

УДК 539.3

Напряженно-деформированное состояние произвольных оболочек с учетом термоэлектрического воздействия на основе уточненной теории

В.В. Фирсанов, Л.Х. Нгуен

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, 125993, Россия
e-mail: k906@mai.ru; lehung.mai@mail.ru

DOI: 10.34759/tpt-2020-12-3-110-117

Поступила в редакцию 08.02.2020

После доработки 23.02.2020

Принята к публикации 23.02.2020

Рассматривается напряженно-деформированное состояние произвольных оболочек при действии механических, электрических нагрузок и температур. Для математического моделирования совместной задачи термоэлектростатической оболочки используется уточненная теория, базирующаяся на уравнениях теории трехмерной упругости. Искомые перемещения оболочек представляются в виде полиномов по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа–Лява. Следствием нагрева и электрического воздействия будет возникновение дополнительных деформаций, обусловленных всесторонним тепловым расширением и полем напряженности. Эти деформации накладываются на упругие и учитываются при решении задачи расчета напряженно-деформированного состояния оболочек. Система основных уравнений равновесия термоэлектростатической оболочки и соответствующие граничные условия получены с помощью минимизации полной энергии оболочки, основанной на вариационном принципе Лагранжа. Приведен пример расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек. Решение задачи основано на преобразовании Лапласа.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, термоэлектростатическая оболочка, электрическое воздействие, оболочка вращения, температурное воздействие, вариационный принцип Лагранжа, преобразование Лапласа.

Введение

Исследование напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов типа пластин и оболочек произвольных геометрических форм рассматривается в работах [1–6]. Напряженно-деформированное состояние оболочки зависит от различных внешних факторов. Кроме механических нагрузок, оболочки могут находиться под действием теплового процесса [7, 8]. Для некоторых классов материалов, обладающих свойствами поляризации, пьезоэффекта, на напряженно-деформированное состоя-

ние оболочки существенно влияет воздействие электрического поля [9–11].

Целью данной работы является повышение точности и достоверности методов расчета напряженно-деформированного состояния произвольных оболочек не только при действии механических нагрузок, но и за счет учета внешних электрического и температурного воздействий. Совместная задача термоэлектростатической оболочки об определении напряженно-деформированного состояния оболочек построена на основе уточненной теории [12, 13] и вариаци-

онного принципа Лагранжа. Получаемая система дифференциальных уравнений в частных производных приводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям разложением нагрузок и искомых перемещений в тригонометрические ряды Фурье.

Представлен пример расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек, жестко защемленных по краям, при различных вариантах нагрузок. Решение краевой задачи основано на преобразовании Лапласа и метода матричной прогонки. Результаты, полученные в данной работе показали, что напряженно-деформированное состояние оболочки зависит в значительной степени не только от механических нагрузок, но и от электрического и температурного воздействий. По сравнению с классической теорией типа Кирхгофа–Лява уточненная теория дает более достоверные результаты расчета напряжений. Например, наблюдаются дополнительные поперечные нормальные и касательные напряжения типа «погранслой» вблизи жестко закрепленных краев, которые необходимо учитывать при расчете различных видов непрерывных соединений элементов конструкций.

Постановка задачи

Рассмотрим произвольную оболочку толщиной $2h$, отнесенную к триортогональной криволинейной системе координат $\xi\theta\zeta$ (рис. 1). Оболочка находится под действием произвольных механических q_{i3}^{\pm} нагрузок на лицевых и торцевых поверхностях, электрических E и температурных T нагрузок. Предположим, что разность температур и напряженностей по границам оболочки равна ΔT , ΔE соответственно. С учетом нагрева и электрического воздействия полные деформации оболочки определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \varepsilon_{\xi}(q) + \varepsilon_{\xi}(E) + \varepsilon_{\xi}(T), \\ \varepsilon_{\theta} &= \varepsilon_{\theta}(q) + \varepsilon_{\theta}(E) + \varepsilon_{\theta}(T), \\ \varepsilon_{\zeta} &= \varepsilon_{\zeta}(q) + \varepsilon_{\zeta}(E) + \varepsilon_{\zeta}(T), \\ \varepsilon_{\xi\theta} &= \varepsilon_{\xi\theta}(q) + \varepsilon_{\xi\theta}(E) + \varepsilon_{\xi\theta}(T), \\ \varepsilon_{\theta\zeta} &= \varepsilon_{\theta\zeta}(q) + \varepsilon_{\theta\zeta}(E) + \varepsilon_{\theta\zeta}(T), \\ \varepsilon_{\zeta\xi} &= \varepsilon_{\zeta\xi}(q) + \varepsilon_{\zeta\xi}(E) + \varepsilon_{\zeta\xi}(T). \end{aligned}$$

Вектор деформации оболочки $\varepsilon = \{\varepsilon_{\xi}, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_{\zeta}, \varepsilon_{\xi\theta}, \varepsilon_{\xi\zeta}, \varepsilon_{\theta\zeta}\}$ имеет вид:

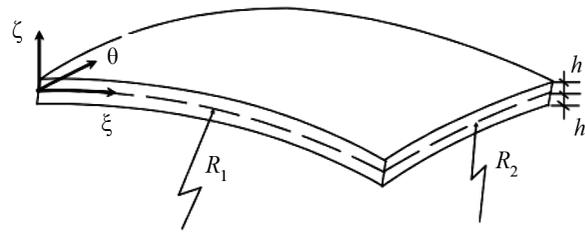


Рис. 1. Криволинейная система координат $\xi\theta\zeta$ оболочки

$$\{\varepsilon\} = [A]\{\sigma\} + [e]^T \{\Delta E\} + [\beta]\{\Delta T\}, \quad (1)$$

где $A = [A_{ij}]$ – симметричная матрица 6×6 коэффициентов податливости;

$\sigma = \{\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \sigma_{\zeta}, \sigma_{\xi\theta}, \sigma_{\xi\zeta}, \sigma_{\theta\zeta}\}$ – вектор напряжения; $\Delta E = \{E_{\xi}, E_{\theta}, E_{\zeta}\}$ – вектор напряженности электрического поля; $e = [e_{ij}]$ – матрица 3×6 пьезоэлектрических постоянных материала оболочки; $\beta = \{\beta_{\xi}, \beta_{\theta}, \beta_{\zeta}, 0, 0, 0\}$ – вектор теплового расширения материала; $\Delta T = \{T_{\xi}, T_{\theta}, T_{\zeta}\}$ – вектор температурного воздействия.

В соответствии с подходом [14, 15], перемещения оболочки представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, \zeta) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)\zeta + \\ &+ u_2(\xi, \theta) \frac{\zeta^2}{2!} + u_3(\xi, \theta) \frac{\zeta^3}{3!}, \\ v(\xi, \theta, \zeta) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)\zeta + \\ &+ v_2(\xi, \theta) \frac{\zeta^2}{2!} + v_3(\xi, \theta) \frac{\zeta^3}{3!}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$w(\xi, \theta, \zeta) = w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)\zeta + w_2(\xi, \theta) \frac{\zeta^2}{2!}.$$

Формулы деформации–смещения произвольных оболочек с учетом (2) и (1) записываются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} v + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} w + \\ &+ e_{11} \Delta E_{\xi} + e_{12} \Delta E_{\theta} + e_{13} \Delta E_{\zeta} + \beta_{\xi} \Delta T_{\xi}, \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} u + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \zeta} w + \\ &+ e_{21} \Delta E_{\xi} + e_{22} \Delta E_{\theta} + e_{23} \Delta E_{\zeta} + \beta_{\theta} \Delta T_{\theta}, \\ \varepsilon_{\zeta} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta} + e_{31} \Delta E_{\xi} + e_{32} \Delta E_{\theta} + e_{33} \Delta E_{\zeta} + \beta_{\zeta} \Delta T_{\zeta}, \\ \varepsilon_{\xi\theta} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \theta} u + \frac{\partial H_2}{\partial \xi} v \right) + \\ &+ e_{41} \Delta E_{\xi} + e_{42} \Delta E_{\theta} + e_{43} \Delta E_{\zeta}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} u + \\ &+ e_{51} \Delta E_{\xi} + e_{52} \Delta E_{\theta} + e_{53} \Delta E_{\zeta}, \\ \varepsilon_{\theta\zeta} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \zeta} v + \\ &+ e_{61} \Delta E_{\xi} + e_{62} \Delta E_{\theta} + e_{63} \Delta E_{\zeta}, \end{aligned}$$

где коэффициенты Ламе определяются равенствами

$$\begin{aligned} H_i &= A_i a_i, \quad H_3 = 1, \\ a_i &= 1 + \zeta r_i, \quad r_i = 1 / R_i, \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

R_i – радиусы оболочки; A_i, r_i – соответственно коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Физические уравнения трехмерной теории упругости для оболочки представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi} &= A_{11} \varepsilon_{\xi} + A_{12} \varepsilon_{\theta} + A_{13} \varepsilon_{\zeta}, \\ \sigma_{\theta} &= A_{21} \varepsilon_{\xi} + A_{22} \varepsilon_{\theta} + A_{23} \varepsilon_{\zeta}, \\ \sigma_{\xi\theta} &= A_{44} \varepsilon_{\xi\theta}, \\ \sigma_{\zeta} &= A_{31} \varepsilon_{\xi} + A_{32} \varepsilon_{\theta} + A_{33} \varepsilon_{\zeta}, \\ \sigma_{\xi\zeta} &= A_{55} \varepsilon_{\xi\zeta}, \quad \sigma_{\theta\zeta} = A_{66} \varepsilon_{\theta\zeta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения равновесия оболочки находим на основе вариационного принципа Лагранжа

$$\begin{aligned} &\iiint (\sigma_{\xi} \delta \varepsilon_{\xi} + \sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta} + \sigma_{\zeta} \delta \varepsilon_{\zeta} + \\ &+ \sigma_{\xi\zeta} \delta \varepsilon_{\xi\zeta} + \sigma_{\theta\zeta} \delta \varepsilon_{\theta\zeta} + \sigma_{\xi\theta} \delta \varepsilon_{\xi\theta}) A_1 A_2 d\xi d\theta d\zeta - \\ &- \iint \sum q_{i3}^{\pm} (\delta u_i + \delta v_i + \delta w_i) A_1 A_2 d\xi d\theta = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (3) и (4) в равенство (5), получим систему головных уравнений уточненной теории произвольных оболочек:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(A_2 \sigma_{\xi\xi}^{(0)})}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{\theta\xi}^{(0)})}{\partial \theta} + \sigma_{\theta\xi}^{(0)} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - \\ &- \sigma_{\theta}^{(0)} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} + \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_{\xi\xi}^{(0)} - k_0^{q_{13}^+} q_{13}^+ - k_0^{q_{13}^-} q_{13}^- = 0, \\ &\frac{\partial(A_2 \sigma_{\xi}^{(i)})}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{\theta\xi}^{(i)})}{\partial \theta} + \sigma_{\theta\xi}^{(i)} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - \sigma_{\theta}^{(i)} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} + \\ &+ \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_{\xi\xi}^{(i)} - A_1 A_2 \sigma_{\xi\xi}^{(i-1)} - k_i^{q_{13}^+} q_{13}^+ - k_i^{q_{13}^-} q_{13}^- = 0, \\ & \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(A_2 \sigma_{\xi\theta}^{(0)})}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{\theta}^{(0)})}{\partial \theta} + \sigma_{\xi\theta}^{(0)} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} - \\ &- \sigma_{\theta}^{(0)} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{A_1 A_2}{R_2} \sigma_{\theta\zeta}^{(0)} - k_0^{q_{23}^+} q_{23}^+ - k_0^{q_{23}^-} q_{23}^- = 0, \\ &\frac{\partial(A_2 \sigma_{\xi\theta}^{(j)})}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{\theta}^{(j)})}{\partial \theta} + \sigma_{\theta\xi}^{(j)} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} - \sigma_{\theta}^{(j)} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{A_1 A_2}{R_2} \sigma_{\theta\zeta}^{(j)} - A_1 A_2 \sigma_{\theta\zeta}^{(j-1)} = k_j^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_j^{q_{23}^-} q_{23}^-, \\ & \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(A_2 \sigma_{\xi\xi}^{(0)})}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{\theta\xi}^{(0)})}{\partial \theta} - \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_{\xi}^{(0)} - \\ &- \frac{A_1 A_2}{R_2} \sigma_{\theta}^{(0)} - k_0^{q_{33}^+} q_{33}^+ - k_0^{q_{33}^-} q_{33}^- = 0, \\ &\frac{\partial(A_2 \sigma_{\xi\xi}^{(k)})}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 \sigma_{\theta\xi}^{(k)})}{\partial \theta} - \frac{A_1 A_2}{R_1} \sigma_{\xi}^{(k)} - \\ &- \frac{A_1 A_2}{R_2} \sigma_{\theta}^{(k)} - A_1 A_2 \sigma_{\zeta}^{(k-1)} - k_k^{q_{33}^+} q_{33}^+ - k_k^{q_{33}^-} q_{33}^- = 0, \\ & \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\xi}^{(i)}, \sigma_{\xi\theta}^{(i)}, \sigma_{\xi\zeta}^{(i)}) &= \int_{-h}^h (\sigma_{\xi}, \sigma_{\xi\theta}, \sigma_{\xi\zeta}) \frac{\zeta^i}{i!} d\zeta, \\ & \quad i = 0 \dots 3, \\ (\sigma_{\theta}^{(i)}, \sigma_{\theta\xi}^{(i)}, \sigma_{\theta\zeta}^{(i)}) &= \int_{-h}^h (\sigma_{\theta}, \sigma_{\theta\xi}, \sigma_{\theta\zeta}) \frac{\zeta^i}{i!} d\zeta, \quad i = 0 \dots 3, \\ \sigma_{\zeta}^{(j)} &= \int_{-h}^h \sigma_{\zeta} \frac{\zeta^j}{j!} d\zeta, \quad j = 0 \dots 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Соответствующие краевые условия принимают в виде:

- на жестко защемленном краю:

$$u_i = v_i = w_i = 0, \quad (i = 1 \dots 3),$$
- на шарнирно защемленном краю:

$$\sigma_{\xi}^i = v_i = w_i = 0, \quad (i = 1 \dots 3),$$
- на свободном краю:

$$\sigma_{\xi}^i = \sigma_{\xi\theta}^i = \sigma_{\xi\zeta}^i = 0, \quad (i = 1 \dots 3).$$

Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Для приведения (5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений используются тригонометрические ряды Фурье. При этом нагрузки и искомые перемещения оболочки представляются в виде

$$\begin{aligned}
 q(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(\xi) \cos m\theta + Q_0(\xi), \\
 \Delta T &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(T_0 + \frac{z}{h} T_1 \right) \cos m\theta, \\
 \Delta E &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(E_0 + \frac{z}{h} E_1 \right) \cos m\theta, \\
 u_k(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{km}(\xi) \cos m\theta + U_{k0}(\xi), \\
 & \quad k = 0 \dots 3, \\
 v_k(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_{km}(\xi) \sin m\theta + V_{k0}(\xi), \\
 & \quad k = 0 \dots 3, \\
 w_l(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{lm}(\xi) \cos m\theta + W_{l0}(\xi), \\
 & \quad l = 0 \dots 2.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Подставляя (7) и (6) в (5), получим систему уравнений равновесия произвольных оболочек в перемещениях под действием совместных механических, электрических и температурных нагрузок:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^3 \left(K_{d2\xi}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{d2\theta}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K_i^{ij} \right) u_j + \\
 & + \sum_{j=1}^3 K_{d2\xi\theta}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_j + \sum_{j=0}^2 K_{d1\xi}^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi} w_j + k_i - \\
 & - \left(k_i^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_i^{q_{13}^-} q_{13}^- \right) = 0, \quad i = 1 \dots 4, \\
 & \sum_{j=0}^3 K_{d2\xi\theta}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_j + \\
 & + \sum_{j=0}^3 \left(K_{d2\xi}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{d2\theta}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K_i^{ij} \right) v_j + \\
 & + \sum_{j=0}^2 K_{d1\theta}^{ij} \frac{\partial}{\partial \theta} w_j + k_i -
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(k_i^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_i^{q_{23}^-} q_{23}^- \right) = 0, \quad i = 5 \dots 8, \\
 & \sum_{j=0}^3 K_{d1\xi}^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi} u_j + \sum_{j=0}^3 K_{d1\theta}^{ij} \frac{\partial}{\partial \theta} v_j + \\
 & + \sum_{j=0}^2 \left(K_{d2\theta}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K_{d2\xi}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_i^{ij} \right) w_j + k_i - \\
 & - \left(k_i^{q_{33}^+} q_{33}^+ + k_i^{q_{33}^-} q_{33}^- \right) = 0, \quad i = 9 \dots 11.
 \end{aligned}$$

В уравнениях (9) K_i с верхними и нижними индексами обозначены коэффициенты, зависящие от геометрических параметров, упругих, пьезоэлектрических и температурных свойств материала оболочки.

Пример расчета

В качестве примера расчета рассматривается круговая цилиндрическая оболочка, жестко защемленная по торцам, со следующими параметрами: $R_2 = R$, $R_1 = \infty$ и $H_2 = R$, $H_1 = R + \zeta$.

Используя операционный метод, основанный на преобразовании Лапласа, находим алгебраическую систему уравнений. В результате с помощью геометрических и физических соотношений получены перемещения, деформации и тангенциальные напряжения оболочки. Поперечные напряжения получают непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Граничные условия на жестко зажатых краях оболочки принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u_i &= 0, (i = 0 \dots 3); \\
 v_i &= 0, (i = 0 \dots 3); \\
 w_i &= 0, (i = 0 \dots 2).
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Оболочка радиуса $R = 1.0$ м, длиной $L = 4R$, относительной полутолщиной $h/R = 1/100$ находится под действием механической $q_{33}^+(\xi, \theta) = Q_0 \sin(2\xi) \cos(2\theta)$, $q_{13}^+ = q_{23}^+ = q_{33}^- = 0$, электрической ΔE и температурной ΔT нагрузок.

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния оболочки показаны на рис. 2–9.

На рис. 2 показан график изменения нормальных напряжений по длине оболочки при отсутствии электрического и температурного воздействий. Зависимость напряжений $\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_\zeta$ от температуры (при $\Delta E = 0$) представлены на рис. 3–5.

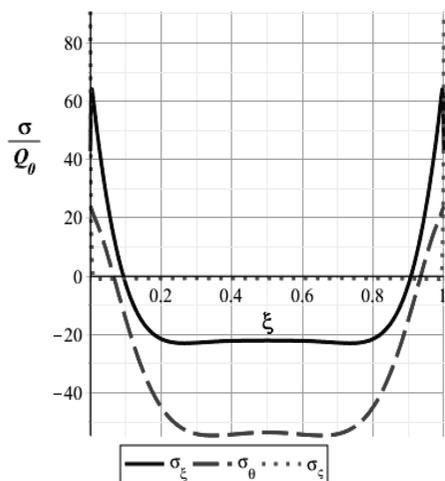


Рис. 2. Изменение нормальных напряжений по длине оболочки при $\Delta E = 0, \Delta T = 0$

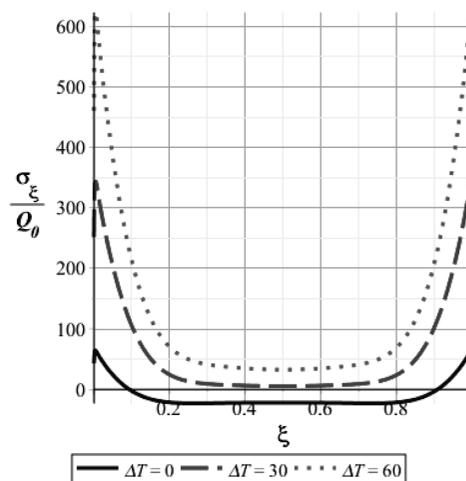


Рис. 3. Изменение напряжений σ_ξ по длине оболочки при $\Delta E = 0$

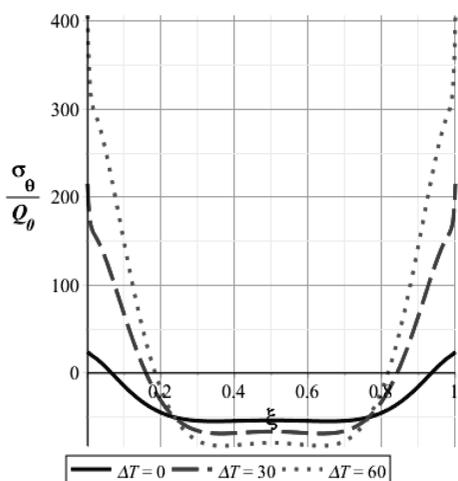


Рис. 4. Изменение напряжений σ_θ по длине оболочки при $\Delta E = 0$

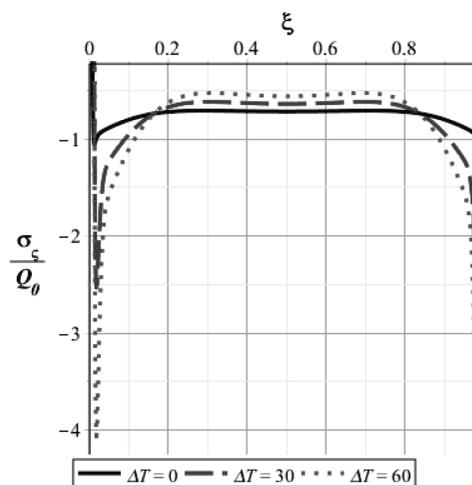


Рис. 5. Изменение напряжений σ_ζ по длине оболочки при $\Delta E = 0$

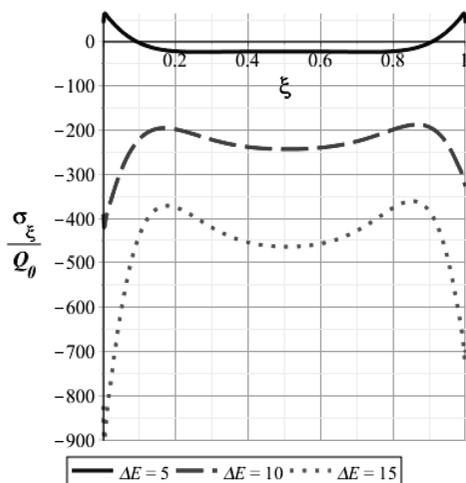


Рис. 6. Изменение напряжений σ_ξ по длине оболочки при $\Delta T = 0$

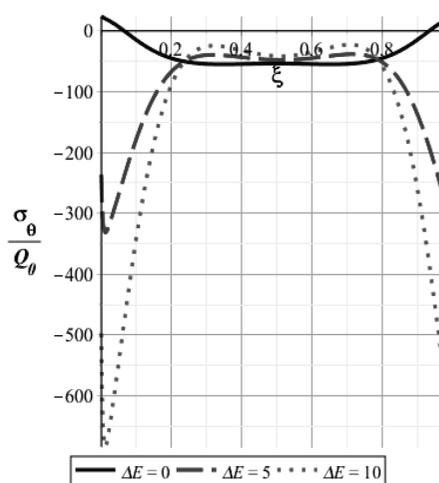


Рис. 7. Изменение напряжений σ_θ по длине оболочки при $\Delta T = 0$

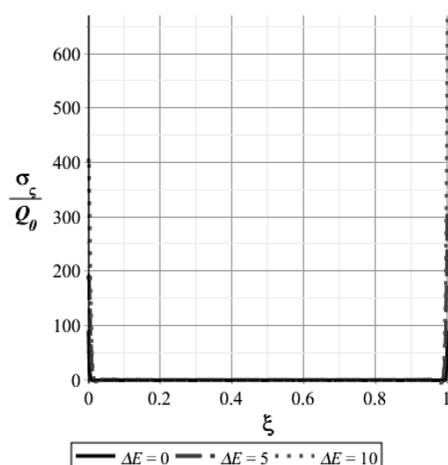


Рис. 8. Изменение напряжений σ_ξ по длине оболочки при $\Delta T = 0$

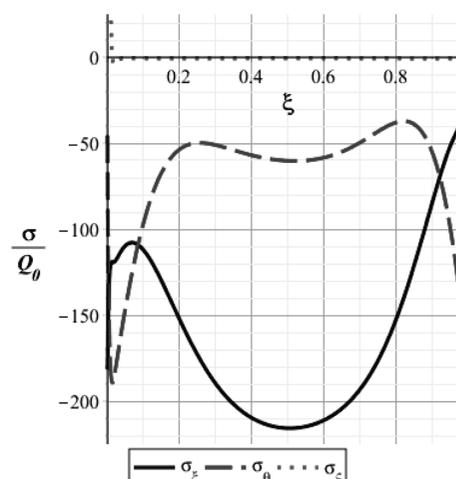


Рис. 9. Нормальные напряжения по длине оболочки при воздействии электрических и температурных нагрузок

На рис. 6–9 представлены графики изменения нормальных напряжений при воздействии электрических и совместных термоэлектрических нагрузок.

Заключение

Построена математическая модель и сформулированная краевая задача термоэлектроупругости произвольных оболочек на основе уточненной теории и вариационного принципа Лагранжа разложением компонентов перемещений в полиномы по толщине на две степени выше по отношению к классической теории.

Представлен расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки под действием механических, электрических и температурных нагрузок. Решение краевой задачи основано на преобразовании Лапласа. Проведено сравнение результатов напряженно-деформированного состояния оболочки для нескольких вариантов внешних нагрузок. Установлено, что напряженно-деформированное состояние оболочек при отдельном воздействии температуры и напряженности изменяется пропорционально их величинам. При совместном воздействии распределение напряженно-деформированного состояния зависит от конкретных начальных термоэлектрических параметров.

Результаты, полученные в данной работе, также показали, что имеют место поперечные нормальные напряжения вблизи жестко зашпеленных краев, которыми в классической теории

типа Кирхгофа–Лява пренебрегают. Такие дополнительные напряжения необходимо учитывать при расчете видов соединений, при оценке прочности и долговечности элементов в различных конструкциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 6. С. 139–146.
3. Власов В.З. Избранные труды. Общая теория оболочек. Т. 1. М.: АН СССР, 1962. 530 с.
4. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
6. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. № 4, С. 593–608.
7. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 309 с.
8. Самсоненко Г.И. Общая методика решения задач термоупругого изгиба тонких прямоугольных пластин из анизотропных разносопротивляющихся материалов // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики. Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. Т. 2. С. 84–88.
9. Паргон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1998. 470 с.
10. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика управляемых конструкций. М.: Изд-во МАИ, 2007. 326 с.
11. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 280 с.
12. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Энергетически согласованная теория цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 6. С. 543–548.
13. Фирсанов В.В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на

- основе неклассической теории // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 515–522.
14. **Firsanov V.V., Doan T.N.** Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a non-classical theory // *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. 2015. V. 6. Iss. 2. P. 135–166.
 15. **Tran Ngoc Doan, Do Van Thom, Nguyen Truong Thanh, Phan Van Chuong, Nguyen Chi Tho, Nguyen Tri Ta, Hoang Nam Nguyen.** Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory // *Composite Structures*. 2020. V. 232. Article 111526. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111526>

Stress-strain state of arbitrary shells with account for thermoelectric impact based on refined theory

Val.V. Firsanov, Le Hung Nguyen

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia
e-mail: k906@mai.ru; lehung.mai@mail.ru

The article regards the study of the stress-strain state of thin-walled elements such as plates and shells of arbitrary geometric shapes. The shell stress-strain state depends on various external factors. Besides mechanical loads, shells can be affected by thermal process. For certain classes of materials with the polarization property and piezoelectric effect, the electric field impact substantially affects the stress-strain state of the shell. The presented article considers the stress-strain state of arbitrary shells under the action of mechanical and electrical loads, and temperatures. A refined theory, based on the equations of the three-dimensional elasticity theory, is employed for mathematical modelling of the joint problem of thermo-electro-elasticity of shells. The sought shells displacements are being represented as polynomials on the normal to the median surface coordinate two degrees higher, compared to the classical theory of the Kirchhoff-Love type. Heating and electrical impacts will result in extra deformations occurrence, stipulated by all-around thermal expansion and field of intensity. These deformations are being superimposed on the elastic ones and accounted for while solving the problem of stress-strain state of shells. The system of basic equations of equilibrium of the shells' thermo-electro-elasticity and corresponding boundary conditions are obtained by minimizing the total energy of the shell, based on Lagrange variation principle. The article presents the example of the stress-strain state computing of cylindrical shells, rigidly clamped at the edges under various loading options. The solution of the boundary value problem is based on the Laplace transform and the matrix sweep method.

Keywords: stress-strain state, thermoelectroelasticity, electric action, shell of rotation, temperature effect, variational Lagrange principle, Laplace transform.

REFERENCES

1. **Goldenevizer A.L.** *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow: Nauka, 1976. 512 p. In Russ.
2. **Vasiliev V.V., Lurie S.A.** K probleme utochneniya teorii pologikh obolochek [On the problem of refinement of the theory of flat shells]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of solid*, 1990, no. 6, pp. 139–146. In Russ.
3. **Vlasov V.Z.** *Izbrannye trudy. Obshhaya teoriya obolochek* [Selected Works. General theory of shells]. Moscow: Publ. house of Academy of Sciences of the USSR, 1962. 530 p. In Russ.
4. **Lurie A.I.** *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1970. 939 p. In Russ.
5. **Love A.E.H.** *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge [Eng.]: University Press, 1927. 643 p. (Russ. ed. Love A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti*. Moscow-Leningrad: ONTI, 1935. 674 p.)
6. **Gol'denevizer A.L.** Derivation of an approximate theory of shells by means of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1963, vol. 27, no. 4, pp. 903–924. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90177-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90177-1)
7. **Kovalenko A.D.** *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of thermo-elasticity]. Kiev: Publishing house Naukova Dumka, 1970. 309 p. In Russ.
8. **Samsonenko G.I.** General method of solving problems of thermoelastic bending of thin rectangular plates made of anisotropic material – resisting materials. *Materialy 6 Mezhdunarodnoj konferentsii po problemam gornoj promyshlennosti, stroitel'stva i ehnergetiki «Sotsial'no-ehkonomicheskie i ehkologicheskie problemy gornoj promyshlennosti, stroitel'stva i ehnergetiki»* [Proceedings of the 6th Int. Conf. on Mining, Construction and Energy "Socio-economic and environmental problems of mining industry, construction and energy"]. Tula, 2010, vol. 2, pp. 84–88. In Russ.

9. **Parton V.Z., Kudryavtsev B.A.** *Elektromagnitouprugost' p'ezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel* [Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies]. Moscow: Nauka, 1998. 470 p. In Russ.
10. **Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N.** *Dinamika upravlyemykh konstruksij* [Dynamics of controlled structures]. Moscow: Publishing House of the Moscow Aviation Institute, 2007. 326 p. In Russ.
11. **Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.A.** *Elektrouprugost'* [Electroelasticity]. Kiev: Naukova Dumka, 1989. 280 p. In Russ.
12. **Firsanov V.V., Doan Ch.N.** Energy-consistent theory of cylindrical shells. *Journal of machinery, manufacture and reliability*, 2011, vol. 40, no. 6, pp. 543–548.
13. **Firsanov V.V.** Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2016, vol. 45, no. 6, pp. 515–522.
14. **Firsanov V.V., Doan T.N.** Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 135–166.
15. **Tran Ngoc Doan, Do Van Thom, Nguyen Truong Thanh, Phan Van Chuong, Nguyen Chi Tho, Nguyen Tri Ta, Hoang Nam Nguyen.** Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory. *Composite Structures*, 2020, vol. 232, article 111526. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111526>