

ЛОКАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА НОРМИРОВАННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МАТРИЦ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Анатолий Васильевич КОРОВАЙЦЕВ родился в 1945 г. в селе Гремячка Пронского района Рязанской области. Профессор МАИ. Доктор физико-математических наук, профессор. Основные научные интересы — в области разработки методов анализа существенно нелинейного поведения тонкостенных конструкций. Автор более 140 научных работ. E-mail: Rus_Region@mail.ru

Anatoly V. KOROVAYTSEV, D.Sci, was born in 1945, in the Ryazan Region. He is a Professor at the MAI. His research interests are in analysis methods for essentially nonlinear behavior of thin-walled structures. He has published more than 140 technical papers. E-mail: Rus_Region@mail.ru

Екатерина Анатольевна КОРОВАЙЦЕВА родилась в городе Москве. Инженер МГТУ им. Н.Э. Баумана. Основные научные интересы — в области проектирования тонкостенных конструкций летательных аппаратов. Автор более 20 научных работ. E-mail: katrell@mail.ru

Ekaterina A. KOROVAYTSEVA, was born in Moscow. She is an Engineer at the Baumann Moscow State Technical University. Her research interests are in development of thin-walled aircraft structures. She has published over 20 technical papers. E-mail: katrell@mail.ru

Для линейных моделей деформируемых элементов предлагается локально-аналитический метод расчета нормированных интегральных матриц для соотношений краевых задач, записанных в векторно-матричной форме. В методе используются основные положения теории решетчатых функций, позволяющие при использовании специального тождественного преобразования исходной задачи механики получить аналитическую форму интегральных матриц. Метод позволяет отказаться от использования сеточных функций. Приводится один из примеров типовой иллюстрации возможностей методов.

A locally analytical method is suggested to calculate normalized integral matrices for linear models of deformable elements. The matrices are defined for boundary problem conditions expressed in vector-matrix form. Lattice function theory techniques are used to derive integral matrices in analytical form basing on some special identity transformation of the source mechanical problem. The method allows us to abandon usage of mesh functions. A typical example demonstrates capabilities of the method.

Ключевые слова: анализ напряженно-деформированного состояния, краевые задачи, интегральные матрицы, локальные аналитические решения, сравнительный анализ.

Keywords: deflected mode analysis, boundary problems, integrated matrices, locally analytical solutions, comparative analysis.

1. Постановка задачи

Для всех известных линейных моделей деформируемых элементов система уравнений, описывающая их напряженно-деформированное состояние, включает в себя три типа линейных соотношений: дифференциальные уравнения равновесия, дифференциальные и алгебраические геометрические соотношения и физические соотношения [1]. При этом для статических одномерных задач эти уравнения могут быть сведены к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений от-

носительно некоторого вектора $\mathbf{y}(x, \mu)$ размерности m (штрих соответствует производной по x):

$$\mathbf{y}'(x, \mu) = \mathbf{A}(x, \mu)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x, \mu). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{A} — квадратная матрица порядка m ; \mathbf{b} — вектор, описывающий нагружение деформируемого элемента; μ — вектор параметров задачи. Их конкретный вид определяется типом рассчитываемого деформируемого элемента [1].

Отметим, что во многих случаях к системе уравнений (1) тем или иным способом приводятся и многомерные задачи.

Как правило, необходимо решать краевую задачу на отрезке $[x_1, x_2]$ для системы (1) с граничными условиями

$$C_i y_i + d_i = 0, y_i = y(x_i) \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

где C_i — матрицы размерностей $m \times m_i$ ($m_1 + m_2 = m$); d_i — векторы неоднородных составляющих граничных условий в граничных точках.

Для решения задачи (1), (2) будем использовать метод начальных параметров [2], согласно которому представляем искомым вектор, например с использованием значения искомого вектора на левой границе отрезка интегрирования, в следующем виде:

$$y(x) = M(x)y_1 + H(x) \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

В этом представлении матричная M и векторная H функции являются решениями задач Коши (E — единичная матрица):

$$M'(x) = A(x)M(x), M(x_1) = E; \quad (4)$$

$$H'(x) = A(x)H(x) + b(x), H(x_1) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что построенный таким образом вектор $y(x)$ удовлетворяет системе уравнений (1). При этом M является нормированной интегральной матрицей [3] системы уравнений (1).

Подстановка вектора (3) в граничные условия (2) приводит к разрешающей задаче системе линейных алгебраических уравнений относительно вектора y_1 :

$$C y_1 + d = 0, c = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 M(x_2) \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} d_1 \\ C_2 H(x_2) + d_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Таким образом, краевая задача (1), (2) сводится к $(m+1)$ задаче Коши на полуинтервале $x \geq x_1$ относительно n столбцов матрицы M и вектора H , вытекающим из уравнений (4) и (5). Эти задачи далее запишем в единой форме:

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x), y(x_1) = y_0. \quad (7)$$

2. Алгоритм решения задачи Коши (7).

Полагая, что на отрезке $[x_1, x_2]$ все условия существования и единственности (4)—(6) выполнены, разбиваем указанный отрезок точками $\xi_n = x_n + nT_0$ ($n = 0, 1, \dots, N$) на фиксированное число N участков

длины (периода дискретности [7, 8]) $T_0 = (x_2 - x_1) / N$. На каждом из участков $[\xi_{n-1}, \xi_n]$ вводим локальную координату $\zeta = x - \xi_{n-1}$ (метод приспособывания [2]) и заменяем задачу (7) следующей начальной задачей:

$$\begin{aligned} z'_n(\zeta) &= B_n(\zeta)z_n(\zeta) + c_n(\zeta), \\ z_n(0) &= z_{n-1}(T_0) \quad (n = 1, \dots, N); \\ z_n(\zeta) &= y(\xi_{n-1} + \zeta), B_n(\zeta) = A(\xi_{n-1} + \zeta), \\ c_n(\zeta) &= b(\xi_{n-1} + \zeta), z_0(T_0) = y_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Одним из возможных методов численного интегрирования последовательности задач (8) является явный метод Эйлера [9], в котором правая часть системы уравнений заменяется ее значением в начальной точке:

$$\begin{aligned} z'_n(\zeta) &= B_n(0)z_n(0) + c_n(0), \\ z_n(0) &= z_{n-1}(T_0) \quad (n = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (9)$$

Для преодоления известных недостатков явного метода Эйлера можно вместо соотношений (9) рассматривать следующие задачи с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} z'_n(\zeta) &= B_n(0)z_n(\zeta) + c_n(\zeta), z_n(0) = \\ &= z_{n-1}(T_0) \quad (n = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (10)$$

Однако при этом придется решать задачи об определении фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы и о построении частного решения.

Для преодоления недостатков этих обоих подходов предлагается начальные задачи в (8) заменить следующими задачи с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} z'_n(\zeta) &= N z_n(\zeta) + f_n, z_n(0) = z_{n-1}(T_0) \quad (n = 1, \dots, N), \\ f_n &= [B_n(0) - N] z_n(0) + c_n(0), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

— циклическая матрица порядка m [10].

Такой подход позволяет, с одной стороны, учесть переменность искомого столбца по координате

нате, а с другой стороны, использовать известную фундаментальную матрицу [3] для однородной системы, соответствующей (11):

$$U(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & \dots & u_{m-2}(x) & u_{m-1}(x) \\ 0 & 1 & x & \dots & u_{m-3}(x) & u_{m-2}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & x \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$u_j(x) = \frac{x^j}{j!}.$$

При этом общее решение системы уравнений в (11) имеет вид [3]

$$z_n(\zeta) = U(\zeta) \left[z_{n-1}(T_0) + \int_0^\zeta U^{-1}(\zeta) f_n d\zeta \right]. \quad (13)$$

Отметим, что специфическая форма использованного линейного преобразования правых частей исходного дифференциального уравнения (1) позволила отказаться от расчета нормированной интегральной матрицы $M(x)$ дифференциального уравнения типа (1) в форме бесконечного ряда, представленного в работах [3, 11], и получить ее точный аналитический вид на одном периоде дискретности. Обращение, интегрирование этой матрицы и перемножение аналитического результата интегрирования с необращенной матрицей $M(x)$ не вызывает никаких затруднений, поскольку приводит к аналитическим же функциям [11].

Отметим, что использованная форма аналитического решения задач не снимает известной в задачах механики деформируемого твердого тела остроты проблемы использования полиномов при больших значениях аргумента. Но в техническом плане эти трудности можно преодолеть, используя автономно или комплексно три опробованные для указанных задач меры воздействия: сегментацию исходной задачи [12]; привлечение различных технических гипотез, снимающих остроту проблем работы с жесткими и осциллирующими функциями [2]; различные тождественные преобразования исходного дифференциального уравнения [13].

3. Примеры

Для тестирования предлагаемого метода была создана специальная система, опирающаяся на известную авторам совокупность систем обыкновенных дифференциальных уравнений в задачах численного анализа, математической физики, теоретической механики и механики деформируемого твердого тела. Она предполагает как решение множе-

ства задач Коши, так и расчет нормированных интегральных матриц и решение линейных краевых задач строительной механики, в том числе, для тонких непологих оболочек. Длительное опробование метода на достаточно общей и весьма обширной базе систем уравнений не выявило каких-либо недостатков метода ни по одному из этих направлений тестирования.

В качестве примера ниже приводятся формулировки части выполненных работ и характерные результаты по одному направлению тестирования метода — решению задач Коши для расчета нормированных интегральных матриц дифференциального уравнения

$$V^{IV} + 4\beta^4 V = 0, \quad (14)$$

которое сводится к системе (1).

Уравнение такого вида с различным смыслом функции V и параметра β используется в расчетах балок на упругом основании, цилиндрических и сферических оболочек [1]. Ему удовлетворяют функции Крылова $K0, K1, K2, K3$ (обозначения [1]), позволяющие получить аналитическое выражение интегральной нормированной матрицы

$$M(x) = \begin{pmatrix} K0(x) & \beta^{-1}K1(x) & \beta^{-2}K2(x) & \beta^{-3}K3(x) \\ -4\beta K3(x) & K0(x) & \beta^{-1}K1(x) & \beta^{-2}K2(x) \\ -4\beta^2 K2(x) & -4\beta K3(x) & K0(x) & \beta^{-1}K1(x) \\ -4\beta^3 K1(x) & -4\beta^2 K2(x) & -4\beta K3(x) & K0(x) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тестированию предшествовало определение допустимого интервала изменения аргумента по исходной системе уравнений, следующей из уравнения (14), и сопряженной с ней системе для показателя изменяемости функций $\beta = 20$. При этом собственными числами Якобиана исходной системы уравнений являются $\pm 20 \pm 20i$. При принятии допустимого отклонения в ортогональности 0,005 интервал тестирования составляет при этом величину, равную 0,5.

В качестве базы сравнения использована совокупность известных в литературе методов численного решения этих же задач, включая явные одношаговые методы, методы решения жестких систем дифференциальных уравнений [4] и методы прогонки [2]. В частности, использовались программы стандартного математического обеспечения с их названиями и программным видом из пакета работы [14]: для методов Рунге—Кутта с фиксированным (*rkfixed*) и переменным (*Rkadapt, rkadapt*) ша-

гами, метод Булирша—Штера (*Bulstoer, bulstoer*) для нежестких систем дифференциальных уравнений, алгоритмы *Radau*, Булирша—Штера (*Stiffb*), Розенброка (*Stiffi*) для жестких систем дифференциальных уравнений. Кроме того, на языке программирования Mathcad авторами были реализованы методы Эйлера в модифицированном и немодифицированном вариантах, Кутта—Мерсона с постоянным и переменным шагами, прогонка по Абрамову с встроенным методом *rkfixed*. Расчеты по представленному в статье алгоритму проводились в авторской разработке с использованием формулы (13) также на языке программирования Mathcad. В расчетах с постоянным шагом для представленных методов использовано число шагов, равное 100. В расчетах с автоматическим изменением шага относительная точность расчетов была принята равной 10^{-3} , а оценки изменения шага соответствовали заложенным в математическом обеспечении [14]. Оценки погрешности расчета нормированной интегральной матрицы всех расчетов выполнены в максимальной норме *norm1* также согласно [14]. Нормы относительных погрешностей для исследованных методов и алгоритмов составили величины в диапазоне от 0,621 для немодифицированного варианта метода Эйлера до $7,935 \cdot 10^{-10}$ для *Rkadapt*.

Отметим, что даже подпрограммы, в которых реализован в стандартном математическом обеспечении один и тот же метод Рунге, но в разных модификациях, приводят к различной точности численных расчетов (методы *rkfixed*, *Rkadapt*, *rkadapt*). Последнее находится в согласии с точкой зрения авторов работы [4]: «нельзя считать, что все сходящиеся методы пригодны для практических вычислений». Поэтому в работе и отдано предпочтение электронным множественным экспериментам по сравнению с теоретическими оценками различных аспектов методов решения задачи Коши.

Худшими по точности расчетов среди известных методов являются не модифицированный и модифицированный варианты метода Эйлера (0,621 и $0,021$ соответственно), метод *rkadapt* ($3,763 \cdot 10^{-3}$), Кутта—Мерсона с переменным шагом (25 шагов в исследованном интервале изменения аргумента и точность $6,403 \cdot 10^{-3}$). Последний факт также подтверждает точку зрения авторов работы [4], говорящих о необходимости использования специальных стратегий изменения шага при решении задачи Коши с автоматическим изменением шага, что, хотя и неявно, но подчеркивает декларативность оценок точности решения задачи Коши при теоретических разработках с оценками точности метода. Отметим, что методы решения жестких систем дифференциальных уравнений (алгоритмы *Radau*, Булирша—Штера — *Stiffb*, Розенброка — *Stiffi*) не оказались лучшими, что еще раз доказывает справедливость утверждения авторов работы [4] о важности и равноправии электронных экспериментов по сравнению с теоретическим анализом характеристик методов решения задачи Коши. Среди рассмотренных методов и алгоритмов предлагаемый метод оказался существенно лучше методов Эйлера и близким к методу Рунге—Кутта ($1,934 \cdot 10^{-3}$).

На рис. 1 показаны значения функции Крылова $K0(x)$ в диапазоне $x \in [0; 0,5]$, полученные с помощью модифицированного метода Эйлера (кривая 1), метода Рунге—Кутта и предлагаемого метода (кривая 2; результаты двух последних методов совпадают с точностью графической иллюстрации).

На рис. 2 продемонстрировано изменение погрешностей расчета функции Крылова, отнесенных к норме функции $K0(x)$.

Выводы

Представлен полиномиальный метод решения задачи Коши и расчета нормированной интегральной

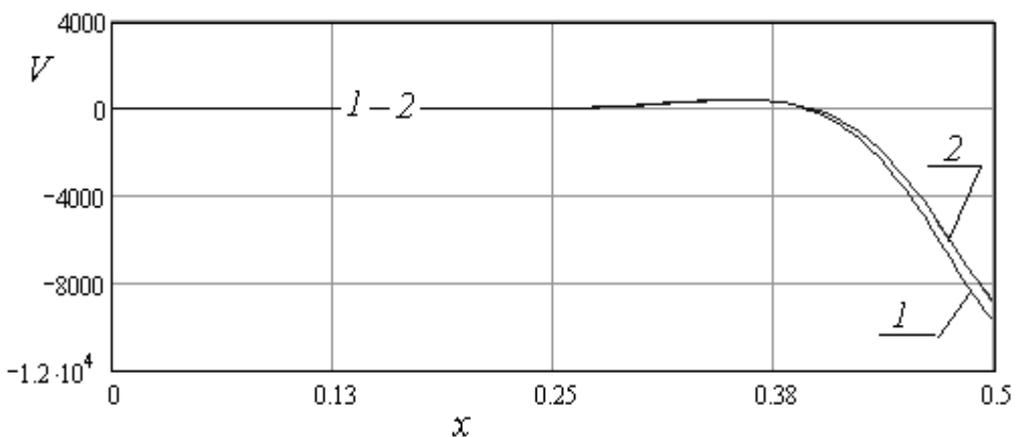


Рис. 1. Сравнение решений уравнения (14) различными методами: 1 — метод Эйлера; 2 — метод Рунге—Кутта и предлагаемый метод

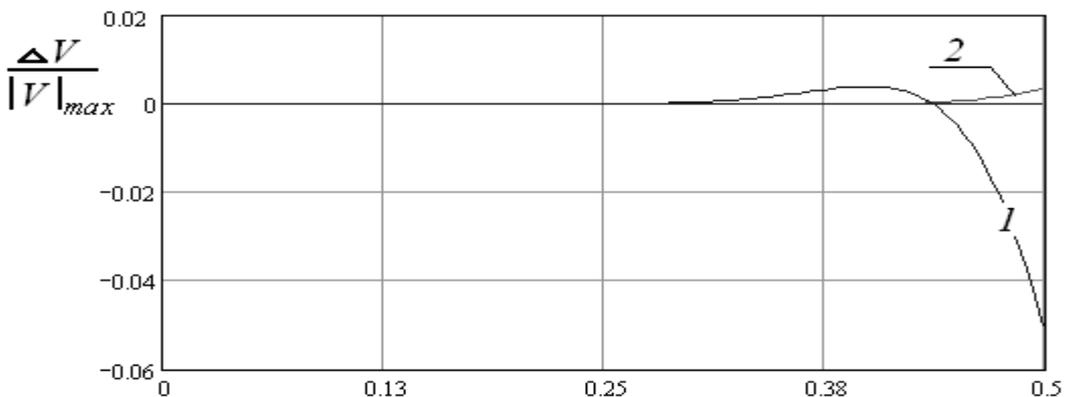


Рис. 2. Сравнение погрешностей решений уравнения (14) различными методами: 1 — предлагаемый метод; 2 — метод Рунге—Кутты

ной матрицы, с одной стороны, свободный от ограничений на правые части систем дифференциальных уравнений в понимании работ [4—6], например при формулировке задачи Коши в представлении сеточных функций [15], а с другой стороны, позволяющий записать локальное решение с помощью полиномиальных функций. Метод не требует сложной процедуры определения коэффициентов, свойственной обычным численным методам, отличается четкой иерархией полиномов фундаментальной матрицы и экономичностью. По точности метод конкурирует с известными численными методами.

Существенным отличием настоящей работы от известных подходов являются:

- привлечение циклической матрицы N и получение линейной неоднородной задачи Коши с постоянными специально подобранными коэффициентами;
- принципиальный отказ от сеточных функций и их любой интерполяции, приведенных, например, в работах [15, 16];
- использование, в отличие от обычных подходов, при вычислении решения задачи Коши на одном периоде дискретности интеграла не с постоянными, а с нулевым нижним и переменным верхним пределом, позволяющее сформулировать решение задачи Коши на любом периоде дискретности в аналитической полиномиальной форме.

В предложенном методе используются полиномы с максимальной степенью, равной порядку дифференциального уравнения. Кроме того, по сравнению с известными методами, предлагаемый подход не связан с многократностью следующих процедур:

- дифференцирования правой части уравнения, как в методе степенных рядов;

- вычисления правой части уравнения, как в методах Рунге—Кутты;

- вычисления членов экстраполяционных методов и использования стартовой процедуры, как в многошаговых методах.

Отметим не только простоту метода, но и его неожиданную для авторов математическую красоту: при решении задачи Коши используются процедуры, обычно применяемые при решении линейных краевых задач. Причем использование специального тождественного преобразования исходной правой части позволило применить метод для решения как линейных, так и нелинейных задач Коши. Представленный метод предлагается как один из методов дополнения палитры (см., например, [4], [9] и [17]) методов решения задачи Коши, имеющий локально-аналитическую форму решения.

Библиографический список

1. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в 3 т. — М.: Машиностроение, 1968.
2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. — М.: Высшая школа, 1972.
3. Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. — М.: Машиностроение, 1973.
4. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1979.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 1971.
6. Келлер Д.Б. Теория ветвления решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Под. ред. Д.Б. Келлера и С. Антмана. — М.: Мир, 1974. С. 19-34.

7. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами / Под ред. М.С. Хитрика и С.М. Федорова. — М.: Машиностроение, 1972.
8. Тюкин В.Н. Теория управления. — Часть 2. Особые линейные и нелинейные системы. — Вологда: ВоГТУ, 2000.
9. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.
10. Вестяк А.В., Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Алгебра и аналитическая геометрия. — Т. 1. — М.: Изд-во МАИ, 2002.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
12. Калнинс, Лестинги. К нелинейной теории упругих оболочек вращения // Прикладная механика. Сер. Е. 1967. №1. С.69—76.
13. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. — М.: УРСС, 1999.
14. Кирьянов Д.В. Mathcad 13. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006.
15. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. — М.: Наука, 2004.
16. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978.
17. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.

Московский авиационный институт

Статья поступила в редакцию 27.05.2009