

УДК 629.7.05

Функциональные алгоритмы и уравнения ошибок определения параметров ориентации в инерциальных навигационных системах

Дмитроченко Л.А., Сачков Г.П.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e-mail: nio3@mai.ru

Аннотация

Предлагается подход к построению алгоритма ориентации бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), основанный на непосредственном вычислении углов курса, тангажа и крена летательного аппарата. Указывается, что применение параметров Родрига-Гамильтона с позиций определения углов ориентации особых преимуществ не дает в сравнении с определением их через матрицу ориентации. Отмечены качественные отличия построенного алгоритма от алгоритма с матрицей ориентации. Получены уравнения в вариациях, позволяющие описать ошибки БИНС в указанном круге задач. Приведены варианты записи уравнений применительно к движению по локсодромии и ортодромии. Отмечена возможность использования предложенных уравнений ошибок как для платформенных, так и для бесплатформенных ИНС.

Ключевые слова: алгоритм ориентации БИНС, уравнения ошибок ориентации БИНС.

Введение: постановка задачи

Одной из ключевых задач при создании бесплатформенных инерциальных навигационных систем, широко использующихся на борту всех типов авиационных

объектов, является разработка алгоритмов ориентации, обеспечивающих определение углов ориентации летательного аппарата (ЛА) с требуемой точностью при высокой скорости выдачи такой информации. В настоящее время разработано большое разнообразие таких алгоритмов, в основе которых лежат, как правило, подходы, связанные с использованием матричного аппарата, параметров Родрига-Гамильтона или вектора конечного поворота. Такие подходы обеспечивают решение задачи, но требуют проведения специальных преобразований для перехода от используемых алгоритмами параметров к необходимым для управления ЛА углам курса, крена и тангажа. В статье предлагается подход к построению бортовых алгоритмов ориентации ЛА, позволяющий непосредственно определять необходимые углы ориентации по измерениям его угловых скоростей.

1. Функциональные алгоритмы определения угловых параметров ориентации

Под термином угловые параметры ориентации будем понимать углы курса, тангажа и крена, характеризующие повороты связанного с объектом ортогонального трехгранника относительно базового, оси которого ориентированы по сторонам света и по линии вертикали.

Осям, связанного с объектом трехгранника, присвоим тройку ортов $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$, а осям горизонтного трехгранника орты: \bar{i} - направлен на Восток, \bar{j} - направлен на

Север и \bar{r} - орт линии вертикали (рис.1). В исходном положении имеют места равенства $\bar{i}_{c0} = \bar{j}_c; \bar{j}_{c0} = \bar{r}$ и $\bar{k}_{c0} = \bar{i}$.

Поворот базиса $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$ из исходного положения выполняется в следующей стандартной последовательности. Первый поворот вокруг оси с ортом \bar{r} на угол ψ по ходу часовой стрелки. При этом орты \bar{i}_{c0} и \bar{k}_{c0} займут положение \bar{i}_{c1} и \bar{k}_{c1} (на рис.1. показано пунктиром). Второй поворот на угол тангажа ϑ вокруг оси с ортом \bar{k}_{c1} , в результате которого орты \bar{i}_{c1} и \bar{j}_{c0} займут положение $\bar{i}_c, \bar{j}_{c1}, \bar{k}_{c1}$. Наконец поворот на угол крена γ происходит вокруг оси с ортом \bar{i}_c , после чего оси \bar{j}_{c1} и \bar{k}_{c1} займут положение $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$ и связанный трехгранник из своего исходного положения окажется повернутым на углы курса, тангажа и крена. Вектора $\bar{\psi}, \bar{\nu}$ и $\bar{\gamma}$, характеризующие скорости изменения углов курса, тангажа и крена, представляются в виде:

$$\bar{\psi} = -\bar{r}\dot{\psi}, \bar{\nu} = \bar{k}_{c1}\dot{\nu} \text{ и } \bar{\gamma} = \bar{i}_c\dot{\gamma}$$

В базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ орты \bar{k}_{c1} и \bar{i}_c , используя рис.1., выразим так:

$$\bar{k}_{c1} = \bar{i}\cos\psi - \bar{j}\sin\psi$$

$$\bar{i}_c = \bar{i}\sin\psi\cos\nu + \bar{j}\cos\psi\cos\nu + \bar{r}\sin\nu$$

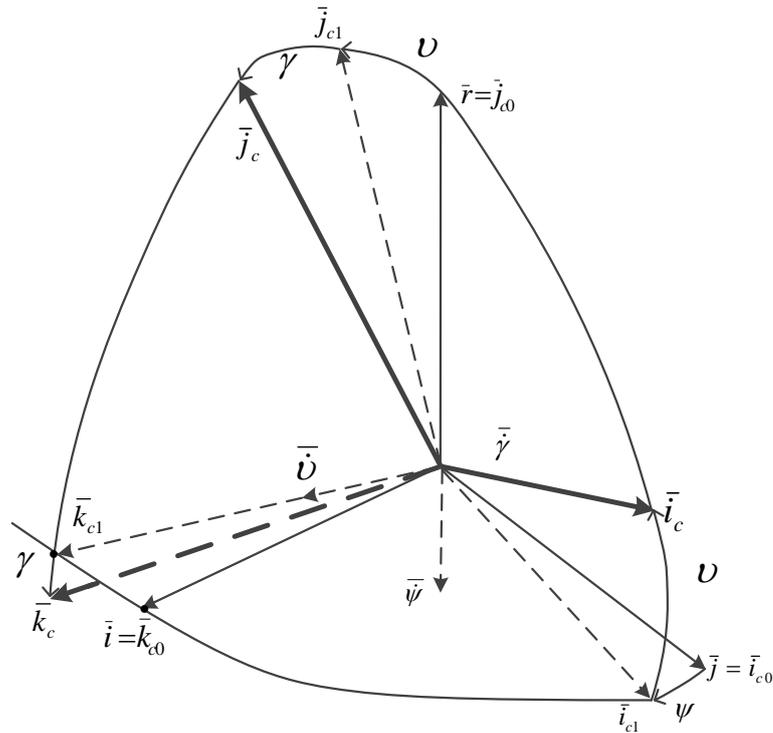


Рис.1.

Теперь сумму векторов $\bar{\psi}$, \bar{v} и $\bar{\gamma}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi + v + \gamma &= \bar{i}(\dot{v}\cos\psi + \dot{\gamma}\sin\psi\cos v) + \bar{j}(-v\sin\psi + \gamma\cos\psi) \\ \bar{\psi} + \bar{v} + \bar{\gamma} &= \bar{i}(\dot{v}\cos\psi + \dot{\gamma}\sin\psi\cos v) + \bar{j}(-\dot{v}\sin\psi + \dot{\gamma}\cos\psi\cos v) + \bar{r}(-\dot{\psi} + \dot{\gamma}\sin v) \quad (1) \end{aligned}$$

Матрицу направляющих косинусов между базисами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{r}$ и $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$ обозначим

как $[C_{ij}]$. Через углы $\bar{\psi}, \bar{v}$ и $\bar{\gamma}$ элементы этой матрицы представляются так:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \sin\psi\cos v & \cos\psi\sin\gamma - \sin\psi\cos\gamma & \cos\psi\cos\gamma + \sin\psi\sin v\sin\gamma \\ \cos\psi\cos v & -\sin\psi\sin\gamma - \cos\psi\sin v\cos\gamma & -\sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin v\sin\gamma \\ \sin v & \cos v\cos\gamma & -\cos v\sin\gamma \end{bmatrix} \quad (2)$$

При реализации в бортовом компьютере (БК) функционального алгоритма определения навигационных параметров матрица $[C_{ij}]$ определяется путем решения дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d[C_{ij}]}{dt} = [\Omega_r][C_{ij}] - [C_{ij}][\Omega_c] \quad (3)$$

В уравнении (3):

$$[\Omega_r] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Omega_c] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

где $\Omega_{x,y,z}$ - проекции вектора $\bar{\Omega}_r$ абсолютной угловой скорости горизонтного трехгранника $\bar{i}, \bar{j}, \bar{r}$ на его оси;

$\Omega_{1,2,3}$ - проекции вектора $\bar{\Omega}_c$ абсолютной угловой скорости связанного трехгранника $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$ на его оси.

Уравнение (3) решается при задании (определении) начального условия $[C_{ij}]$.

При этом информация о величинах $\Omega_{1,2,3}$ поступает в БК с блока гироскопов, а значения величин $\Omega_{x,y,z}$ вырабатываются в БК в ходе реализации алгоритма определения навигационных параметров.

В свою очередь, последний может быть реализован, если предварительно осуществляется операция вида:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = [C_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

где $n_{1,2,3}$ - проекции вектора кажущегося ускорения \bar{n} на оси базиса связанного с объектом (информация об этих величинах поступает в БК с блока акселерометров); $n_{x,y,z}$ - проекции вектора \bar{n} на оси горизонтного базиса.

Если элементы матрицы $[C_{ij}]$ определены путем решения уравнения (3), то углы ψ, ν и γ вычисляются так:

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{arctg} \left(\frac{C_{11}}{C_{12}} \right) \\ \nu &= \operatorname{arctg} \frac{C_{31}}{(C_{11}^2 + C_{21}^2)^{1/2}} \\ \gamma &= -\operatorname{arctg} \frac{C_{33}}{C_{32}} \end{aligned}$$

Заметим, что матрицу $[C_{ij}]$ (матрица ориентации) необходимо вычислять не только для последующего определения по ее элементам углов ψ, ν и γ , но и, прежде всего, для преобразования сигналов, полученных с блоков акселерометров БИНС, к такому виду, при котором они могут трактоваться как несущие информацию о проекциях вектора \bar{n} на оси того базиса, в котором в БК представлен алгоритм определения навигационных параметров.

В научно-технической литературе рассматриваются еще и алгоритмы определения параметров ориентации, основанные на использовании параметров Родрига-Гамильтона (кватернионов). Эти алгоритмы отличаются от рассмотренного только организацией процесса вычисления матрицы ориентации $[C_{ij}]$. Последняя

вычисляется через матрицы направляющих косинусов между базисом связанным с объектом и опорным, неизменно ориентированным базисом, с ортами $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\zeta} \end{bmatrix} = [A_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{i}_c \\ \bar{j}_c \\ \bar{k}_c \end{bmatrix}$$

А так же горизонтным базисом и тем же опорным:

$$\begin{bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \\ \bar{\zeta} \end{bmatrix} = [B_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{r} \end{bmatrix}$$

Матрица $[C_{ij}]$ определяется так:

$$[C_{ij}] = [B_{ij}]^T \cdot [A_{ij}]$$

В свою очередь для определения матриц $[A_{ij}]$ и $[B_{ij}]$ используются линейные системы дифференциальных уравнений, каждая из которых имеет четвертый порядок, а искомыми переменными в них являются элементы соответствующих кватернионов. Углы ψ, ν и γ по прежнему определяются через элементы матрицы $[C_{ij}]$

По нашему мнению, никаких особых преимуществ, с позиций определения углов ориентации, применение параметров Родрига-Гамильтона по сравнению с определением их через матрицу ориентацию, используя уравнение (3), не дает.

Матрицы $[A_{ij}]$ и $[B_{ij}]$ могут быть так же определены путем решения, одинаковых по своему типу, систем дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{d[A_{ij}]}{dt} &= [A_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{d[B_{ij}]}{dt} &= [B_{ij}] \cdot \begin{bmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Относительно этих уравнений сделаем следующие замечание. В [1] уравнения этого вида именуется уравнениями Пуассона. При этом сделана ссылка на [2]. Уравнения этого типа представлены в учебниках по теоритической механике [3], в монографии [4], в справочнике [5] и в других источниках, где они уравнениями Пуассона не названы. Отметим, что и в [2] термин уравнение Пуассона применим к динамическому уравнению, описывающему вращение твердого тела относительно неподвижной точки.

В рассматриваемых уравнениях искомыми переменными являются элементы матрицы направляющих косинусов. Последний термин специфичен для векторного исчисления.

В [6] отмечается, что «основы векторного исчисления были построены в середине XIX века ирландским математиком и астрономом Гамильтоном (1809-1865) и немецким математиком Гроссманом (1809-1877)», которые различными путями пришли к открытию векторных операций. Новые идеи не сразу получили распространение и признание.

Прежде всего, недостаточно ясна была их практическая ценность. И далее «непосредственным толчком для распространения и интенсивного развития

векторного исчисления было построение Максвеллом (1831-1879) теории электромагнитного поля (1873)».

Французский физик и математик Симеон Дени Пуассон жил и работал с 1781 по 1840 г.

Таким образом, правомерность именовать эти уравнения уравнениями Пуассона, как это имеет место в [1], вызывает сомнения.

Представляет определенный интерес построение такого алгоритма определения этих углов, который позволял бы их определять непосредственно, а не через другие параметры ориентации.

Покажем далее, как такой алгоритм может быть построен.

Вектор абсолютной угловой скорости $\bar{\Omega}_c$, с которым вращается связанный с объектом базис $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$, представим так:

$$\bar{\Omega}_c = \bar{\Omega}_r + \bar{\psi} + \bar{\upsilon} + \bar{\gamma} \quad (6)$$

В (6) вектор $\bar{\Omega}_c$ запишем в виде:

$$\bar{\Omega}_c = \bar{i}_c \Omega_1 + \bar{j}_c \Omega_2 + \bar{k}_c \Omega_3 \quad (7)$$

где $\Omega_{1,2,3}$ - проекции вектора абсолютной угловой скорости базиса объекта на его оси,

$\bar{\Omega}_r$ - абсолютная угловая скорость вращения горизонтного базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{r}$.

В осях этого базиса вектор $\bar{\Omega}_r$ представляется так:

$$\bar{\Omega}_r = \bar{i} \Omega_x + \bar{j} \Omega_y + \bar{r} \Omega_z$$

Причем:

$$\begin{aligned}\Omega_x &= -\dot{\varphi} \\ \Omega_y &= (u + \dot{\lambda})\cos\varphi \\ \Omega_z &= (u + \dot{\lambda})\sin\varphi\end{aligned}\quad (8)$$

где u - угловая скорость вращения Земли;

$\dot{\varphi}$ - угловая скорость изменения широты точки места объекта;

$\dot{\lambda}$ - угловая скорость изменения долготы точки места объекта.

$\bar{\psi}$ - вектор угловой скорости, с которой изменяется угол курса ψ :

$$\bar{\psi} = -\bar{r}\dot{\psi} \quad (9)$$

Знак в (9) учитывает то, что угол курса отсчитывается по ходу часовой стрелки.

Вектор угловой скорости изменения угла тангажа $\bar{\nu}$ определяется так:

$$\bar{\nu} = \bar{i}\dot{\nu}\cos\psi - \bar{j}\dot{\nu}\sin\psi \quad (10)$$

Наконец вектор $\bar{\gamma}$, определяющий угловую скорость изменения угла крена в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{r}$ записывается так:

$$\bar{\gamma} = \bar{i}\dot{\gamma}\sin\psi\cos\nu + \bar{j}\dot{\gamma}\cos\psi\cos\nu + \bar{r}\dot{\gamma}\sin\nu \quad (11)$$

Теперь учитывая выражения (7)-(11), векторное равенство (6) представим в виде:

$$\begin{aligned}\bar{i}(\dot{\nu}\cos\psi + \dot{\gamma}\sin\psi\cos\nu) + \bar{j}(-\dot{\nu}\sin\psi + \dot{\gamma}\cos\psi\cos\nu) + \bar{r}(-\dot{\psi} + \dot{\gamma}\sin\nu) = \\ = \bar{i}_c\Omega_1 + \bar{j}_c\Omega_2 + \bar{k}_c\Omega_3 + \bar{i}\dot{\varphi} - \bar{j}(u + \dot{\lambda})\cos\varphi - \bar{r}(u + \dot{\lambda})\sin\varphi\end{aligned}\quad (12)$$

Скалярно умножая левую и правые части этого векторного равенства последовательно на $\bar{i}, \bar{j}, \bar{r}$, получаем:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \cos \nu \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \cos \nu \\ -1 & 0 & \sin \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{i} \cdot \bar{\Omega}_c + \dot{\phi} \\ \bar{j} \cdot \bar{\Omega}_c - (u + \dot{\lambda}) \\ \bar{r} \cdot \bar{\Omega}_c - (u + \dot{\lambda}) \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (13)$$

Обозначим квадратную матрицу в левой части выражения (13) через $[M_{ij}]$.

Обратная ей матрица $[M_{ij}]^{-1}$ имеет вид:

$$[M_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} \sin \psi \cdot \operatorname{tg} \nu & \cos \psi \cdot \operatorname{tg} \nu & -1 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \frac{\sin \psi}{\cos \nu} & \frac{\cos \psi}{\cos \nu} & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Учитывая, что $[\bar{i} \cdot \bar{\Omega}_c \quad \bar{j} \cdot \bar{\Omega}_c \quad \bar{r} \cdot \bar{\Omega}_c]^T = [C_{ij}] \cdot [\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3]^T$ и приняв во внимание, что матрица $[C_{ij}]$ имеет вид (2), а так же умножая (13) слева на матрицу $[M_{ij}]^{-1}$ приходим к следующему результату:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi \\ \nu \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\cos \gamma}{\cos \nu} & \frac{\sin \gamma}{\cos \nu} \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \\ 1 & -\operatorname{tg} \nu \cos \gamma & \operatorname{tg} \nu \sin \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin \psi \operatorname{tg} \nu & \cos \psi \operatorname{tg} \nu & -1 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \frac{\sin \psi}{\cos \nu} & \frac{\cos \psi}{\cos \nu} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ -(u + \dot{\lambda}) \cos \varphi \\ -(u + \dot{\lambda}) \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (15)$$

Последнее выражение (15) является нелинейным дифференциальным однородным уравнением, в котором искомыми переменными выступают углы ориентации ψ, ν и γ . Если полагать, что вращательное движение базиса $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$ рассматривается относительно неизменно ориентированного базиса ($u = \dot{\phi} = \dot{\lambda} = 0$), то (15) будет соответствовать рассматриваемому в курсах и монографиях по теоретической механике, кинематическому уравнению Эйлера.

В развернутой форме уравнение (15) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= -\Omega_2 \frac{\cos \gamma}{\cos \nu} + \Omega_3 \frac{\sin \gamma}{\cos \nu} + \dot{\varphi} \sin \psi \operatorname{tg} \nu + (u + \dot{\lambda})(\sin \varphi - \cos \varphi \cos \psi \operatorname{tg} \nu) \\
\dot{\nu} &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma + \dot{\varphi} \cos \psi + (u + \dot{\lambda}) \cos \varphi \sin \psi \\
\dot{\gamma} &= \Omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \nu \cos \gamma + \Omega_3 \operatorname{tg} \nu \sin \gamma + \dot{\varphi} \frac{\sin \psi}{\cos \nu} - (u + \dot{\lambda}) \cos \varphi \frac{\cos \psi}{\cos \nu}
\end{aligned} \tag{16}$$

Можно видеть, что уравнения (16) образуют совокупную систему. Если же принято, что $u = \dot{\varphi} = \dot{\lambda} = 0$, то совокупную систему образуют уравнения $\dot{\nu} = \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma$ и $\dot{\gamma} = \Omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \nu \cos \gamma + \Omega_3 \operatorname{tg} \nu \sin \gamma$, а уравнение $\dot{\psi} = -\Omega_2 \frac{\cos \gamma}{\cos \nu} + \Omega_3 \frac{\sin \gamma}{\cos \nu}$ от них отделяется и его решение может быть получено интегрированием, если найдены решения $\nu(t)$ и $\gamma(t)$.

Решения систем уравнений (15) либо (16) могут быть получены в БК при соблюдении следующих условий:

- информация о величинах $\Omega_{1,2,3}$ поступает в компьютер от соответствующих измерителей;
- значения величин $\dot{\varphi}, \varphi, \dot{\lambda}$ определяются компьютером в процессе реализации алгоритма определения навигационных параметров;
- начальные значения величин ψ, ν, γ либо заданы, либо определяются тем или иным способом (например, в процессе начальной выставки системы).

Если информация о величинах $\dot{\varphi}, \varphi$ и $\dot{\lambda}$ вырабатывается в БК в процессе реализации алгоритма навигационных параметров, то, в свою очередь, этот алгоритм может быть реализован, если используется информация о проекциях вектора \vec{n} на оси горизонтного базиса. Иными словами в БК должна выполняться

операция, определяемая выражением (4). Для чего необходимо вычислять матрицу $[C_{ij}]$, элементы которой определяются по [2]. При этом используются величины ψ, ν и γ , определенные из уравнений (15), либо (16).

Таким образом, алгоритмы определения навигационных параметров и параметров ориентации, как и в предыдущем случае определения матрицы $[C_{ij}]$, оказываются связанными. Заметим, что эта связь будет отсутствовать, если информация о величинах $\dot{\varphi}, \varphi, \dot{\lambda}$ поступает в БК от систем, определяющих эти величины независимо от БИНС, например, от спутниковой навигационной системы (СНС). В этом случае будет иметь место канал определения углов ориентации, функционирующий независимо от соответствующего канала БИНС. Фактически это будет система, которую можно именовать гироспутниковой курсовертикалью (ГСКВ).

Отметим качественные отличия рассматриваемого алгоритма определения параметров ориентации от алгоритма определения их через элементы матрицы ориентации.

Очевидно, что снижение порядка системы дифференциальных уравнений с девятого до третьего можно отнести к положительным качествам. Матрица направляющих косинусов $[C_{ij}]$, элементы которой определяются через предварительно вычисленные углы ψ, ν и γ , может рассматриваться как ортогональная.

Поскольку ошибки масштаба и ошибки ортогональности имеющие место при равенствах:

$$C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2 = C_{21}^2 + C_{22}^2 + C_{23}^2 = C_{31}^2 + C_{32}^2 + C_{33}^2 = 1$$

$$C_{11}^2 C_{21}^2 + C_{12}^2 C_{22}^2 + C_{13}^2 C_{23}^2 = C_{11}^2 C_{31}^2 + C_{12}^2 C_{32}^2 + C_{13}^2 C_{33}^2 = C_{21}^2 C_{31}^2 + C_{22}^2 C_{32}^2 + C_{23}^2 C_{33}^2 = 0$$

будут зависеть от точности вычисления в БК синусов и косинусов углов ориентации, то эти функции могут быть определены в БК с точностью, позволяющей считать эту группу ошибок, с технической позиции, малыми величинами.

Если же матрица $[C_{ij}]$ определяется путем интегрирования системы уравнений (3), то ошибки масштаба и неортогональности зависят от численного метода, используемого в БК при решении этой системы.

Отметим еще одну особенность рассматриваемого алгоритма, налагающую ограничения на его применение. В правых частях систем уравнений (14) и (15)

присутствуют функции угла ν , $tg \nu$ и $sc \nu = \frac{1}{\cos \nu}$. В авиации приняты пределы

изменений угла $\nu \pm 90^\circ$. Очевидно, что при $\nu \rightarrow \frac{\pi}{2}$ эти функции не могут быть

вычислены в БК. Однако для большинства авиационных объектов и, прежде всего,

для самолетов гражданской авиации углы тангажа ограничены и не превышают $\frac{\pi}{4}$.

Еще меньшие значения эти углы (углы деферента) имеют место для всех типов морских судов.

Уравнения (15), (16) могут применяться при выполнении численных или полунатурных экспериментов, связанных с исследованием свойств функциональных

алгоритмов БИНС. Их использование несколько упрощает процесс создания программного обеспечения такого рода экспериментов.

2. Уравнения ошибок определения параметров ориентации

Функциональный алгоритм определения параметров ориентации представленный системами уравнений (15) либо (16) может быть, с требуемой точностью в БК, если будут выполнены следующие условия:

- начальные значения переменных $\bar{\psi}, \bar{\nu}$ и $\bar{\gamma}$ заданы точно;
- информация о величинах $\Omega_{1,2,3}$ поступает в БК без ошибок, присущих измерителям этих величин;
- так же без ошибок в БК поступает информация о величинах $\dot{\phi}, \dot{\lambda}, \phi, h$ и u ;
- собственные ошибки БК малы, и ими можно пренебречь. При современном уровне развития бортовой компьютерной техники это допущение вполне оправдано.

Остальные факторы приведут к тому, что на выходе БК будут получены значения углов ориентации отличающиеся от действительных на величины ошибок $\delta\psi$ - в определении курса и $\delta\nu, \delta\gamma$ в определении углов тангажа и крена.

Следовательно, значения вычисленных углов ориентации, полученные на выходе БК можно представить так:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \psi + \delta\psi \\ \nu_1 &= \nu + \delta\nu \\ \gamma_1 &= \gamma + \delta\gamma\end{aligned}\quad (17)$$

Для того чтобы, представлять как изменяются во времени величины $\delta\psi, \delta v, \delta\gamma$ и выполнять их численные оценки необходимо располагать математическими моделями, описывающими поведение этих ошибок. В теории ИНС эти модели принято именовать уравнениями ошибок систем в определении параметров ориентации [1].

Перейдем далее к построению этой математической модели для случая, когда функциональный алгоритм соответствует системе уравнений (16).

С этой целью, следуя установившейся в научно-технической литературе практикой, получим уравнения в вариациях от систем уравнений (16), либо (14). Для этого необходимо выполнить операции варьирования уравнений (15) по переменным в них входящим.

Запишем (15) в следующей символической форме:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= F_1(\psi, v, \gamma; \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3; \dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \varphi, u) \\ \dot{v} &= F_2(\psi, v, \gamma; \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3; \dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \varphi, u) \\ \dot{\gamma} &= F_3(\psi, v, \gamma; \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3; \dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \varphi, u)\end{aligned}\quad (18)$$

Уравнения в вариациях от (15) строятся следующим образом. Для примера представим в вариациях первое уравнение из (18):

$$\delta\dot{\psi} = \frac{\partial F_1}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial F_1}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \delta\gamma + \frac{\partial F_1}{\partial \Omega_1} \delta\Omega_1 + \frac{\partial F_1}{\partial \Omega_2} \delta\Omega_2 + \frac{\partial F_1}{\partial \Omega_3} \delta\Omega_3 + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{\varphi}} \delta\dot{\varphi} + \frac{\partial F_1}{\partial \dot{\lambda}} \delta\dot{\lambda} + \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} \delta\varphi$$

Аналогично представляются уравнения в вариациях для второго и третьего уравнений (18) опуская процедуру вычисления частных производных, приведем уравнения в вариациях в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\psi \\ \delta\nu \\ \delta\gamma \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\dot{\varphi} \cos \psi + (u + \dot{\lambda}) \cos \varphi \sin \psi] \cdot tg \nu \\ (u + \dot{\lambda}) \cos \varphi \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \\ [\dot{\varphi} \cos \psi + (u + \dot{\lambda}) \cos \varphi \sin \psi] \cdot sc \nu \\ (\Omega_2 \sin \nu \cos \gamma - \Omega_3 \sin \nu \sin \gamma + \dot{\varphi} \sin \psi) \cdot sc^2 \nu \\ 0 \\ [\Omega_3 \sin \gamma - \Omega_2 \cos \gamma - \dot{\varphi} \sin \psi tg \nu + (u + \dot{\lambda}) \cos \varphi \cos \psi tg \nu] \cdot sc \nu \\ (\Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma) sc \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\psi \\ \delta\nu \\ \delta\gamma \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma \\ (\Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma) tg \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\psi \\ \delta\nu \\ \delta\gamma \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & -\cos \gamma \sin \nu & \sin \gamma sc \nu \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \\ 1 & -tg \nu \cos \gamma & tg \nu \sin \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\Omega_1 \\ \delta\Omega_2 \\ \delta\Omega_3 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \sin \psi tg \nu & \sin \varphi - \cos \varphi \cos \psi tg \nu & (u + \dot{\lambda}) \cos \varphi \\ \cos \psi & \cos \varphi \sin \psi & (u + \dot{\lambda}) \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi sc \nu & -\cos \varphi \cos \psi sc \nu & -(u + \dot{\lambda}) \sin \varphi \cos \psi sc \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\dot{\varphi} \\ \delta\dot{\lambda} \\ \delta\dot{\varphi} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

С математической позиций выражение (19) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений, в которых искомыми переменными являются величины $\delta\psi, \delta\nu, \delta\gamma$, трактуемые как ошибки в определении углов курса, тангажа и крена. Матрица размерности 3×3 , стоящая множителем при матрице столбце $[\delta\psi \ \delta\nu \ \delta\gamma]^T$ является матрицей коэффициентов этого уравнения. Можно видеть, что элементы этой матрицы, достаточно сложным образом, зависят от того, как изменяются во времени углы ψ, ν, γ , а так же от того по какой траектории движется объект. От характера этого движения зависят величины $\dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \dot{\varphi}$.

Величины $\delta\Omega_1, \delta\Omega_2, \delta\Omega_3$ трактуются как характеризующие ошибки в определении проекции вектора $\overline{\Omega}_C$ на оси связанного с объектом базиса. Поскольку информация о величинах $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ поступает в БК от измерителей угловой скорости, то $\delta\Omega_1, \delta\Omega_2, \delta\Omega_3$ определяют ошибки этих измерителей. Наконец величины

$\delta\dot{\varphi}, \delta\dot{\lambda}, \delta\varphi$ трактуются как ошибки в определении угловых скоростей $\dot{\varphi}$ и $\dot{\lambda}$, и координаты φ , имеющие место в БИНС при реализации в БК функционального алгоритма определения навигационных параметров. Если же при реализации в БК алгоритма определения параметров ориентации используется информация о $\dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \varphi$ от источника, функционирующего независимо от БИНС, то величины $\delta\dot{\varphi}, \delta\dot{\lambda}, \delta\varphi$ следует рассматривать как ошибки этого источника.

Если полагать, что $\delta\Omega_{1,2,3} = 0$ и $\delta\dot{\varphi} = \delta\dot{\lambda} = 0$, а так же $\delta\varphi = 0$, то (19) обращается в однородное дифференциальное уравнение, не тривиальные решения которого существуют лишь тогда, когда имеют место величины $\delta\psi_0, \delta\nu_0, \delta\gamma_0$ не равные нулю. Иными словами имеют место ошибки в задании начальных условий по переменным ψ, ν, γ при реализации функционального алгоритма определения параметров ориентации в БК.

Таким образом, применение системы уравнений (19) с целью нахождения ошибок БИНС позволяет решать следующий круг задач. Определять ошибки БИНС, вызванные не точным заданием начальных условий, наличием величин $\delta\psi_0, \delta\nu_0, \delta\gamma_0$. Последние при этом должны быть заданы своими математическими моделями. Оценивать ошибки БИНС в определении параметров ориентации вызванные ошибками гироскопов. При этом величины $\delta\Omega_1, \delta\Omega_2, \delta\Omega_3$ задаются математическими моделями. Оценивать ошибки БИНС, в определении тех же параметров, вызванные ошибками $\delta\dot{\varphi}, \delta\dot{\lambda}, \delta\varphi$ имеющими место при реализации в БК функционального

алгоритма определения навигационных параметров. Эта задача может быть решена, если для ее решения привлечь систему уравнений ошибок определения навигационных параметров, путем решения которой и определяются величины $\delta\dot{\varphi}, \delta\dot{\lambda}, \delta\dot{\varphi}$. Если же при решении в БК системы уравнений (18) используется информация о $\dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \dot{\varphi}$, поступающая от внешних, по отношению к БИНС, источников то $\delta\dot{\varphi}, \delta\dot{\lambda}, \delta\dot{\varphi}$ следует представлять математическими моделями ошибок этих источников информации.

Элементы матриц размерности 3×3 , стоящих множителями при соответствующих матрицах столбцах в первой части системы уравнений (19), зависят как от параметров ориентации, которые характеризуют вращательное движение объекта, так и от навигационных параметров $\dot{\varphi}, \dot{\lambda}$.

При использовании уравнений (19) эти величины должны быть заданы. В общем случае движения объекта эти параметры являются функциями аргумента t (времени). Таким образом, система (19) относится к классу линейных неоднородных систем с переменными коэффициентами. Факт необходимости задания параметров ориентации и навигации приводит к тому, что ошибки ИНС будут определены применительно к некоторой «опорной» траектории и «опорному» вращательному движению. Отметим еще, что если в (19) полагать $\delta\Omega_{1,2,3} = 0$ и $\delta\dot{\varphi} = \delta\dot{\varphi} = \delta\dot{\lambda} = 0$, иными словами полагать эту систему уравнений однородной, то при этом задача определения ошибок ориентации, вызванных ошибками в задании начальных

условий, по своей постановке будет совпадать с классической задачей устойчивости «опорного» вращательного движения объекта.

Значения величин ψ, ν, γ соответствующих «опорному» движению определяются путем решения системы уравнений (15) либо (16). При этом должны быть, тем или иным путем, определены (заданы) величины $\Omega_{1,2,3}, \dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \varphi$, а так же начальные значения углов курса ψ_0 , тангажа ν_0 и крена γ_0 . Для получения значений $\dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \varphi$ соответствующих «опорному» движению, следует назначать линию пути объекта и путевую скорость движения по ней. В качестве таких линий могут рассматриваться локсодромия и ортодромия.

Применительно к локсодромии:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{U}{R} \cos A_{\text{л}} \\ \dot{\lambda} &= \frac{U \sin A_{\text{л}}}{R \cos \varphi} \end{aligned} \quad (20)$$

где U – модуль вектора путевой скорости движения объекта по локсодромии;

$A_{\text{л}}$ – угол азимута локсодромии.

Последний определяется так:

$$\text{tg} A_{\text{л}} = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\ln \left[\frac{\cos \varphi_A (1 + \sin \varphi_B)}{\cos \varphi_B (1 + \sin \varphi_A)} \right]}$$

где $\varphi_{A,B}$ и $\lambda_{A,B}$ - углы широты и долготы начальной A и конечной B точек локсодромии.

Для ортодромии:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{U}{R} \cos A_{op} \\ \dot{\lambda} &= \frac{U \sin A_{op}}{R \cos \varphi} \\ \dot{A}_{op} &= \frac{U}{R} \sin A_{op} \operatorname{tg} \varphi\end{aligned}\quad (21)$$

В (21) величины U, R – должны быть заданы.

Так же задаются начальные значения углов широты φ_A и долготы λ_A , а начальные значения угла азимута ортодромии A_{op} определяются так:

$$A_A = \arcsin \left[\frac{1}{\sin s} \cos \varphi_B \sin(\lambda_B - \lambda_A) \right]$$

где s – угол между геоцентрическими радиусами векторами начальной A и конечной B точками ортодромии;

$$\begin{aligned}\sin s &= \sqrt{1 - \cos^2 s} \\ \cos s &= \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A) + \sin \varphi_A \sin \varphi_B\end{aligned}$$

При использовании (20), (21) в качестве систем уравнений «опорных» линий пути следует принимать, что путевые углы равны углам азимута.

Кроме величин $\Omega_{x,y,z}$ при применении системы уравнений (19), с целью оценки ошибок определения параметров ориентации, должны быть известны (заданы) проекции вектора $\overline{\Omega}_C$ на связанные оси – величины $\Omega_{1,2,3}$.

Воспользовавшись (5), получаем:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} + [C_{ij}]^T \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \cos \nu \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \cos \nu \\ -1 & 0 & \sin \nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (22)$$

где $[C_{ij}]^T$ - транспонированная матрица $[C_{ij}]$.

Из (22) следует, что для задания величин $\Omega_{1,2,3}$ наряду с величинами $\Omega_{x,y,z}$ должны быть заданы (известны) $\dot{\psi}, \dot{\nu}, \dot{\gamma}$, что, в свою очередь, позволяет определить углы ψ, ν, γ , либо эти углы могут быть заданы своими моделями.

Таким образом, при использовании системы уравнений (19) для определения величин $\delta\psi, \delta\nu, \delta\gamma$ «опорное» вращательное движение должно быть определено как через параметры, характеризующие вращение базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, так и через параметры, характеризующие вращения связанного с объектом трехгранника относительно этого базиса. При выполнении численных экспериментов (расчетов) углы ψ, ν, γ обычно задаются своими математическими моделями. Наиболее часто используются представление этих моделей в виде гармонических функций, имеющих для каждого угла свою амплитуду и частоту. Наряду с гармоническими функциями модель может включать постоянную компоненту, либо компоненту, являющуюся функцией времени. Наличие последней в модели наиболее характерно для угла курса. Так, если в качестве «опорного» движения принято движение по ортодромии и угол курса равен углу азимута, то ψ может быть задан так:

$$\psi = A_{op} + \psi_1(t)$$

где A_{op} определяется из систем уравнений (21), а функция $\psi_1(t)$, определяющая угол «рыскания», задается своей моделью.

Система уравнений (19) может быть использована для оценки ошибок как платформенных, так и бесплатформенных ИНС.

При управляемой платформе величины $\delta\dot{\varphi}, \delta\dot{\lambda}$ и $\delta\varphi$ будут характеризовать «дрейф» платформы обусловленной как её собственным дрейфом, так и ошибками, в сигналах управления, возникающих, в свою очередь, при реализации алгоритма определения величин $\dot{\varphi}, \dot{\lambda}, \varphi$. Последние находятся путем решения уравнений ошибок определения навигационных параметров. Величины же $\delta\Omega_{1,2,3}$ в этом случае следует полагать равными нулю.

К полученным путем решения уравнений ошибок платформенной ИНС величинам $\delta v_x, \delta v_y, \delta v_z$ следует добавить величины $\Delta\psi, \Delta\nu, \Delta\gamma$, характеризующие ошибки датчиков углов, установленных на осях подвеса платформы. Их представляют соответствующими математическими моделями.

В случае БИНС используется полная система уравнений (19). При этом величины $\delta\Omega_{1,2,3}$ характеризующие «дрейфы» гироскопов задаются математическими моделями, а величины $\delta\dot{\varphi}, \delta\dot{\lambda}$ и $\delta\varphi$, находятся путем использования для этой цели, уравнений определения ошибок параметров навигации.

Таким образом, система уравнений (19) в случаях ИНС с управляемой платформой и БИНС, должна решаться в совокупности с уравнениями ошибок определения параметров навигации.

Список литературы

1. Андреев В.Д. Теория инерциальной навигации. Том 1. Автономные системы. — М.: Физматлит, 1966, 580 с.

2. Аппель П.Э. Теоретическая механика. Том 2. Динамика системы. Аналитическая механика. – М.: Физматлит, 1960, 490 с.
3. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Том 2. – М.: ГИТТЛ, 1955, 596 с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. - 824 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. 832 стр.
6. Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975. - 336 с.