

рассмотрим аналогичный подход для определения критического значения числа Рейнольдса в плоской задаче Куэтта.

Метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы (см. рис. 3), применим к таким физическим процессам, которые можно однозначно описать функциями  $\tilde{m}(\alpha)$  на всей области определения  $\alpha$ , кроме малых подобластей, в которых эти функции изменяют свои значения и/или значения своих производных. В таких подобластях функции  $\tilde{m}(\alpha) = \tilde{m}(\alpha(t))$  могут вести себя случайным образом (если следить за процессом изменения аргумента много раз). Задача метода состоит в поиске соотношений, связывающих значения функций и их производных на границах подобластей изменения параметров с размерами и положением этих подобластей относительно, рассматриваемых областей определения значений  $\alpha$ .

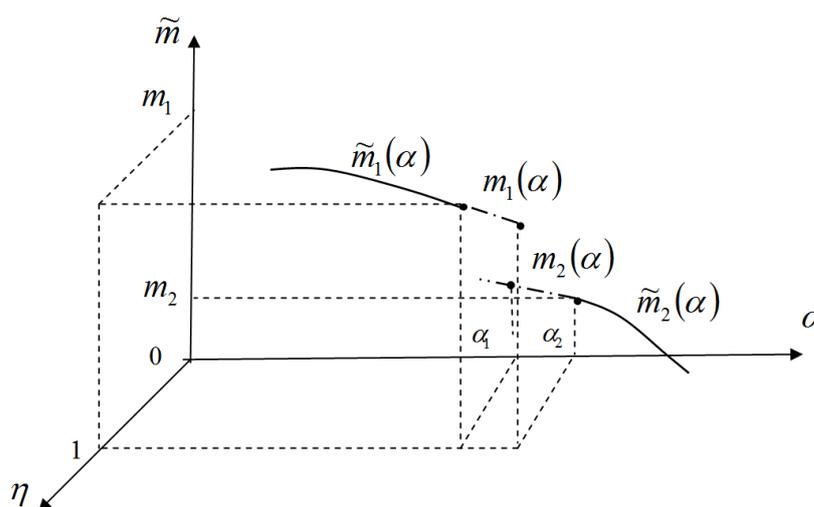


Рис. 3. Схематичное изображение функции с разрывом первого рода в расширенном пространстве переменных

В результате были найдены уравнение и неравенство, связывающие значения функций  $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1$  и  $m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$  (значения линейно продолженных функций  $\tilde{m}_1(\alpha)$  и  $\tilde{m}_2(\alpha)$  в область  $[\alpha_1, \alpha_2]$ ), а также значения производных  $\partial m_1(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_1} = \partial m_1/\partial \alpha$  и  $\partial m_2(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_2} = \partial m_2/\partial \alpha$  в точках  $\alpha = \alpha_1$  и  $\alpha = \alpha_2$ , соответственно, с протяженностью области перехода  $\Delta\alpha$ , которая отделяет точку  $\alpha_2$  от точки  $\alpha_1$ :

$$\left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)^2 m_2^4 - 4 \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right) m_1^2 m_2 \left(m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha - m_2\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} \left(m_1 m_2 - m_1^2 + m_2 \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \Delta\alpha\right) + m_1^2\right)^2 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha)^2 \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha}\right)^2 + 2\Delta\alpha \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} \left(m_1 - m_2 + \left(\frac{m_1^2}{m_2} \frac{1}{\partial m_1/\partial \alpha} + \alpha_2\right) \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial m_2}{\partial \alpha}\right)\right) + \\ + 2\alpha_2 m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial m_2}{\partial \alpha}\right) + m_1(m_1 - 2m_2) \geq 0. \quad (11) \end{aligned}$$

В главе 2 процедура расширения фазового пространства за счет введения «стохастической» переменной была применена к описанию течения вязкой несжимаемой жидкости в плоской задаче Куэтта. В результате, были обнаружены два решения, одно из которых соответствует ламинарному, а второе (5) – турбулентному режиму течения жидкости.

Это позволяет воспользоваться методом описания «разрывных функций» для определения критического числа Рейнольдса, при котором становится возможен

переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в плоской задаче Куэтта. Остановимся на этом подробнее.

Ламинарный режим течения жидкости, характеризуется линейным профилем скорости:  $\tilde{V} = \tilde{y}$ . Турбулентный режим описывается соотношением (5).

Таким образом, ламинарный и турбулентный (при нулевых значениях пульсаций:  $\tilde{s} = 0$ ) режимы течения можно характеризовать различными функциями скорости:

$$\tilde{V}|_{\tilde{s}=0} = \begin{cases} \tilde{y}, & \text{ламинарный} \\ sh(\sqrt{a}\tilde{y})/sh\sqrt{a}, & \text{турбулентный} \end{cases}, \quad \text{где } a = a(\text{Re}).$$

Различными будут также и значения производных скорости:

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{y}}|_{\tilde{s}=0} = \begin{cases} 1, & \text{ламинарный} \\ \sqrt{a} \cdot ch(\sqrt{a}\tilde{y})/sh\sqrt{a}, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Можно рассмотреть значения производных скорости при нулевом значении пульсаций в одной точке, например, в точке перегиба профиля скорости - в точке  $\tilde{y} = 0$ :

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{y}}|_{\tilde{y}=0, \tilde{s}=0} = \begin{cases} 1, & \text{ламинарный} \\ \sqrt{a}/sh\sqrt{a}, & \text{турбулентный} \end{cases}$$

Погрешность, связанная с методом описания «разрывных функций», обусловлена, главным образом, нелинейностью функций в области перехода. Если протяженность этой области становится достаточно большой, то влияние

нелинейности усиливается. Чтобы минимизировать влияние нелинейности, можно обозначить переменной  $\alpha$  все выражение  $\sqrt{a}/sh\sqrt{a}$ . Поскольку функция  $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}/sh\sqrt{a}$  является монотонной при изменении значения  $\sqrt{a}$ , то такая процедура не является запрещенной. В этом случае можно записать:  $\alpha = \sqrt{a}/sh\sqrt{a}$  и

$$m(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ ламинарный} \\ \alpha, \text{ турбулентный} \end{cases}. \quad (12)$$

Из экспериментов известно, что при малых числах Рейнольдса может быть только ламинарный режим течения, а при больших – как ламинарный, так и турбулентный, поэтому ветвью решения:  $m_1(\alpha) = 1$ , следует обозначить решение, соответствующее ламинарному режиму, а ветвью решения:  $m_2(\alpha) = \alpha$ , следует обозначить решение, соответствующее турбулентному (стохастическому) режиму течения жидкости.

В главе 2 было показано, что нулевое значение параметра  $\sqrt{a}$  соответствует ламинарному режиму течения. Применяя правило Лопиталья, к функции  $\alpha(\sqrt{a}) = \sqrt{a}/sh\sqrt{a}$ , для случая  $\sqrt{a} = 0$ , запишем:  $\alpha_1 = \alpha(0) = 1$ .

Для турбулентного режима течения (в критической точке перехода с одного режима на другой):  $\alpha_2 = \alpha(\sqrt{a_{кр}}) = \sqrt{a_{кр}}/sh\sqrt{a_{кр}}$ . И, следовательно,  $\Delta\alpha = \alpha_2 - 1$ . При этом из соотношения (12) следуют выражения для значений функций и значений их производных в соответствующих точках:

$$m_1 \stackrel{def}{=} m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 1, \quad \partial m_1 / \partial \alpha \stackrel{def}{=} \partial m_1(\alpha) / \partial \alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0,$$

$$m_2 \stackrel{def}{=} m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} = \alpha_2, \quad \partial m_2 / \partial \alpha \stackrel{def}{=} \partial m_2(\alpha) / \partial \alpha \Big|_{\alpha=\alpha_2} = 1.$$

Подставляя эти значения, а также значения аргументов в соотношение (10), получим уравнение:

$$\alpha_2^6 - \alpha_2^4 - 4\alpha_2^3 + 6\alpha_2^2 - 1 = 0.$$

Действительным положительным корнем этого уравнения является значение  $\alpha_2 \approx 0,52$ , которому соответствует  $\sqrt{a_{кр}} \approx 2,11$ . Воспользовавшись соотношением (8), получим значение критического числа Рейнольдса, при котором становится возможным переход от ламинарного к турбулентному режиму течения:

$$Re_{кр} \sim 8 \left( \sqrt{a_{кр}} \right)^3 sh \sqrt{a_{кр}} \approx 305.$$

Проверяем выполнение условия (11). Подставляя в него соответствующие значения аргументов, функций и их производных, получим соотношение:

$$-4\alpha_2^2 + \alpha_2 + 2 \geq 0,$$

которое для положительных значений  $\alpha_2$  выполняется в диапазоне значений:  $0 \leq \alpha_2 \leq (1 + \sqrt{33})/8$ . Найденное значение  $\alpha_2 \approx 0,52$  находится внутри этого диапазона. Следовательно, найденное решение уравнения (10) и, соответствующее ему значение критического числа Рейнольдса, является решением задачи в целом.

В работах [21-22] (см. также обзор литературы к ним) отмечается, что минимальные экспериментально найденные значения критического числа Рейнольдса для плоского течения Куэтта, определяемых полушириной канала:

$Re_{h/2} = \frac{U h/2}{\nu}$ , составляют  $Re_{h/2кр} \sim 300$ . Что в пересчете к принятым в данной работе (а также в работе Шлихтинга) значениям числа Рейнольдса, определяемым шириной канала:  $Re = \frac{Uh}{\nu}$ , равно  $Re_{кр} \sim 600$ . Это значение довольно сильно отличается от теоретически определенного выше критического числа Рейнольдса:  $Re_{кр} \approx 305$ . Однако, во-первых, достижение критического значения числа Рейнольдса означает возможность (но не обязательность) перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения: при числах Рейнольдса меньше этого значения турбулентный режим течения существовать не может, при превышении значения критического числа Рейнольдса вероятность перехода к турбулентному режиму течения возрастает с ростом числа Рейнольдса. Поэтому экспериментально определяемые критические числа Рейнольдса как значения, при которых в изначально невозмущенном потоке наступает турбулентность, и значения, при которых изначально возмущенный поток продолжает оставаться таким, могут существенно отличаться. А, во-вторых, экспериментальные наблюдения показывают, что первые возмущения в виде продольных вихрей самопроизвольно генерируются в плоском течении Куэтта уже при значениях чисел Рейнольдса  $Re_{h/2} \sim 150$ , что соответствует  $Re \sim 300$ . Это значение практически совпадает с теоретически найденным критическим числом Рейнольдса.

## Выводы

Разработан метод описания стохастических режимов течения, с использованием модифицированных уравнений Навье-Стокса. В таком подходе уравнения Навье-Стокса записываются в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной, характеризующей производство энтропии при возбуждении стохастических возмущений.

Данный подход позволил найти два решения плоской задачи Куэтта: одно из которых соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному.

Первое решение во всей области течения жидкости характеризуется линейным профилем скорости, второе характеризуется профилем скорости пропорциональным гиперболическому синусу с параметром, зависящим от значения числа Рейнольдса.

Найдено критическое значение числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в плоской задаче Куэтта.

Проведено сравнение полученных в работе результатов с имеющимися экспериментальными данными.

### Библиографический список

1. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75565>
2. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=44440>
3. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58536>
4. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29361>
5. До С.З. Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49670>
6. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49676>
7. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Численное моделирование поведения трехслойной прямоугольной пластины при вертикальном ударе о жидкость // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=43066>

8. Махров В.П., Глущенко А.А., Юрьев А.И. Влияние гидродинамических особенностей на поведение свободной поверхности жидкости в высокоскоростном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=36423>
9. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34402>
10. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Естественные и технические науки. 2017. № 11. С. 255 - 257.
11. Хатунцева О.Н. Об учете влияния стохастических возмущений на решения уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93311>
12. Хатунцева О.Н. О нахождении критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=96567>
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. Т. VI. - 731 с.
14. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физмалит, 2005. - 288 с.
15. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Физическая кинетика. - М.: Наука, 2002. Т. X. - 536 с.

16. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98854>
17. Хатунцева О.Н. О влиянии учета изменения плотности вероятности случайных величин на динамику стохастического процесса // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2012. Т. 13. № 3. С. 10.
18. Хатунцева О.Н. Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных // Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. XLII. № 1. С. 62 - 85.
19. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
20. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких «пальцев» и росте дендритов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12. № 2. С. 231 - 241.
21. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // Physics of Fluids, 1995, no. 7, pp. 335 - 343.
22. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow // Europhysics Letters, 1998, no. 43, pp. 171 - 176.

*Статья поступила в редакцию 15.01.2019*