УДК 629.78

Проектирование сжатых стержней силовых авиационных конструкций с использованием критерия подобия

В.Е. Кичеев

Предлагается новый подход к проектированию сжатых стержней. Сформирован критерий подобия и показана рациональность его применения при проектировании.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N - расчетная осевая сжимающая сила;

L - длина стержня;

E - модуль упругости;

$К_N = N / (L^2E)$ – критерий подобия;

F – площадь поперечного сечения стержня;

H – высота поперечного сечения стержня;

J – момент инерции;

i – радиус инерции;

$C_i = (i / H)^2$ – добротность;

$C_F = F/H^2$ – полнота;

C – коэффициент заделки;

σ – действующее напряжение;

$\sigma_{кр}$ – критическое напряжение;

$\eta = \sigma_{кр} / \sigma$ – запас прочности;

σ_0 – условное критическое напряжение, соответствующее нулевой гибкости стержня;

$\sigma_п$ – предел пропорциональности.

Цель данной работы – привлечь внимание специалистов к проблеме разработки методов проектирования силовых конструкций и их элементов, ориентированных на использование критериев подобия.

В ряде технических дисциплин, например в аэродинамике, критерии подобия находят широкое применение. К сожалению, теория подобия силовых конструкций не создана, хотя имеются некоторые предпосылки. В ряде работ, например в [1], при проектировании сжатых стержней используется понятие «коэффициент напряженности». Он равен отношению усилия в стержне к квадрату его длины. Коэффициент напряженности имеет размерность напряжения и не может служить критерием подобия.

В данной статье на примере простой задачи предпринята попытка выделения критерия подобия и формирования подхода к проектированию с использованием этого критерия.

Ставится задача аналитического определения площади поперечного сечения стержня длиной **L**, сжатого силой **N**. Приняты следующие ограничения:

1. Стержень имеет постоянное по длине поперечное сечение.
2. Материал стержня задан.
3. Форма поперечного сечения стержня выбрана.
4. Дискретность сортамента профилей не учитывается. Площадь поперечного сечения может изменяться непрерывно с сохранением геометрического подобия.
5. Критическое напряжение общей потери устойчивости сжатого стержня не превышает критического напряжения местной потери устойчивости.

Для количественной оценки формы поперечного сечения стержня можно использовать параметр формы [1], равный отношению квадрата радиуса инерции к площади. По нашему мнению, удобнее относить квадрат радиуса инерции к квадрату высоты. Введем следующее обозначение

$$\mathbf{C_i = i^2 / H^2} \qquad (1)$$

Высота поперечного сечения **H** берется в направлении возможного выпучивания стержня при общей потере устойчивости. В дальнейшем параметр $\mathbf{C_i}$ будем называть добротностью. Он характеризует разнос материала относительно нейтральной оси.

Нетрудно убедиться в том, что единственный параметр $\mathbf{C_i}$ не может однозначно определять форму поперечного сечения. Введем второй параметр формы

$$\mathbf{C_F = F / H^2}, \qquad (2)$$

представляющий собой относительную площадь. В дальнейшем параметр
$\mathbf{C_F}$ будем называть полнотой.

Выразим размерные параметры поперечного сечения через безразмерные. Из (1) и (2) имеем

$$\mathbf{i^2 = C_i H^2} \qquad (3)$$

$$\mathbf{F = C_F H^2} \tag{4}$$

Поставленную задачу решаем с использованием условия прочности, которое можно представить в следующем виде

$$\boldsymbol{\sigma_{кр} - \eta\sigma = 0} \tag{5}$$

Запас прочности $\boldsymbol{\eta}$ считаем заданным.

Действующее нормальное напряжение с учетом (4) запишется так

$$\boldsymbol{\sigma = N / F = N / (C_F H^2)} \tag{6}$$

Рассмотрим случай, когда материал стержня работает в условиях упругих деформаций. В этом случае для критического напряжения справедлива формула Эйлера

$$\boldsymbol{\sigma_{кр} = C\pi^2 E / (L / i)^2,} \tag{7}$$

которая с учетом (3) принимает вид

$$\boldsymbol{\sigma_{кр} = C\pi^2 E C_i (H / L)^2.} \tag{8}$$

Подставим (6) и (8) в (5) и решим это уравнение относительно **H**. После простых преобразований получим

$$\boldsymbol{H = L\sqrt[4]{K_N(\eta / CC_iC_F\pi^2)},} \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{K_N = N / (L^2 E).} \tag{10}$$

Безразмерную величину $\mathbf{K_N}$ можно считать критерием подобия. Он включает в себя:

- загружение – **N**;
- характерный размер – **L**;
- характеристику материала – **E**.

Обратим внимание на аналогию с числом Рейнольдса.

Применение критерия $\mathbf{K_N}$ в задачах проектирования имеет такие же преимущества, как и использование критерия **Re** в аэродинамике. Следует иметь в виду, что число $\mathbf{K_N}$ на много порядков меньше числа **Re**.

Искомую площадь поперечного сечения получим при подстановке (9) в (4)

$$\mathbf{F = (L^2 / \pi)\sqrt{K_N \eta C_F /(CC_i)}.} \tag{11}$$

Представляет интерес зависимость критического напряжения от критерия подобия.

Подставим (9) в (8)

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{кр}} \mathbf{= \pi E\sqrt{K_N \eta CC_i / C_F}.} \tag{12}$$

С увеличением критерия $\mathbf{K_N}$ критическое напряжение растет и может превысить предел пропорциональности материала. Определим предельно допустимую величину $\mathbf{K_N}$ из условия применимости формулы Эйлера

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{кр}} \le \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{п}} \tag{13}$$

Отсюда с учетом (12) получим

$$\mathbf{K_N \le \frac{C_F}{\pi^2 \eta CC_i}\left(\frac{\sigma_п}{E}\right)^2} \tag{14}$$

В технической литературе по проектированию нередко встречаются рекомендации без указания границ применимости. Использование критерия подобия при проектировании сжатых стержней даёт принципиальную возможность найти пределы применимости той или иной рекомендации.

Рассмотрим задачу проектирования сжатого стержня минимального веса. Как известно, наилучшим будет кольцевое поперечное сечение.

С целью снижения веса рекомендуется выбирать параметры поперечного сечения из условия равенства критических напряжений общей и местной потери устойчивости. Покажем, что при небольших величинах критерия $\mathbf{K_N}$ данная рекомендация не может быть реализована.

Получим выражения добротности $\mathbf{C_i}$ и полноты $\mathbf{C_F}$ для поперечного сечения тонкостенного трубчатого стержня. Используем приближенную формулу момента инерции из [2, с.76]

$$\mathbf{J = 0{,}4D_{cp}{}^{3}\delta} \tag{15}$$

где $\mathbf{D_{cp}}$ - средний диаметр кольцевого поперечного сечения;

δ - толщина стенки трубчатого стержня.

Площадь кольцевого поперечного сечения

$$\mathbf{F = \pi D_{cp}\delta} \tag{16}$$

По известной формуле выразим радиус инерции через момент инерции и площадь. С учетом (15) и (16) получим

$$\mathbf{i^2 = J / F = (0{,}4 / \pi)D_{cp}{}^2} \tag{17}$$

Перейдем от среднего диаметра к среднему радиусу.

$$\mathbf{R = 0{,}5D_{cp}} \tag{18}$$

За высоту **H** поперечного сечения приближенно можно принять средний диаметр. С учетом (18)

$$\mathbf{H = D_{cp} = 2R} \tag{19}$$

Подставим (16) и (17) в (3) и (4), с учетом (18) и (19) получим

$$\mathbf{C_i = 0{,}4 / \pi; \qquad C_F = \pi\delta / 2R.} \tag{20}$$

Формула критического напряжения общей потери устойчивости с учетом (20) принимает вид

$$\mathbf{\sigma_{кр} = E\sqrt{0{,}8K_N\eta C(R / \delta)}.} \tag{21}$$

Для критического стержня воспользуемся результатами, представленными в [3,с.44].

$$\mathbf{\sigma_{кр} = kE\delta / R,} \tag{22}$$

где:

$$k = (1/\pi)\sqrt[8]{(1000\delta / R)^3}. \qquad (23)$$

Приравниваем выражения (21) и (22), из этого уравнения после простых преобразований и вычислений получим

$$R/\delta = \sqrt[15]{\left[2{,}252/(K_N \eta C)\right]^4}. \qquad (24)$$

Нетрудно убедиться в том, что при небольших величинах критерия K_N величина R/δ измеряется трехзначным числом. Очевидно, что стержень с таким поперечным сечением не может быть применен в реальной конструкции. По-видимому, можно найти интервал критерия K_N, в котором реализуется вышеприведенная рекомендация.

Рассмотрим случай, когда стержень работает в условиях упруго-пластических деформаций, а материал стержня имеет довольно плавный переход упругих деформаций в пластические.

В этом случае для критического напряжения применима формула Джонсона [2, с.291]

$$\sigma_{кр} = \sigma_0[1 - \sigma_0 (L/i)^2 / (4\pi^2 CE)], \qquad (25)$$

которая с учетом (3) принимает вид

$$\sigma_{кр} = \sigma_0[1 - \sigma_0 (L/H)^2 / (4\pi^2 CC_i E)] \qquad (26)$$

Из условия прочности (5) при подстановке в него (6) и (26) имеем

$$H = L \cdot \sqrt{K_N \frac{E\eta}{\sigma_0 C_F} + \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{1}{4\pi^2 CC_i}} \qquad (27)$$

Выражение искомой площади поперечного сечения найдем при подстановке (27) в (4)

$$F = L^2 \cdot \left(K_N \cdot \eta \cdot \frac{E}{\sigma_0} + \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{C_F}{4\pi^2 CC_i} \right) \qquad (28)$$

Полученные результаты могут быть использованы не только при проектировании стержней, но и при проектировании стержневых систем, например, ферм. Если для изолированного стержня усилие в нем считаем известным, то для стержневой системы необходимо определять усилия в стержнях. Если конструкция статически определимая, то усилия в стержнях находятся из уравнений равновесия.

Если конструкция статически неопределимая, то для расчета усилий в стержнях необходимо решать систему канонических уравнений метода сил, которую можно представить в следующем виде

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\dots,n). \tag{29}$$

В дополнение к имеющимся методам [4] решения системы уравнений (29) предлагается следующий подход.

Выполним элементарные преобразования системы уравнений (29): уравнение с порядковым номером **i** умножим на неизвестный пока множитель λ_i. Затем сложим почленно все преобразованные уравнения. В результате получим уравнение разрешающей гиперплоскости

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B; \tag{30}$$

где

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{ij}; \qquad B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i. \tag{31}$$

Выполним спуск по этой гиперплоскости в направлении градиента до точки, в которой уравнение (30) обращается в тождество. В результате получим

$$x_j = A_j B / C \qquad (j = 1,2,\dots n), \tag{32}$$

где

$$C = \sum_{j=1}^{n} A_j^2. \tag{33}$$

Составляем функцию, физический смысл которой очевиден

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \tag{34}$$

Подставим (32) в (34) и учитывая (33), получим

$$\mathbf{\Phi = B^2 / C} \tag{35}$$

Имеем функцию многих переменных

$$\mathbf{\Phi = f(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)} \tag{36}$$

Таким образом, задача решения системы линейных алгебраических уравнений сведена к нахождению вектора **λ**, обеспечивающего максимум функции **Φ.** Эта задача может быть решена известными методами многомерной минимизации.

По-видимому, могут быть созданы специализированные методы, учитывающие специфические особенности функции **Φ**.

С использованием элементов градиентного метода и особенностей функции **Φ** разработана следующая последовательность вычислений.

За вектор **λ** принимаем вектор-столбец свободных членов **b с**истемы уравнений (29). Аналогично (30) и (31) получаем

$$\mathbf{\sum_{i=1}^{n} A_j^{(b)} x_j = B^{(b)},} \tag{37}$$

где

$$A_j^{(b)} = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_{ij}, \qquad B^{(b)} = \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2$$

Здесь и в дальнейшем верхний буквенный индекс означает принятый вариант вектора **λ.**

Вычисляем вектор **d.**

$$\mathbf{d_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_j^{(b)}} \tag{38}$$

За вектор **λ** принимаем вектор **d**. Аналогично предыдущему получаем

$$\mathbf{\sum_{j=1}^{n} A_j^{(d)} x_j = B^{(d)},} \tag{39}$$

где

$$A_j^{(d)} = \sum_{i=1}^{n} d_i \alpha_{ij}, \qquad B^{(d)} = \sum_{i=1}^{n} d_i b_i$$

Формируем однородное уравнение из (37) и (39)

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(1)} x_j = 0, \tag{40}$$

где

$$\alpha_j = A_j^{(b)} B^{(d)} - A_j^{(d)} B^{(b)}$$

Здесь и в дальнейшем верхний числовой индекс означает номер уравнения.

Формируем первое разрешающее уравнение из (37) и (40)

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(1)} x_j = B^{(b)}, \tag{41}$$

где

$$A_j^{(1)} = A_j^{(b)} + \mu \alpha_j^{(1)} \tag{42}$$

Коэффициент μ будет определен в дальнейшем.

Аналогично (32) вектор **x** первого приближения имеет следующий вид

$$x_j^{(1)} = A_j B^{(b)} / C^{(1)} \tag{43}$$

где

$$C^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} [A_j^{(1)}]^2 \tag{44}$$

Решаем задачу нахождения коэффициента μ **,** обеспечивающего мак-симальный шаг первого приближения. Не представляет труда убедиться в том, что максимуму модуля вектора **x** первого приближения соответствует минимум функции $C^{(1)}$. Необходимое условие экстремума функции (44) с учетом (42) имеет следующий вид

$$dC^{(1)} / d\mu = 2 \sum_{j=1}^{n} [A_j^{(b)} + \mu \alpha_j^{(1)}] \alpha_j^{(1)} = 0 \tag{45}$$

отсюда имеем

$$\mu = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(1)} A_j^{(b)} / \sum_{j=1}^{n} [\alpha_j^{(1)}]^2 \tag{46}$$

При вычислении второго и последующих приближений используем информацию предыдущего шага.

Выбираем начало новой системы координат в точке первого приближения. Переходим к новым координатам **z**. Выразим старые координаты через новые

$$\mathbf{x_j = x_j^{(1)} + z_j} \tag{47}$$

Подставим (47) в (29), получим преобразованную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} z_j = f_i, \tag{48}$$

где

$$f_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(1)} \tag{49}$$

Выполняем вычисления аналогично (37) – (40).

За вектор **λ** принимаем вектор-столбец свободных членов **f** системы уравнений (48).

Получаем

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(f)} z_j = B^{(f)} \tag{50}$$

где

$$A_j^{(f)} = \sum_{j=1}^{n} f_i \alpha_{ij}; \qquad B^{(f)} = \sum_{j=1}^{n} f_i^{\,2}$$

Вычисляем вектор **h**

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_j^{(f)} \tag{51}$$

За вектор **λ** принимаем вектор **h**. Получаем

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(h)} z_j = B^{(h)} \tag{52}$$

где

$$A_j^{(h)} = \sum_{j=1}^{n} h_i \alpha_{ij}; \qquad B^{(h)} = \sum_{j=1}^{n} h_i f_i$$

Из уравнений (50) и (52) формируем однородное уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(2)} z_j = 0, \tag{53}$$

где

$$\alpha_j^{(2)} = A_j^{(f)} B^{(h)} - A_j^{(h)} B^{(f)}$$

Используем информацию, полученную на предыдущем шаге. Первое разрешающее уравнение (41) при подстановке в него (47) превращается в однородное

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(1)} z_j = 0 \tag{54}$$

Формируем второе разрешающее уравнение из (50), (53) и (54)

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^{(2)} z_j = B^{(f)}, \tag{55}$$

где

$$A_j^{(2)} = A_j^{(f)} + \mu_1 A_j^{(1)} + \mu_2 \alpha_j^{(2)} \tag{56}$$

Коэффициенты μ_1 и μ_2 определяются в дальнейшем из условия обеспечения максимального шага.

Аналогично (32) вектор **z** первого приближения имеет следующий вид

$$Z_j^{(1)} = A_j^{(2)} B^{(f)} / C^{(2)}, \tag{57}$$

где

$$C^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} [A_j^{(2)}]^2 \tag{58}$$

Решаем задачу нахождения коэффициентов μ_1 и μ_2 аналогично предыдущему (45).

Необходимые условия экстремума функции $C^{(2)}$ (58) с учетом (56) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений.

$$\frac{dC^{(2)}}{d\mu_1} = \mu_1 \sum_{j=1}^{n} [A_j^{(1)}]^2 + \mu_2 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(2)} A_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(1)} A_j^{(f)} = 0$$

(59)

$$\frac{dC^{(2)}}{d\mu_2} = \mu_1 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(2)} A_j^{(1)} + \mu_2 \sum_{j=1}^{n} [\alpha_j^{(2)}]^2 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(2)} A_j^{(f)} = 0$$

Решив эту систему уравнений и подставив найденные значения коэффициентов μ_1 и μ_2 в (56), получим вектор **z** первого приближения (57).

Вектор **x** второго приближения находим суммированием результатов

$$x_j^{(2)} = x_j^{(1)} + z_j^{(1)} \tag{60}$$

Порядок вычислений последующих приближений будет аналогичным.

Кроме строительной механики, предлагаемый подход может быть использован в прикладных задачах, которые сводятся к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Если система линейных алгебраических уравнений имеет матрицу коэффициентов, которая не обладает свойством симметрии относительно главной диагонали, то предварительно выполняется уравновешивание по строкам. При этом необходимо обеспечить равенство углов наклона всех гиперплоскостей, уравнения которых образуют данную систему уравнений.

Если матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений обладает свойством симметрии, то делать уравновешивание по строкам не следует.

По нашему мнению, на основе предлагаемого подхода может быть разработан эффективный алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений.

Возвращаясь к проблеме проектирования сжатых стержней, следует отметить, что полученные результаты могут быть использованы при:

- количественной оценке влияния формы поперечного сечения стержней на вес конструкции;
- оптимизации по весу как стержневых систем, так и некоторых тонкостенных конструкций;
- разработке эффективных систем автоматизированного проектирования.

Список литературы

1. Шэнли Ф.Р. Анализ веса и прочности самолётных конструкций. - М.: Оборонгиз, 1957. – 405с.
2. Астахов М.Ф., Караваев А.В., Макаров С.Я., Суздальцев Я.Я. Справочная книга по расчету самолёта на прочность. – М.: Оборонгиз, 1954. – 702с.
3. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1994. – 371с.
4. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994. – 528с.

Сведения об авторе

Кичеев Валентин Ефимович, старший научный сотрудник ОСКБЭС Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н.

Телефон: (095) 158-44-68, 158-49-09.