УДК 531.8

Алгоритм калибровки авиационного гравиметра методом кратномасштабного анализа.

А.В. Федоров

Аннотация

Рассматривается решение задачи калибровки авиационного гравиметра в процессе съемок. Предлагается алгоритм калибровки гравиметра с помощью методов кратномасштабного анализа (КМА) на основе вейвлет-разложения. Приводятся численные результаты.

Ключевые слова

гравиметрия; аномалия силы тяжести; кратномасштабный анализ; вейвлет-преобразование

1. Введение.

Аномалией силы тяжести в свободном воздухе называется разность между истинной и нормальной удельной силой тяжести в пункте измерения. Карты аномалии силы тяжести применяются в геодезии, геофизике, геологии и геодинамике. Для построения этих карт используются данные наземной, морской, спутниковой и авиационной гравиметрии [1]. Авиационная гравиметрия предоставляет, как правило, менее высокую точность измерений, чем наземная или морская, но является наиболее эффективной, и зачастую единственно возможной методикой гравиметрической съемки на шельфах, в тропических лесах, в полярных и других труднодоступных районах.

В авиационной гравиметрии аномалия рассматривается в проекции на географическую вертикаль (внешнюю нормаль к референц-эллипсоиду): $\Delta g = g_з - g_0(\varphi, h)$ [2]. Здесь Δg — вертикальная составляющая аномалии силы тяжести в свободном воздухе (далее для краткости АСТ), $g_з$ — вертикальная составляющая силы тяжести, $g_0(\varphi, h)$ – нормальная составляющая удельной силы тяжести, φ — географическая широта, h — высота над референц-эллипсоидом. Нормальная составляющая силы тяжести обычно вычисляется по формуле Гельмерта [1].

Измерения на борту летательного аппарата (ЛА) проводятся с помощью гравиметра. В состав типичного авиационного гравиметра [3] входят: инерциальная навигационная система (ИНС) с горизонтируемой платформой; гравиметрический чувствительный элемент (ГЧЭ), ось чувствительности которого жестко связана с приборной вертикалью ИНС [4]; бортовой приемник спутниковой навигационной системы (СНС); наземные базовые приемники СНС, необходимые для реализации дифференциального режима съемки.

Качество съемок тем выше, чем точнее откалиброван гравиметр, т.е. определены его параметры: масштабные коэффициенты, перекосы и т.п. Обычно эти параметры определяются на стенде при калибровке прибора. Однако в ряде случаев требуется их уточнение. Процедуру уточнения называют докалибровкой. Весьма желательно, чтобы докалибровку можно было проводить, не прерывая процесса съемок.

Особенно важна точность калибровки при съемках в режиме облета рельефа, где полезный сигнал сильно коррелирован с инерциальной помехой. Для докалибровки и контроля точности при этом целесообразно проводить полеты по так называемым повторным галсам (ПГ) — прямолинейным участкам траекторий, проходимым в прямом или обратном направлении [2]. При этом для повышения точности целесообразно учитывать статистические свойства АСТ. В качестве метода обработки данных при докалибровке часто используется фильтр Калмана [2]. В данной работе рассматривается методика докалибровки по данным на повторных галсах, учитывающая статистические свойства АСТ, и основанная на методах кратномасштабного анализа [5].

2. Уравнения измерений.

Рассматривается гравиметр с горизонтируемой гироплатформой [3]. Пусть M — чувствительная масса (ЧМ) ГЧЭ и пусть $Mx_1x_2x_3$ — географическая система координат, оси которой ориентированы по сторонам света; $Mz_1z_2z_3$ — приборная система координат, которая связана с платформой гравиметра. Основным уравнением для определения АСТ на траектории полета ЛА является уравнение движения точки M в проекции на географическую вертикаль Mx_3:

$$\ddot{h} = f_3 + f_E - g_0 - \Delta g, \tag{1}$$

где h - высота ЧМ над референц-эллипсоидом; f_3 — вертикальная составляющая удельной силы $\mathbf{f}$, действующей на ЧМ; f_E – поправка Этвеша [6]. Задача аэрогравиметрии состоит в решении (1) относительно Δg с использованием измерений f_3' ГЧЭ, измерений f_1', f_2' акселерометров ИНС и измерений h' СНС. Уравнения измерений ГЧЭ можно записать (в линейном приближении по углам невыставки осей чувствительности) в виде

$$\begin{aligned} &\tau \dot{f}_3' + k_3 f_3' = f_{g_3} + \delta f_3 \\ &f_{g_3} = f_{z_3} - k_1 f_{z_2} + k_2 f_{z_1} \\ &f_{z_3} = f_3 - \alpha_1 f_{z_2} + \alpha_2 f_{z_1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь f_{g_3} – составляющая $\mathbf{f}$ в проекции на ось чувствительности ГЧЭ; δf_3 - погрешность ГЧЭ; $f_{z_1}, f_{z_2}, f_{z_3}$ — составляющие $\mathbf{f}$, направленные по осям $Mz_1z_2z_3$; α_1, α_2 — угловые ошибки горизонтирования платформы ИНС; k_1, k_2 — угловые ошибки установки ГЧЭ на платформе ИНС; k_3 — масштабный коэффициент ГЧЭ; τ — постоянная времени запаздывания ГЧЭ. Отметим, что запаздывание может быть как аппаратным (демпфер), так и цифровым (предварительное сглаживание или рассинхронизация данных) [2]. Ошибки α_1, α_2 оцениваются при коррекции ИНС по данным СНС [7]. Ошибки k_1, k_2 при коррекции ИНС не определяются. Они обычно постоянны в течение полета, но могут меняться от полета к полету вследствие старения материала, температурных процессов и т.д. [1].

Уравнения измерений горизонтальных акселерометров можно записать в виде

$$f_1' = f_{z_1} + \delta f_1, \qquad f_2' = f_{z_2} + \delta f_2, \tag{3}$$

где δf_1, δf_2 — погрешности акселерометров. Фазовые измерения СНС запишем в виде [8,9]:

$$h' = h + \delta h, \tag{4}$$

где δh — погрешность измерений СНС. Подставляя (3), (4) в (2), получим:

$$b(t) - c(t)X = -\Delta g(t) + \delta f(t). \tag{5}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
b(t) &= \ddot{h}' - f_E + g_0 - \left[\alpha_1 f_2' - \alpha_2 f_1'\right] \\
c(t) &= (\dot{f}_3', f_3', f_2', -f_1') \\
X &= (\tau, k_1, k_2, k_3)^T \\
\delta f(t) &= \delta\ddot{h} - \delta f_3 + (\alpha_1 + k_1)\,\delta f_2 - (\alpha_2 + k_2)\,\delta f_1.
\end{aligned}$$

Уравнение (5) является основой как определения АСТ, так и калибровки гравиметра. Компоненты k_1, k_2, k_3, τ вектора X будем называть параметрами гравиметра (иногда вводятся дополнительные параметры гравиметра, но этот случай для простоты не рассматривается). Выражение в левой части (5) является функцией этих параметров и измеряемых величин. Выражение в правой части – сумма неизвестной АСТ и суммарного шума измерений. Вектор X предполагается постоянным, априори неизвестным. Будем называть задачей калибровки задачу определения X из (5) по известным $b(t), c(t)$.

При решении задачи калибровки уравнения (5) рассматриваются на повторных галсах, которые выделяют из всего периода полета (полетов) несколько участков разной длительности.

Пусть измерения (5) проводятся на ПГ, в течение одного или нескольких полетов. Пусть $t \in [t_0^n, t_1^n]$, $n = 1,..,N$ — участки траекторий ЛА на ПГ, которые будем называть пролетами. Считая длину ПГ малой в сравнении с радиусом кривизны Земли, без ограничения общности можно предполагать, что рассматриваемый ПГ близок к прямолинейному, в том смысле что на всех пролетах траектории ЛА отклоняются от одной и той же прямолинейной траектории на расстояния, малые в сравнении с характерным размером L_* АСТ. Продольная скорость $V(t)$ близка к постоянной V_0 в том смысле, что для всех n и всех $t_0^n \le t \le t_1^n$

$$|\int_{t_0^n}^{t} (V^n(\tau) - V_0)d\tau| < L_*.$$

Обозначим длину дуги вдоль ПГ $\rho(t)$.

3. Соотношения калибровки в вейвлет-представлении.

Для совместного рассмотрения пролетов удобно использовать методы кратномасштабного анализа (КМА) на основе вейвлет-преобразования. Напомним основные формулы [10]. Вейвлет-разложением функции $f(t), t \in \mathbb{R}$ называется разложение в ряд:

$$f(t) = \sum_j f_j(t),\ f_j(t) = \sum_k d_{jk}[f]\tilde{\psi}_{jk}\left(\frac{t}{\Delta t}\right),\ d_{jk}[f] = \frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{jk}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)dt. \qquad (6)$$

Здесь Δt — шаг дискретизации данных, $\psi_{jk}(s) = 2^{j/2}\psi(2^j s - k)$, $\tilde{\psi}_{jk}(s) = 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j s - k)$, где $\psi(s)$ и $\tilde{\psi}(s)$ — соответственно материнский и двойственный вейвлеты, $d_{jk}[f]$ — коэффициенты вейвлет разложения (КВР). Будем рассматривать класс так называемых полуортогональных вейвлетов с компактным носителем, для которых функции $\psi_{jk}(s)$ ортогональны в смысле L^2 для разных j. Целое значение j называется параметром масштаба, или уровнем анализа, а целое значение k — параметром сдвига. Для класса полуортогональных вейвлетов пространства W_j всевозможных функций $f_j(t)$ в (6) ортогональны в $L^2(\mathbb{R})$ и имеет место разложение в прямую сумму $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus W_j$. Это разложение и составляет суть кратно-масштабного анализа — при увеличении j на единицу масштаб W_j увеличивается вдвое. Алгоритмической основой кратно-масштабного анализа являются алгоритмы быстрого вейвлет-разложения и вейвлет-восстановления Малла [10], во многом аналогичные алгоритмам быстрого прямого и обратного преобразования Фурье. Как и в анализе Фурье, типичная последовательность операций при обработке данных — разложение функции $f(t)$ по пространствам W_j, операции над $d_{jk}[f]$, и затем обратное преобразование.

Выполним вейвлет-разложение левой и правой части (5) на каждом полете, относящемся к рассматриваемому ПГ. Получим основное уравнение аэрогравиметрии в КВР в виде

$$d_{jk}[b] = d_{jk}[c]X - d_{jk}[\Delta g] + d_{jk}[\delta f]. \qquad (7)$$

Для фиксированных параметров масштаба и номера пролета ПГ j, n определим множество Λ_j^n следующим образом: $\Lambda_j^n = \{(k,n): \mathrm{supp}(\psi_{jk}(t/\Delta t)) \subset [t_0^n, t_1^n]\}$. Определим также множества

$$\Lambda^n = \bigcup_j \Lambda_j^n, \quad \Lambda_j = \bigcup_n \Lambda_j^n.$$

В дальнейшем будем рассматривать КВР фиксированного уровня анализа $j_{\min} \le j \le j_{\max}$, у которых $(k,n) \in \Lambda_j$. Задача калибровки ставится следующим образом: для фиксированного j по коэффициентам $d_{jk}[b]$, $d_{jk}[c]$ в (7) определить X.

4. Стохастическая модель измерений.

Для решения задачи калибровки необходимо принять дополнительные предположения о неизвестных процессах $\Delta g(t), \delta f(t)$. Следуя [2, 11], используем стохастический подход. В его основе предположения, что $\delta f(t)$ — стационарный, квадратично интегрируемый случайный процесс во времени с нулевым средним и с известной корреляционной функцией $E[\delta f(t)\delta f(t')] = K_{\delta f}(t-t')$, и что аномалия силы тяжести $\Delta g(x_1, x_2, h)$ — стационарное, плоско однородное случайное поле с известными стохастическими характеристиками.

В сделанных предположениях, учитывая прямолинейность траектории, на каждом пролете $[t_0^n, t_1^n]$ аномалия Δg, рассматриваемая как функция $\Delta g(\rho)$ продольной координаты ρ, есть реализация стационарного, квадратично интегрируемого случайного процесса с корреляционной функцией $E[\Delta g(\rho)\Delta g(\rho')] = K_{\Delta g}(\rho - \rho')$.

Стохастическую модель аномалии можно выбрать, исходя из геофизических предположений о распределении масс внутри Земли [1]. Также стохастическую модель можно интерпретировать как один из возможных способов регуляризации некорректной задачи [2]. Достоинством данного метода регуляризации является его наглядная физическая интерпретация. Для внутренней согласованности подхода в качестве модели аномалии на траектории в данной работе выбирается одномерная модель, согласованная с трехмерной моделью, которая затем используется при построении карты аномалий [2].

В сделанных предположениях КВР $\Delta g, \delta f$ — случайные величины с нулевым средним и коэффициентами корреляции

$$M[d_{jk}[\Delta g] d_{jk'}[\Delta g]] \quad \iint K_{\Delta g}(y - y')\psi\left(\frac{2^j}{\Delta t}\frac{y}{V_0} - k\right)\psi\left(\frac{2^j}{\Delta t}\frac{y'}{V_0} - k'\right) dy\, dy', \tag{8}$$

$$M\left[d_{jk}[\delta f] d_{jk'}[\delta f]\right] = \iint K_{\delta f}(t - t')\psi\left(\frac{2^j}{\Delta t}t - k\right)\psi\left(\frac{2^j}{\Delta t}t' - k'\right) dt\, dt'. \tag{9}$$

Поставим задачу калибровки как задачу оптимального стохастического оценивания – с учетом (7), (8), (9) найти линейную оценку X с минимальной дисперсией ошибки оценки. Поставленная задача сводится к взвешенной задаче МНК с корреляционной матрицей очень большой размерности и сложной структуры.

Ниже предлагается методика рекуррентного решения задачи с использованием фильтра Калмана. Для решения задачи строятся формирующие фильтры (ФФ) для КВР в несколько шагов.

- Упорядочение КВР вдоль траектории введением новой нумерации η.
- Построение стационарного по ρ формирующего фильтра для КВР АСТ.
- Построение нестационарного ФФ для КВР АСТ в упорядочении η.
- Построение модели для КВР шумов в упорядочении η.

5. Упорядочение КВР вдоль траектории.

Рассмотрим оператор вейвлет-преобразования $d_{jk}[.]$. Назовем центром оператора вейвлет-преобразования (ЦОВП) величину

$$C_{jk} = \rho\left(\frac{k\Delta t}{2^j}\right).$$

Введем отношение упорядочения в Λ_j: $(k',n') \circ (k,n)$, если $C_{jk'} \le C_{jk}$.

Пусть η — номер пары (k,n) в упорядоченном по отношению $\circ$ множестве Λ_j. Запишем пару под номером η в следующем виде: $(k(\eta), n(\eta))$. Тогда $\Lambda_j = \{k(\eta), n(\eta), \eta = 1,2,...,\eta_{\max}\}$. Для каждого $\eta' > \eta$ выполняется условие $C_{jk(\eta')} \ge C_{jk(\eta)}$. В дальнейшем будем обозначать $d_{jk(\eta)}[.]$ через $d_{j\eta}[.]$, а $C_{jk(\eta)}$ через $\rho(\eta)$. Будем рассматривать η как новую независимую переменную на повторном галсе. Основное уравнение аэрогравиметрии в КВР (7) после сортировки КВР примет следующий вид:

$$d_{j\eta}[b] = d_{j\eta}[c]X - d_{j\eta}[\Delta g] + d_{j\eta}[\delta f], \quad \eta = 1,2,...,\eta_{\max}. \tag{10}$$

6. Построение формирующего фильтра КВР аномалии.

Будем рассматривать $d_{j\eta}[\Delta g]$ как случайный процесс "во времени" η. Рассмотрим задачу построения модели для этого процесса. Этот процесс имеет нулевое среднее; учитывая (8), его корреляционная функция определена формулами

$$K_{\eta\eta'} = E\left[d_{j\eta}[\Delta g] d_{j\eta'}[\Delta g]\right] = E\left[d_{jk(\eta)}[\Delta g] d_{jk(\eta')}[\Delta g]\right], \qquad \eta, \eta' = 1,2,...,\eta_{\max}$$

В данном разделе строится случайный процесс $Z(\eta)$ с нулевым средним, являющийся выходом некоторого ФФ, и стохастически эквивалентный $d_{j\eta}[\Delta g]$ в том смысле, что

$$E[Z(\eta)Z(\eta')] = K_{\eta\eta'}, \qquad \eta, \eta' = 1, 2, \dots, \eta_{\max} \tag{11}$$

Задача решается в два этапа. На первом этапе рассматривается непрерывное вейвлет-разложение $\Delta g(\rho)$, проводится его равномерная дискретизация по ρ с малым шагом $\Delta\rho$, и строится стационарный ФФ для полученного стационарного случайного процесса. На втором этапе строится искомый ФФ как выборка стационарного ФФ.

На первом этапе построим стационарный ФФ для КВР. Рассмотрим непрерывное вейвлет-разложение $\Delta g(\rho)$, определенное формулой свертки

$$d_j[\Delta g](\rho) = \int \Delta g(y)\psi\left(\frac{2^j}{\Delta t}\frac{y}{V_0} - \frac{\rho}{V_0}\right)dy.$$

Эта функция удовлетворяет условию $d_j[\Delta g](\rho(\eta)) = d_{j\eta}[\Delta g]$ для всех $\eta = 1, \dots, \eta_{\max}$. Функцию $d_j[\Delta g](\rho)$ можно рассматривать как стационарный случайный процесс с нулевым средним и корреляционной функцией

$$K_{d[\Delta g]}(\rho - \rho') = \iint K_{\overline{\Delta g}}(y - y')\psi\left(\frac{2^j}{\Delta t}\frac{y}{V_0} - \frac{\rho}{V_0}\right)\psi\left(\frac{2^j}{\Delta t}\frac{y'}{V_0} - \frac{\rho'}{V_0}\right)dy\,dy'.$$

График $K_{d[\Delta g]}$ для полуортогональных сплайн-вейвлетов приведен на Рис. 1.

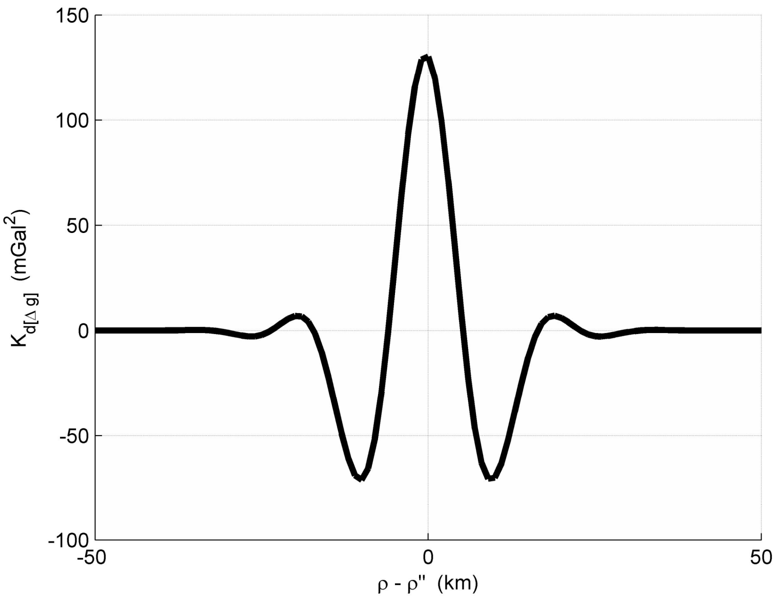

Рис 1. Корреляционная функция КВР аномалии для полуортогональных сплайн-вейвлетов и уровня анализа $j = 5$.

Введем шаг $\Delta\rho$ дискретизации по ρ, который достаточно мал в сравнении с размерами носителя вейвлета и характерным размером АСТ. Проведем разбиение повторного галса: $\rho_i = i\Delta\rho + \rho^0,\ i = 1, \dots, i_{max}$. Последовательность $d[\Delta g](\rho_i)$ можно рассматривать как стационарный случайный процесс в дискретном времени i с нулевым средним и корреляционной функцией $E\left[d_j[\Delta g](\rho_i)d_j[\Delta g](\rho_{i'})\right] = K_{d[\Delta g]}(\rho_i - \rho_{i'})$. Формирующий фильтр, определяющий случайный процесс $z(i)$, стохастически эквивалентный $d_j[\Delta g](\rho_i)$, ищется в виде линейной динамической модели в дискретном времени в пространстве состояний. ФФ строится по корреляционным данным [12], с использованием алгоритма Хо-Калмана [12]. Он имеет вид:

$$
\begin{aligned}
y(i+1) &= Ay(i) + Be(i) \\
z(i) &= Hy(i) + e(i), \quad i = 1,2,\dots,i_{\max}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где $e(i)$ — белый шум с корреляционной функцией $E[e(i)e^T(j)] = \sigma_e^2\delta_{ij}$. Из условия стационарности случайного процесса $y(i)$, начальные условия $y(1)$ для (12) в момент времени $i=1$ — случайная величина с нулевым средним и ковариационной матрицей $E[y(1)y(1)^T] = P_\infty$, где P_∞ — матрица дисперсии стационарного случайного процесса (12), определяемая соотношением Ляпунова:

$$
P_\infty = AP_\infty A^T + BB^T\sigma_e^2. \tag{13}
$$

На втором этапе построим нестационарный ФФ для КВР в дискретном упорядочении η. Рассмотрим координаты ЦОВП $\rho(\eta), 1 \le \eta \le \eta_{\max}$. Выберем значение ρ_i, ближайшее к ним:

$$
i_\eta = \underset{1 \le i \le i_{\max}}{\operatorname{argmin}} |\,\rho(\eta) - \rho_i\,|.
$$

Рассмотрим выборку процессов $y(i), z(i)$: $Y(\eta) = y(i_\eta)$, $Z(\eta) = z(i_\eta)$. С учетом (12), (13) $Y(\eta)$, $Z(\eta)$ описываются формирующим фильтром

$$
\begin{aligned}
Y(\eta+1) &= F(\eta)Y(\eta) + \xi(\eta) \\
Z(\eta) &= H(\eta)Y(\eta) + e(\eta).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Матрицы в (14) определены формулами $F(\eta) = A^{i_\eta - i_{\eta-1}}$, $H(\eta) = H$. Ковариационные матрицы шумов $e(\eta), \xi(\eta)$ имеют вид:

$$
E\left[\begin{pmatrix} \xi(\eta) \\ e(\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^T(\eta) & e^T(\eta) \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} A^{i_\eta - i_{\eta-1} - 1}B(\eta)B^T(\eta)\left(A^{i_\eta - i_{\eta-1} - 1}\right)^T & A^{i_\eta - i_{\eta-1} - 1}B \\ B^T\left(A^{i_\eta - i_{\eta-1} - 1}\right)^T & 1 \end{pmatrix}\sigma_e^2. \tag{15}
$$

Начальные условия для (14) – случайная величина $Y(1)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $E[Y(1)Y(1)^T] = P_\infty$.

Соотношения (14) полностью определяют ФФ для процесса $Z(\eta)$, стохастически эквивалентного процессу $d_{j\eta}[\Delta g]$.

7. Построение модели КВР шумов.

Нас интересуют уровни анализа, на которых радиус корреляции шума измерений $\delta f(t)$ можно считать малым в сравнении с длиной носителя $\psi_{jk}(t/\Delta t)$. Поэтому при вычислении корреляции КВР в (9) случайный процесс $\delta f(t)$ можно считать белым шумом: $E\left[\delta f(t)\delta f(t')\right] \approx \sigma_{\delta f}^2 \delta(t-t')$, так что на уровне анализа j:

$$E\left[d_{jk}[\delta f] d_{jk'}[\delta f]\right] \approx \sigma_{\delta f}^2 r_{kk'}, \qquad r_{kk'} = \int \psi_{jk}(s)\psi_{jk'}(s)\, ds$$

Введенные коэффициенты $r_{kk'}$ могут быть вычислены через дискретное вейвлет-преобразование массива коэффициентов фильтра вейвлета [10]. Для ортогональных вейвлетов $r_{kk'} = 0$ при $k \neq k'$ [10]; для полуортогональных сплайн-вейвлетов соответствующие величины малы. Поэтому матрица ковариации R, составленная из элементов $\sigma_{\delta f}^2 r_{kk'}$, является почти диагональной, в том смысле что значение любого внедиагонального элемента по модулю много меньше значения диагональных элементов. Введем в рассмотрение модель белого шума $q_j(k)$ с дисперсией $\sigma_q^2 = r_{kk'}(1+\varepsilon^2)$, $\varepsilon^2 \ll 1$ такой, что справедливо матричное неравенство $R \leq \sigma_q^2 I$, и будем использовать эту модель вместо точной модели $d_{jk}[\delta f]$ при построении оптимального алгоритма оценивания. Очевидно, при этом модельная дисперсия ошибки оценки, определенная из ковариационных соотношений оптимального алгоритма, будет мажорировать реальную дисперсию ошибки оценки, и будет отличаться от реальной на величину порядка ε^2. В этом смысле построенный алгоритм будет субоптимальным.

На фиксированном уровне анализа j в упорядочении $k = k(\eta)$ процесс $q(\eta) = q_j(k(\eta))$ также является белым шумом:

$$E\left[q(\eta)q(\eta')\right] = \sigma_q^2 \delta_{\eta\eta'} \tag{16}$$

8. Сведение задачи калибровки к задаче калмановской фильтрации.

Из изложенного следует, что уравнения (14), (10) можно записать в виде формирующего фильтра

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}(\eta+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & F(\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}(\eta) + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi(\eta) \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$d_{j\eta}[b] = d_{j\eta}[c]X + H(\eta)Y(\eta) + e(\eta) + q(\eta), \tag{18}$$

где $\xi(\eta), e(\eta)$ – белые шумы в дискретном времени η с ковариационной матрицей (15), $q(\eta)$ – белый шум в дискретном времени η с ковариационной матрицей (16), а ковариационная матрица пары (X, Y) в момент $\eta = 1$ определена (в информационной форме) соотношением

$$E\left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_\infty^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \tag{19}$$

Из (17), (18) видно, что измерения $d_{j\eta}[b]$ можно считать выходом нестационарного ФФ. Тем самым задача калибровки авиационного гравиметра сведена к стандартной задаче калмановского оценивания случайного процесса (X,Y), описываемого ФФ (16), (17), (19), по измерениям $d_{j\eta}[b]$. Задача решается итерационно по η [7].

9. Результаты расчетов.

При обработке данных использованы полуортогональные сплайн-вейвлеты bior6.8, обладающие хорошими свойствами локализации во временной и частотной области.

Работоспособность предложенного алгоритма проверялась на имитационных данных: траекторные параметры и измерения высоты полета ЛА брались из данных съемок, выполненных в Южной Африке в 2009г.; измерения гравиметра и СНС имитировались. Было сделано восемь повторных галсов (Рис.2).

Ниже для краткости обсуждается только задача определения масштабного коэффициента k_3. В качестве «истинного» k_3 принято $k_3^0 = 1{,}1$.

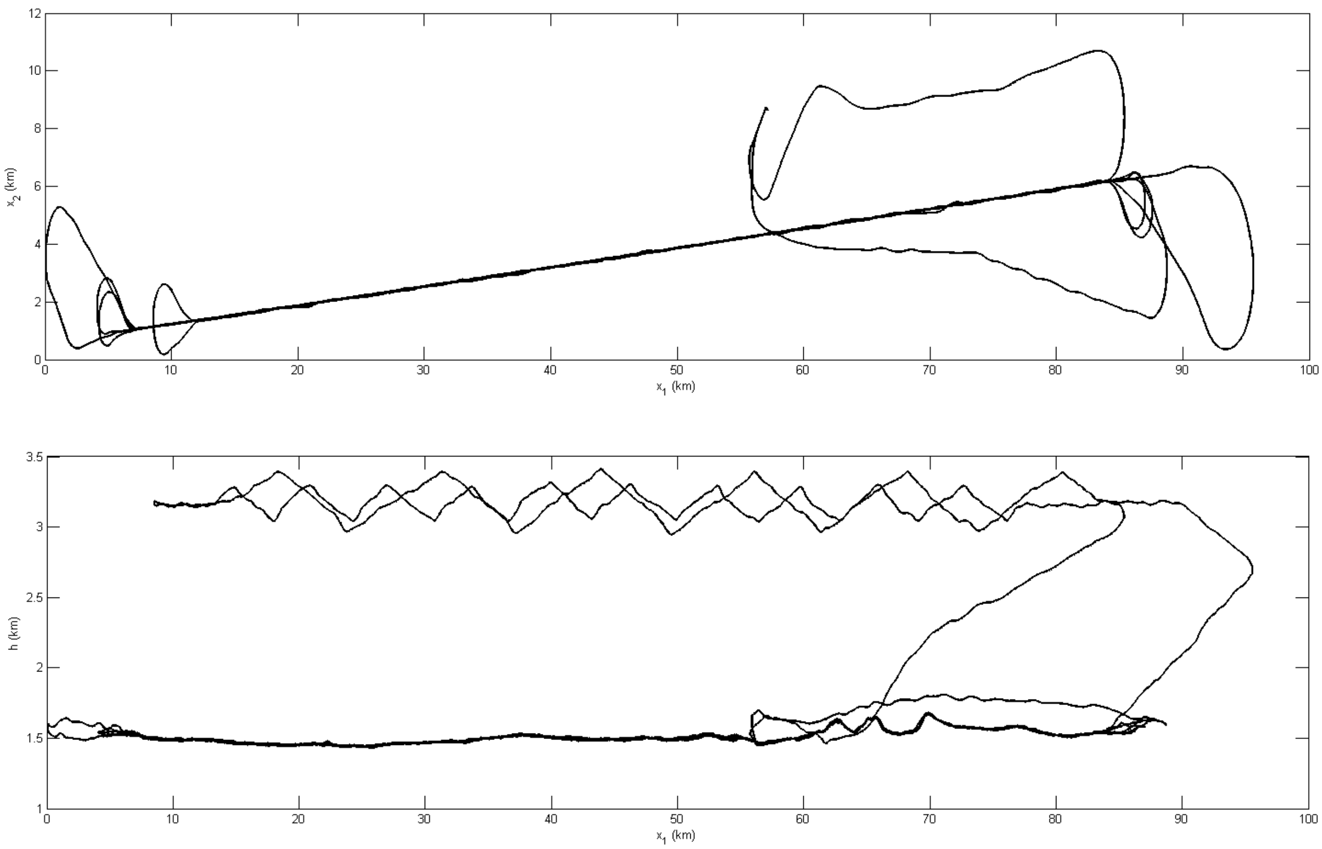

Рис 2. Траектория полета ЛА: сверху – траектория в плоскости (x_1, x_2), снизу – траектория в плоскости (x_1, x_3).

В таблице 1 приведены результаты калибровки гравиметра с использованием двух разных алгоритмов: стандартный МНК в пространстве КВР и фильтр Калмана (ФК) в пространстве КВР. В алгоритме МНК предполагается, что все возмущения, в том числе аномалия, являются белым шумом, и не учитывается корреляция значений аномалии на разных пролетах. Алгоритм ФК основан на построенной выше модели (15)-(19). В рамках сделанных допущений он является субоптимальным.

Таблица 1. Значение оценки k_3 в зависимости от алгоритма калибровки: $X_{\text{МНК}}$ — оценка полученная методом наименьших квадратов, $\Delta X_{\text{МНК}}$ — ошибка оценки $X_{\text{МНК}}$, $X_{\text{ФК}}$ — оценка полученная с помощью ФК в пространстве КВР, $\Delta X_{\text{ФК}}$ — ошибка оценки $X_{\text{ФК}}$; β_g — радиус корреляции в модели аномалии силы тяжести.

уровень анализа	$X_{\text{МНК}}$	$\Delta X_{\text{МНК}}$	$X_{\text{ФК}}$	$\Delta X_{\text{ФК}}$	β_g
1	1,09993	$6,06\cdot 10^{-5}$	1,09996	$3,74\cdot 10^{-5}$	4,75
2	1,09996	$3,93\cdot 10^{-5}$	1,10000	$-1,34\cdot 10^{-6}$	3,7
3	1,10000	$-1,96\cdot 10^{-6}$	1,10000	$-5,81\cdot 10^{-7}$	3,25
4	1,10001	$-1,04\cdot 10^{-5}$	1,09999	$7,02\cdot 10^{-7}$	1,9
5	1,09997	$2,96\cdot 10^{-5}$	1,09999	$1,51\cdot 10^{-6}$	3,9
6	1,10061	$-6,16\cdot 10^{-4}$	1,10016	$-1,63\cdot 10^{-4}$	7,1

В реализации алгоритма ФК в качестве модели АСТ используется случайный процесс с корреляционной функцией $K_{\Delta g}(\rho)=\sigma_g^2 e^{-\rho/\beta_g}(1-\rho/\beta_g)$ — модель Шварца второго порядка [2], где σ_g^2 – дисперсия аномалии, β_g — радиус корреляции аномалии. В модели аномалии принято $\sigma_g = 26\,$мГал (1мГал = 1см/сек2), значение β_g варьируется.

Из расчетов видно, что ФК дает лучший результат, чем МНК. В то же время на невысоких уровнях анализа результаты очень близки. Это связано с хорошей частотной локализацией материнского вейвлета, так что на невысоких уровнях анализа коэффициенты разложения аномалии близки к белому шуму. Данный эффект аналогичен эффекту "выбеливания" стационарных случайных процессов путем преобразования Фурье.

Путем подбора корреляционной функции аномалии можно улучшить работу ФК, так как алгоритм построения ФФ чувствителен к выбору модели Δg. Однако полученный путем подбора алгоритм будет адаптивным, с переменной частотой среза, что неудобно при последующем построении карт [2], и поэтому данный вариант здесь не обсуждается. Другой возможностью повышения точности является подбор оптимального материнского вейвлета.

Выводы.

Предложена методика рекуррентного решения задачи калибровки гравиметра на повторных галсах, основанная на вейвлет-разложении сигналов во времени и сортировки КВР измерений по пространственной координате, с последующим построением формирующего фильтра КВР аномалии. Учет пространственно-временной структуры данных аэрогравиметрии при КМА позволяет свести задачу калибровки к стандартной задаче оптимального оценивания, решаемой с использованием фильтра Калмана. Алгоритм проверен на имитационных данных.

Библиографический список

1. *Торге В.* Гравиметрия/ Пер. с англ.// М.: Мир, 1999.

2. *Болотин Ю. В., Голован А. А., Парусников Н. А.* Уравнения аэрогравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний// М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2002.

3. *Berzhitsky V. N., Iljin V. N., Saveliev E.B.* GT-1A Inertial Gravimeter System Design Consideration and Results of Flight Tests // Proc. 9th Saint-Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems. Russia,St.Petersburg, May 27-29, 2002.

4. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Часть2. // М.: Изд-во МГУ, 2008.-140с.

5. *Болотин Ю.В., Федоров А.В.* Анализ точности калибровки авиационного гравиметра на повторных галсах. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.№ 3, 2009, с. 49-56.

6. *Болотин Ю. В., Голован А. А., Кручинин П. А.* Задача авиационной гравиметрии. Некоторые результаты испытаний// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1999. № 2. 36-41.

7. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Часть1. // М.: Изд-во МГУ, 2008.-128с.

8. *Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим // М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001.

9. *Stepanov O.A., Blazhnov B.A., Koshaev D.A.* The Efficiency of Using Velocity and Coordinate Satellite Measurements in Determining Gravity Aboard an Aircraft// Proc. 9th Saint-Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems. Russia, St.Petersburg, May 27-29, 2002.

10. *К. Чуи.* Введение в вейвлеты // М.: Мир, 2001.

11. *Болотин Ю.В., Попеленский М.Ю.* Анализ точности решения задачи авиагравиметрии на основе стохастических моделей // Авиакосмическое приборостроение. 2003 № 4. 42-48.

12. *Katayama T.* Subspace Methods for System Identification// Springer,October 20, 2005.-392с.

Сведение об авторах

Федоров Алексей Вячеславович аспирант Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
тел: 8-929-666-00-74, e-mail: fedorovmsu@yandex.ru