

Проектирование оптимальных трёхслойных конструкций цилиндрической формы

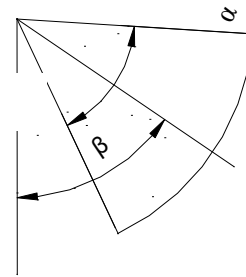
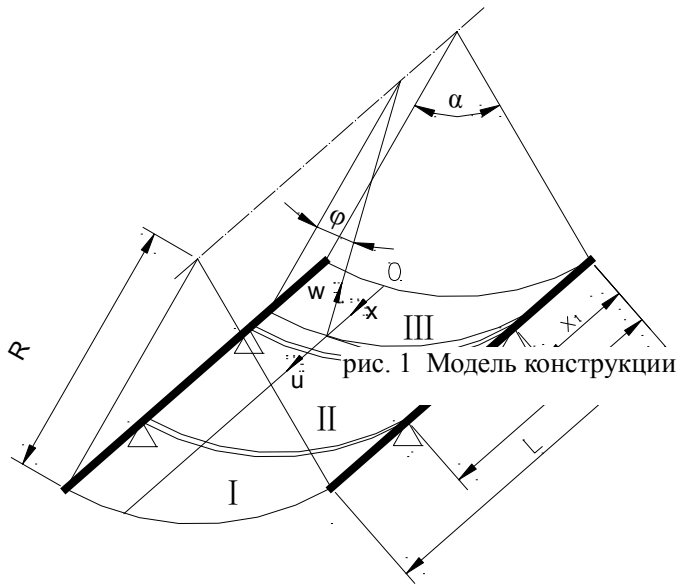
Гуань Шивэй, А.А. Дудченко, А.И. Ендогур

В статье проводится анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) трехслойной цилиндрической панели, прикрепленной к четырем балкам (к двум горизонтальным продольным и двум упругим поперечным, имеющим форму в виде круглого бруса). На основе анализа НДС с использованием ограничений по прогибам и напряжениям определяется оптимальное положение поперечных балок и оптимальные параметры панели и балок.

Антенные системы представляют собой обычно оболочечные формы разной конфигурации. Крупногабаритные антенны должны иметь очень малые отклонения от заданной идеальной формы отражающей поверхности. Например, точность изготовления профиля зеркала вместе с перемещениями от собственного веса должна быть не больше величины $\Delta\rho = \frac{\lambda}{16}$. [4] Где $\Delta\rho$ — отклонение формы зеркала от расчетной, λ — длина волны. Если взять $\lambda = 1$ мм, то $\Delta\rho = 0.0625$ мм. Это малая величина. Поэтому, при проектировании необходимо учитывать отклонения от начальной теоретической поверхности антенны под действием собственного веса, а также учитывать точность изготовления и монтажа антенны.

Проведем расчет по определению НДС в конструкции, выполненной в форме цилиндрической панели, изображенной на рис. 1. Пусть трёхслойная цилиндрическая оболочка крепится к четырём балкам (к двум горизонтальным продольным и двум упругим поперечным, имеющим форму в виде криволинейного бруса). Опоры конструкции находятся в узлах балок. Рассматривается перемещение конструкции в вертикальной плоскости, в пределах изменения угла $0 \leq \beta \leq 90^\circ$. Угловой растрвор панели определится углом α .

Для осуществления теоретического расчета предположим, что в оболочке свободно опертыми являются лишь прямолинейные края при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, два других края свободны. Положение поперечных кривых балок находятся из расчета при выполнении условия минимума прогиба конструкции. Оболочка находится под действием только собственного веса.



пере
пове

е функции: по
ю нормали к

(1)

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \sin \lambda_m \varphi$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \cos \lambda_m \varphi$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \lambda_m \varphi$$

где $\lambda_m = \frac{m\pi}{\alpha}$, U_m , V_m и W_m — искомые функции от x . Подставим эти ряды в уравнения

равновесия цилиндрической оболочки, записанные в перемещениях [1,2].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\mu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \varphi} + R \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\frac{R(1-\mu^2)}{Eh} Y,$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R} - \frac{h^2}{12} \left(R \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = -\frac{R(1-\mu^2)}{Eh} Z.$$

где правые части учитывают проекции собственного веса панели на координаты $y = R\varphi$ и Z , Y

— направление к окружной касательной, Z — направление нормали. Получим для U_m , V_m и

W_m три обыкновенных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами. Эти уравнения можно решить и показать, что каждая система функций U_m , V_m и W_m содержит восемь постоянных интегрирования для каждого принятого значения m . С учетом наличия поперечных балок, панель по длине разбиваем на три участка. В пределах каждого участка имеем 8 констант, но с учетом симметрии по длине рассматриваем только левую половину оболочки. Граничные условия принимаем на краю ($x=0$) — 4 условия, на стыке двух частей ($x=x_1$) — 8 условий.

Граничные условия, характеризующие свободный край, принимают вид

$$N_x = 0, M_x = 0, T_x = 0, S_x = 0 \quad (3)$$

Граничные условия, характеризующие край на криволинейной балке, принимают вид

$$\frac{\partial w_{xI}}{\partial x} = \frac{\partial w_{xII}}{\partial x}, M_{xI} = M_{xII}, u_I = u_{II} = 0, v_I = v_{II} = v_\sigma, w_I = w_{II} = w_\sigma \quad (4)$$

$$\frac{\partial w_{xII}}{\partial x} = \frac{\partial w_{xIII}}{\partial x}, M_{xII} = M_{xIII}, u_{II} = u_{III} = 0, v_{II} = v_{III} = v_\sigma, w_{II} = w_{III} = w_\sigma \quad (5)$$

Параметры с индексом «б» — относятся к балке.

Весовые функций в координатах панели можно записать:

$$Y = -q \sin\left(\beta + \varphi - \frac{\alpha}{2}\right), Z = -q \cos\left(\beta + \varphi - \frac{\alpha}{2}\right),$$

где q — вертикальная нагрузка, приходящаяся на единицу площади поверхности и представляющая собою заданную постоянную величину.

Усилия и моменты выражаются через функции перемещений в виде:

$$T_x = Q_x - \frac{\partial M_{x\varphi}}{R \partial \varphi}, S_x = N_{x\varphi} + \frac{M_{x\varphi}}{R},$$

$$N_x = \frac{K}{R} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \right) \right], N_\varphi = \frac{K}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w + \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right),$$

$$N_{x\varphi} = \frac{K(1-\mu)}{2R} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right),$$

$$M_x = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), M_\varphi = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right), M_{x\varphi} = -M_{\varphi x} = \frac{D(1-\mu)}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \varphi},$$

$$Q_x = -\frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta w, Q_\varphi = -\frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta w,$$

где $N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}$ — мембранные силы, Q_x, Q_φ — перерезывающие силы, M_x, M_φ — изгибающие моменты, $M_{x\varphi}$ — крутящий момент, T_x — результирующая мембранная сила в направлении нормальном к краю, S_x — результирующая мембранная сила в направлении касательной к краю. $\xi = \frac{x}{R}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, $K = \frac{Eh}{1-\mu^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$.

Рассмотрим работу поперечной балки. Силы и перемещения поперечной балки можно получить из решения следующих соотношений [3].

$$P(\varphi) = -R \frac{dq_\varphi}{d\varphi} + Rq_r,$$

$$N = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \int_0^\varphi P(u) \sin(\varphi - u) du,$$

$$Q = \frac{dN}{d\varphi} + Rq_\varphi,$$

$$M = \frac{EJ}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w \right),$$

$$v = C_6 \cos \varphi + C_5 \sin \varphi + R \int_0^\varphi (C_4 + C_3 Ru) \sin(\varphi - u) du + \bar{v},$$

$$w = \frac{RN}{EF} - \frac{dv}{d\varphi}.$$

где

$$q_r = -T_{xII}(x_1, \varphi) + T_{xI}(x_1, \varphi), \quad q_\varphi = S_{xII}(x_1, \varphi) - S_{xI}(x_1, \varphi),$$

$$\bar{v} = R^2 \int_0^\varphi \left[\int_0^u \left(\int_0^u f(u) du \right) du \right] \sin(\varphi - u) du,$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{EFR} \frac{d}{d\varphi} \left(N + \frac{d^2 N}{d\varphi^2} \right) - \frac{R}{EJ} \left(rq_\varphi + \frac{dN}{d\varphi} \right).$$

произвольные постоянные C_i определяют из краевых условий:

$$\text{при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha \quad v = w = M = 0.$$

При конструировании, необходимо определить рациональные величины параметров:

расположение поперечных балок, толщину обшивки, величину разноса несущих слоев, площадь поясов и момент инерции балки по условиям минимума массы и прогибов панели.

Проведем расчет и проектирование рассматриваемой конструкции на конкретном примере. Оптимальное положение поперечных балок вычислялось при следующих предварительных заданных параметрах: $E = 7.2 \times 10^{10} \text{ Н / м}^2$, $\mu = 0,3$, $L = 6 \text{ м}$, $H_{об} = 20 \text{ мм}$, $\delta = 2 \text{ мм}$, $H_{\sigma} = 50 \text{ мм}$, $F = 1000 \text{ мм}^2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 0^\circ$. На рис. 2 показано оптимальное положение поперечной балки при перемещении по координате x , найденное из условия минимума перемещения w для трех разных радиусов панели. Можно увидеть, что при $x_1 = 1.37 \text{ м}$, максимальный прогиб оболочки меньше.

рис. 2 Оптимальное положение поперечной балки

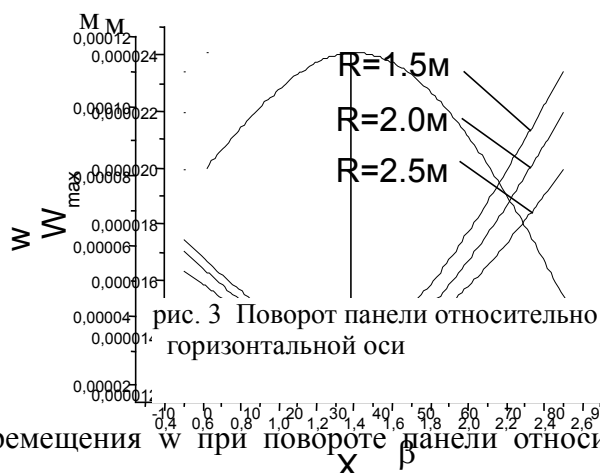


рис. 3 Поворот панели относительно горизонтальной оси

На рис. 3 показана кривая изменения перемещения w при повороте панели относительно горизонтальной оси, при тех же значениях параметров оболочки: $R = 2 \text{ м}$, $E = 7.2 \times 10^{10} \text{ Н / м}^2$, $\mu = 0,3$, $L = 6 \text{ м}$, $H_{об} = 20 \text{ мм}$, $\delta = 2 \text{ мм}$, $H_{\sigma} = 50 \text{ мм}$, $F = 1000 \text{ мм}^2$, $\alpha = 60^\circ$. Видно, что максимальный прогиб оболочки w приходится на отклоненное положение $\beta = 33^\circ$.

Проведем анализ и определим оптимальные параметры конструкции, от которых зависит минимальный её вес при выполнении ограничений по перемещениям w и величине напряжений в обшивке. В качестве примера, рассмотрим конструкцию со следующими начальными параметрами $R = 2 \text{ м}$, $E = 7.2 \times 10^{10} \text{ Н / м}^2$, $\mu = 0,3$, $L = 6 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 33^\circ$.

Целевой функцией является масса оболочки и балок, т.е.

$$G = G_{об} + G_{\delta}$$

при ограничениях:

$$w_{\max} = 0.06 \text{ мм}, 10 \text{ мм} \leq H_{об} \leq 20 \text{ мм}, 1 \text{ мм} \leq \delta \leq 2 \text{ мм}, 20 \text{ мм} \leq H_{\delta} \leq 100 \text{ мм}, 0 \leq F \leq 2000 \text{ мм}^2.$$

Результат расчета представим на рис. 4 и 5.

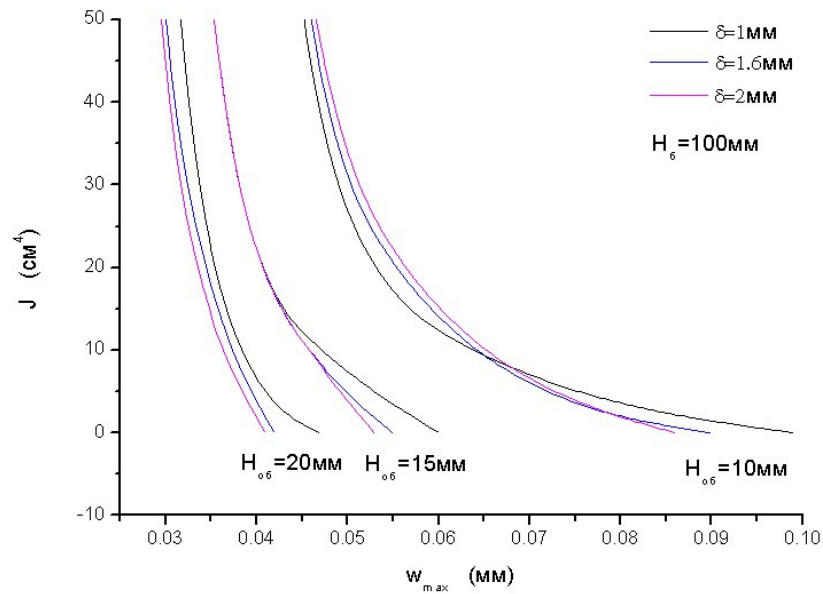


рис. 4 Влияние момента инерции балки на величину максимального прогиба

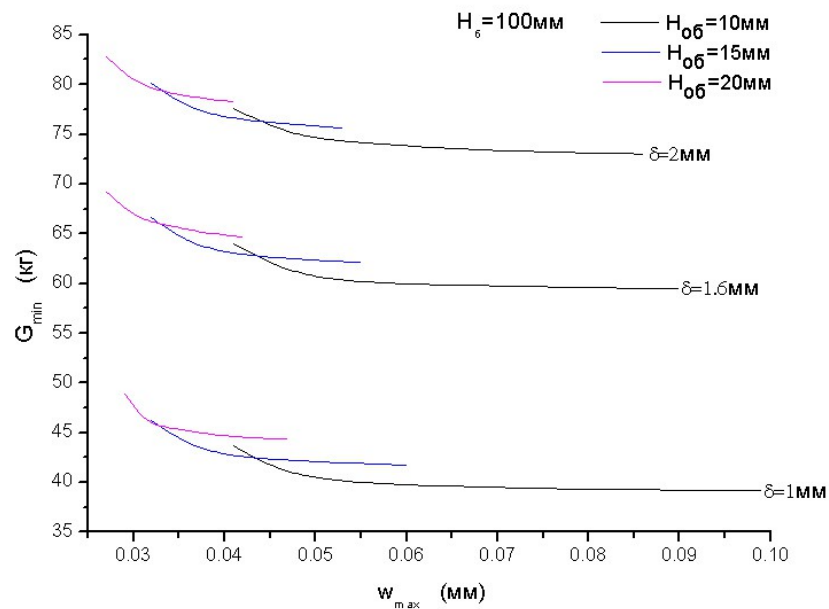


рис. 5 Зависимость веса конструкции от максимального прогиба

На рис.4 показано влияние момента инерции двутавровой балки J на величину максимального

прогиба w_{\max} в зависимости толщины несущих слоев δ , величины разноса несущих слоев H для балки с величиной разноса балок $H_{\delta} = 100 \text{ мм}$. На рис.5 приведены оптимальные кривые зависимости веса G от w_{\max} , огибающие расчетные кривые для трех значений δ и H_{δ} при $H_{\delta} = 100 \text{ мм}$. Используя эти кривые, можно найти все параметры панели при заданном значении ограничения по w_{\max} . По графику можно определить оптимальные параметры оболочки и балки. Видно, что при $H_{\delta} = 10 \text{ мм}$, $\delta = 1 \text{ мм}$, $H_{\delta} = 100 \text{ мм}$ масса конструкции минимальна, и равна 39,75 кг. При этом площадь поясов равняется 45 мм^2 .

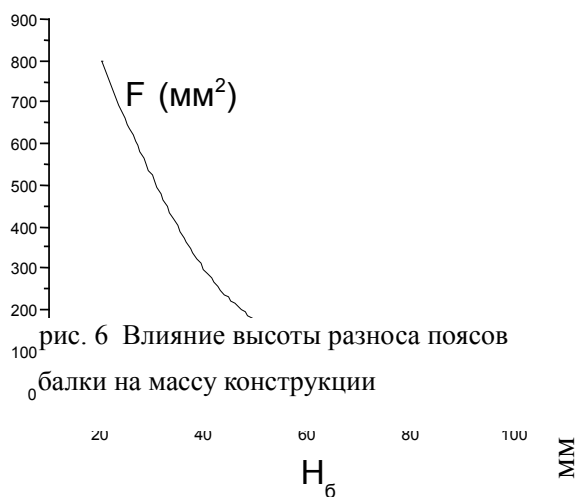


рис. 6 Влияние высоты разноса поясов балки на массу конструкции

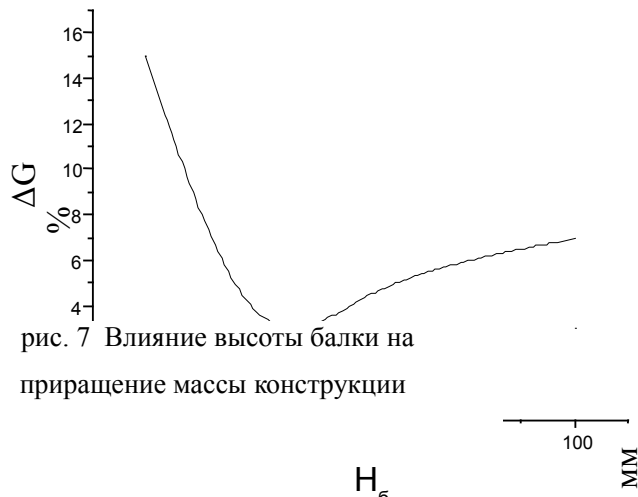


рис. 7 Влияние высоты балки на приращение массы конструкции

На рис.6 показано влияние высоты разноса поясов балки на массу конструкции, на рис.7 влияние высоты балки на приращение массы конструкции при следующих её параметрах: $R = 2 \text{ м}$, $E = 7.2 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu = 0,3$, $L = 6 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 33^\circ$, $\delta = 1 \text{ мм}$, $H_{\delta} = 10 \text{ мм}$. Видно, что H_{δ} существенно влияет на величину площади поясов F , но мало на общий вес G , т.к. приращение веса

$$\Delta G_{\max} = \frac{G - \bar{G}}{G} \leq 15\%. \quad H_{\sigma} \text{ — высота разноса поясов балки.}$$

Для проверки результатов аналитического расчета, проведен численный расчет с помощью программы Nastran. На рис.8 показан результат численного расчета, а на рис.9 — аналитического расчета. В расчетах использовались одинаковые параметры: $E = 7.2 \times 10^{10} \text{ H / м}^2$, $\mu = 0,3$, $L = 6 \text{ м}$, $H_{об} = 20 \text{ мм}$, $\delta = 2 \text{ мм}$, $H_{\sigma} = 50 \text{ мм}$, $F = 2000 \text{ мм}^2$, $\alpha = 60^{\circ}$, $\beta = 0^{\circ}$, $\varphi = \pi/6$, где u, v, w — компоненты смещений (рис.1). Видно, что результаты численного и аналитического расчета хорошо совпадают.

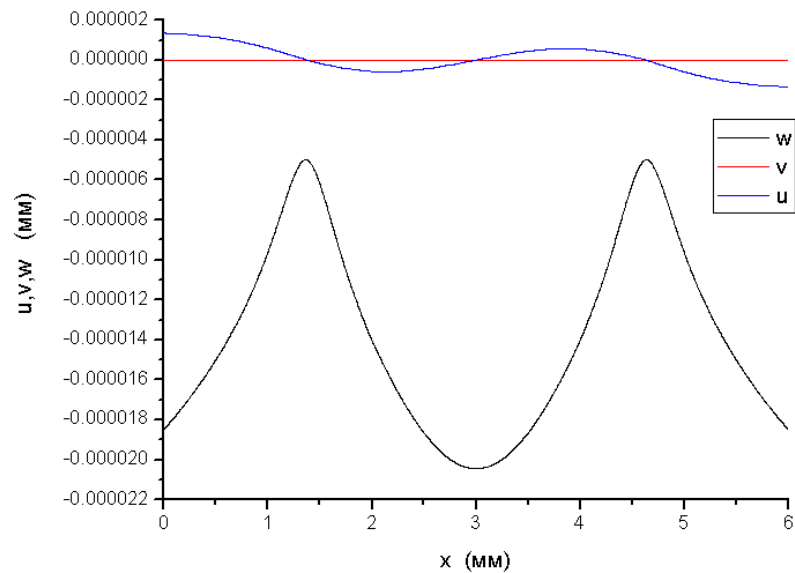


рис. 8 Перемещения панели (Nastran)

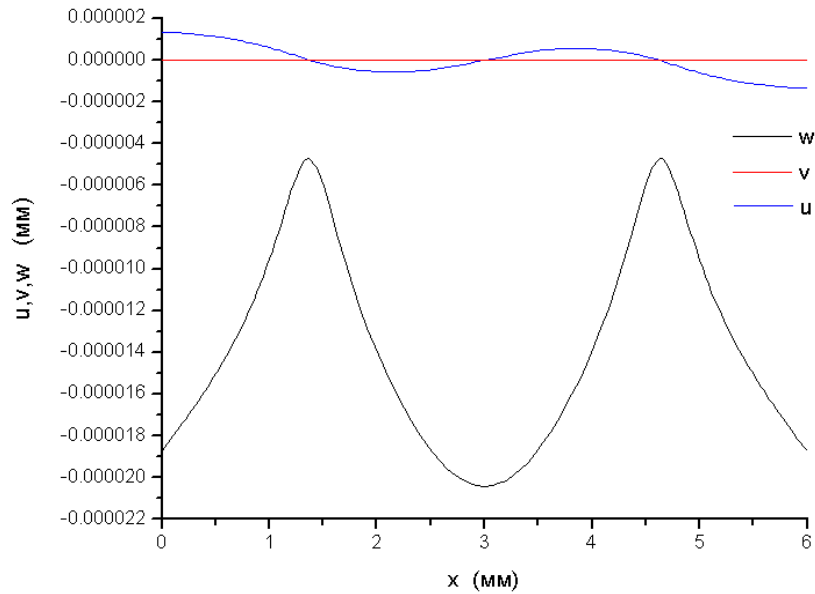


рис. 9 Перемещения панели (аналитическое решение)

В соответствии с проведенными расчетами, можно сделать следующие выводы:

1. Оптимальное положение поперечных криволинейных балок при перемещении по координате x , найдено из условия минимума прогиба w . Разные радиусы панели не влияют на его положение.

2. При перемещении w_{\max} меньшем ($w_{\max} < 0.05$), w_{\max} слабо зависит от общего веса конструкции, а при большем перемещении, существенно.

3. Использование трехслойной панели уменьшают общий вес конструкции. Например, минимальная масса трехслойной панели равна 39,75 кг, а однослойной панели при прогибах равных числовых равна 780 кг.

4. Высоты балки существенно влияют на величину площади поясов, но мало на общий вес конструкции.

Список литературы

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.: Гостехиздат, 1949.-784 с.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. - 636 с.
3. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. – М.: Высшая школа, 1973. - 384 с.
4. Воскресенский Д.И. и др. Антенны и устройства СВЧ. – М.: МАИ, 1999. - 528 с.

5. Дудченко А.А. Оптимальное проектирование элементов авиационных конструкций из композиционных материалов. – М.: МАИ, 2002.- 83 с.

6. Ендогур А.И. и др. Сотовые конструкции. Выбор параметров и проектирование. – М.: Машиностроение, 1986.- 200 с.

Сведения об авторах

Гуань Шивэй, доцент Пекинского авиационно-космического университета, аспирант кафедры строительной механики и прочности Московского авиационного института (государственного технического университета).

Телефон: 745-28-23-1022, E-mail:guanshiwei@msn.com.

Дудченко Александр Александрович, профессор кафедры строительной механики и прочности Московского авиационного института (государственного технического университета) , д.т.н.

Телефон: 1584277.

Ендогур Аскольд Иванович, профессор кафедры проектирования самолетов Московского авиационного института (государственного технического университета) , д.т.н.

Телефон: 1584865.