УДК 531.391.5;519.254;533.68

Оценки интегральной воронки в динамике летательного аппарата при воздействии неконтролируемых факторов

Зайцев В.В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e-mail: vlad128gp@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются гарантирующие оценки интегральных воронок систем, описывающих движение ЛА при воздействии ограниченных неконтролируемых факторов. Доказаны теоремы об оценке сверху и снизу фазового потока системы, для траекторий, начинающихся в некотором начальном множестве. Обсуждаемые оценки получены с помощью развития метода сравнения для динамических систем, у которых необязательно существуют особые точки в исследуемой части пространства.

Ключевые слова: динамические системы, гарантирующие оценки фазового потока системы, системы сравнения, неконтролируемые факторы, динамика летательных аппаратов.

Математическая постановка задачи

1.Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt}=h(x)+g(x,a);\ x\in R^n; a\in R^p \quad (1)$$

где $(\forall i)\ h_i : R^n \to R^1;\ h_i \in C^1; (\forall i) g_i : R^n \times R^p \to R^1;\ g_i \in C^1(R^n \times R^p)$. Будем считать, что вектор функции f и g известны. На параметр a, наложены ограничения следующего вида

$$(\forall\ i: i=1,2,..,p)\ d_i \le a_i \le s_i \quad (2)$$

для известных констант d_i, s_i

В начальный момент времени известно множество начальных условий G: G$\subset R^n$-являющееся ограниченным связным выпуклым множеством, граница которого ∂G является гладкой. На конечном интервале времени [0,T], для каждого момента времени t требуется получить оценку временного сечения интегральной воронки f_t (G), то есть следующего множества f_t (G)=$\{y|y = x(t, x_o, a) \wedge x_o \in G\}$ для произвольного параметра a, удовлетворяющего ограничениям (2). Задача оценки интегральной воронки рассматривалась в работах [1-7].

В соответствии с [8] (можно доказать также на основании [9]) для конечного момента времени t граница множества f_t (G) (при фиксированном параметре a) диффеоморфна границе множества G. При объединении бесконечного числа множеств f_t(G) для различных параметров a_i, указанный результат не справедлив.

Предположим, что множество f_t(G) для всех рассматриваемых t содержится в некотором компактном связном множестве- D. Будем также предполагать, что в рассматриваемой области система (1) может не иметь особых точек (или не иметь одних и тех же особых точек для различных параметров). К таким системам относятся системы, описывающие движение в баллистике и движение КЛА при входе в атмосферу [8,10-14].

Если параметр a является управлением, то рассматриваемая задача является оцениванием области достижимости [1,3,4,7]. Далее используются следующие обозначения;∂G- граница множества G,

F_c^V={x|$V(x)$=c},$H_c^V = \{x|V(x) \geq c\}$.

Обоснование постановки задачи в динамике ЛА

При движении ЛА на него воздействуют аэродинамические силы и моменты, которые зависят от аэродинамических коэффициентов c_x,c_y, m_z и др. В наиболее простых моделях эти коэффициенты представимы в виде полиномов небольшой степени (наиболее часто не более третьей) от угла атаки [11-12]. Указанные полиномы являются решением задачи аппроксимации экспериментальных данных. Повышение степени полинома может приводить к более точному выражению аэродинамических коэффициентов. Вместе с тем, обсуждаемые коэффициенты являются также функциями параметров атмосферы. Возможны соответствующие эксперименты по уточнению аэродинамических коэффициентов и соответствующие задачи аппроксимации, следовательно, возможно уменьшение соответствующей ошибки, например, следуя [13].

Однако, реальное изменение параметров атмосферы неконтролируемо (отклонение от характеристик стандартной атмосферы). Кроме того на ЛА воздействует ветер. Скорость и ускорение ветрового воздействия зависит от рассматриваемого места, розы ветров конкретного места, от динамики прохождения текущих циклонов и антициклонов в регионе.

Эти обстоятельства приводит к необходимости исследования влияния неконтролируемые факторов в системе (1) при анализе динамики ЛА.

Математический аппарат. Оценивание интегральной воронки системы

Введем функции, с помощью которых будем проводить оценивание и локализацию множества f_t (G).

Назовем пробной функцией Ляпунова (ПФЛ) функцию V(x):$R^n \to R^1$;V$\in$ C^1 ограниченную функцию, поверхности уровня, которой диффеоморфны гиперплоскости.

В соответствии с определением, поверхности уровня являются связным множеством, разделяющим фазовое пространство на две части. Аналог таких функций используется в теории управления в методе барьерных функций [1]. В частном случае функции ПФЛ применяются к отысканию множества достижимости в работе [7], к оцениванию квазиинвариантных множеств [15-17] и др.

Теорема 1. Для любой ПФЛ V: V$\in$ C^1 оценка интегральной воронки f_t(G) для системы (1) при произвольных параметрах a_i; i=1,2,..,p, удовлетворяющих ограничениям (2), имеет следующий вид:

$$(\forall x_0 : x_0 \in G)(\forall t : t \in [0, T])\mathrm{V}(\mathrm{x}(\mathrm{t}, x_0)) \leq y(t, y_0); \tag{3}$$

где y_0 –константа, определяемая формулой:

$y_0 = max_{x \in \partial G}$ V(x); (4)

$y(t, y_0)$- решение системы сравнения (СС):

$\frac{dy}{dt} = h(y)$; $y \in R^1$; (5)

для непрерывно-дифференцируемой функции $h(y)$, удовлетворяющей неравенству: $h(y) \leq R(\mathrm{y})$, и функции $R(\mathrm{y})$, определяемой соотношением

$R(\mathrm{y}) = max_{a: a_i \in [d_i, s_i]} max_{x \in D \cap F_y^V} \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} (f_i(x) + g_i(x, a))$; (6)

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теоремы работы [18], примененной для системы (1) с неконтролируемыми параметрами.

Возможность применения теоремы из [18] основана на справедливости теоремы Важевского [19-20] для функций Ляпунова в виде ПФЛ.

Рассмотрим улучшение оценки множества f_t (G) с помощью нескольких ПФЛ.

Следствие 1.Для некоторой ПФЛ W: W$\in C^1$ оценка множества f_t (G) для произвольного параметра a, удовлетворяющего ограничениям (2), имеет следующий вид:

$(\forall x_0 : x_0 \in G)(\forall t : t \in [0, T])$W(x(t, x_0)) $\leq z(t, z_0)$; (7)

где $z(t, z_0)$- решение системы сравнения

$\frac{dz}{dx} = Q(z, t)$; $z \in R^1$; (8)

при начальных условиях z_0 имеющих вид:

$z_0 = max_{x \in G}$ W(x); (9)

для непрерывно-дифференцируемой функции $Q(z, t)$, удовлетворяющей неравенству

$(\forall t: t \in [0.T])\ Q(z,t) \leq \mathrm{B}(z,t);$ (10)

где функция $B(z,t)$ имеет следующий вид: если $F_z^w \cap H_{y(t,y_0)}^V \neq \emptyset$,то

$$B(z,t) = max_i max_{a_i \in [d_i, s_i]}\ max_{x \in F_z^w \cap H_{y(t,y_0)}^V} \sum \frac{\partial W}{\partial x_i}(f_i(x) + g_i(x, a_i));, \qquad (11)$$

если $F_z^w \cap H_{y(t,y_0)}^V = \emptyset$, то $B(z,t)$=0

для решения $y(t, y_0)$ СС (4) при ПФЛ V в соответствии с теоремой 1.

Доказательство. Оценка (7-11) получена по аналогичным алгоритмам, что и конструкции (4-6). Оценка (7-11) построена для улучшения гарантирующих оценок (4-6), поэтому доказательство следствия 1 вытекает из теоремы 1.

Замечание 1. Следствие 1 улучшает оценку (3-6) при использовании двух ПФЛ. Подобный процесс улучшения оценок возможно проводить с большим количеством ПФЛ.

Замечание 2. Динамическую систему при отсутствии особых точек называют «системой с дрейфом». Для таких систем оценивание квадратичными функциями [1- 3] или автономными функциями с поверхностями уровня, диффеоморфными сфере [6], (диффеоморфнымигранице инвариантного множества [18]), может привести к грубым оценкам. Например, такие оценки получатся в случае о множества f_t (G), не пересекающегося с множеством G, для соответствующего момента времени t. Аналитические оценки множества f_t (G), движущиеся вместе с фазовым потоком системы, можно получить с помощью нескольких ПФЛ, например, с помощью ПФЛ вида W_i=x_i ;i=1,2,..,n.

Замечание 3. Во многих задачах выбор ПФЛ определяется постановкой задачи (см. например, [8]). При выборе нескольких ПФЛ, оценка множества f_t (G) улучшается, а выбор этих ПФЛ определяется стремлением исследователя в улучшении оценок в той или иной области пространства.

Замечание 4. В случае выпуклости множества f_t (G) и для каждого момента времени t построение оценок, обсуждаемых в замечании 2, сколь угодно близких к множеству f_t (G) возможно согласно [21,22], при достаточно большом количестве ПФЛ, хотя бы при малых временах t.

Замечание 5. Приведены оценки множества f_t (G) сверху с помощью ПФЛ. Оценки снизу для рассматриваемого множества аналогичны.

Теорема 2. Оценка временного сечения интегральной воронки f_t (G) при параметрах a,удовлетворяющих ограничениям (2), имеет следующий вид:

$(\forall x_0 : x_0 \in G)(\forall t : t \in [0, T])$ f_t (G) $\in H^V_{y(t,y_0)} \cap H^w_{z(t,y_0)}$

для ПФЛ V,W$\in C^1$, констант y_0, z_0, определяемых формулами (4,9) и

решений y(t.y_0), z(t.z_0) системы сравнения:

$$\frac{dy}{dx} = R(y,z)\,; \frac{dy}{dx} = Q(y,z)$$

для непрерывно – дифференцируемых функций R, Q, определяемых

соотношениями: если $F^w_z \cap H^V_y \neq \emptyset$ и $F^V_y \cap H^W_z \neq \emptyset$,то

$$R(y,z) \geq \ max_i max_{a_i \in [d_i, s_i]} max_{x \in F^w_z \cap H^V_y} \sum \frac{\partial W}{\partial x_i} (f_i(x) + g_i(x, a_i));$$

$$Q(y,z) \geq max_i max_{a_i \in [d_i, s_i]} max_{x \in F^V_y \cap H^W_z} \sum \frac{\partial W}{\partial x_i} (f_i(x) + g_i(x, a_i));$$

если $F^w_z \cap H^V_y = \emptyset$ или $F^V_y \cap H^W_z = \emptyset$, то соответственно $R(y,z)$=0 и

$Q(y,z)$=0.

Доказательство теоремы следует из выполнения условий обобщения теоремы Важевского [19].

Задача оценки влияния неточностей аэродинамических характеристик на поведение фазовых переменных

Алгоритм построения СС и его применение в задаче оценивания ветрового воздействия при посадке ЛА представлен в [23]. Рассмотрим возможности аналитического построения оценок.

Исследуем движение ЛА в вертикальной плоскости. На ЛА воздействует сила веса и аэродинамические силы, тогда, дифференциальные уравнения движения в естественной системе координат имеют следующий вид:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\vartheta - c_x(\alpha)\rho v^2/2 \;;\quad m\,v\frac{d\vartheta}{dt} = -mg\cos\vartheta - c_y(\alpha)\rho v^2/2 \qquad (12)$$

где v-скорость центра масс, m − масса ЛА, ϑ − угол между вектром скорости и линией горизонта, c_x, c_y − аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, α -угол между вектором скорости и продольной осью ЛА. Третье уравнение в дифференциальных уравнениях плоского движения описывает изменения угла тангажа и применяется в общих задачах динамики ЛА [11-13].

Будем считать, что ρ и α постоянны. В этих предположениях исследование системы (11) может представлять интерес для пассажирского лайнера на крейсерском участке, для исследования динамики планера и БПЛА.

Исследуем изменение (влияние неточностей вычисления) отношения аэродинамических коэффициентов c_x/c_y в некотором интервале [b,s] на изменение скорости ЛА. Такие задачи представляют определенный интерес для некоторых ЛА [10,14]. После введения новых переменных в виде:

y=v/σ; τ =g t/ σ , σ^2 =2mg/($c_y\rho$); a=c_x /c_y , уравнения движения (12) записываются в виде:

$$\frac{dy}{d\tau} = -sin\vartheta - ay^2; \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = (-\cos\vartheta + y^2)/y \qquad (13)$$

Особые точки определяются соотношениями

$$\vartheta = \operatorname{arctg}(-a); y = \pm (\frac{1}{1+a^2})^{1/4}$$

При изменении аэродинамических параметров изменяются и особые точки системы. В качестве ПФЛ выберем функцию V=y, тогда

$$\frac{dV}{dt} = -\sin\vartheta - ay^2$$

При изменении угла ϑ в интервале $[0, \pi/2]$ функция $\frac{dV}{dt}$ оценивается в следующем виде (аналогично можно оценить $\frac{dV}{dt}$ на интервале $[-\pi/2, 0]$):

$$-1 - ay^2 \le \frac{dV}{dt} \le -ay^2$$

В связи с теоремой 1, соответствующие системы сравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{du}{dt} = -bu^2; \quad \frac{dz}{dt} = -1 - sz^2; \qquad u, s \in R^1$$

Интегрируя системы сравнения, для решений системы (13) получим

$$1/s \, tg(st + arctg(sy_0)) \le y(t, y_0, \vartheta_0) \le y_0/(1+bt) \qquad (14)$$

Для решений системы (12) гарантирующие оценки (до тех пор пока угол ϑ принадлежит интервалу $[0, \pi/2]$) имеют вид:

$$1/s \, tg(st + arctg(sv_0)) \le v(t, y_0, \vartheta_0) \le v_0/(1+bt)$$

Таким образом, изменение оценок скорости Δv при изменении параметра a в интервале [b,s] вычисляется в соответствии с формулой

$\Delta v = v_0$ t (s-b)/ [(1+bt) (1+bt)]

Используя оценки (14), возможно получить численные оценки изменения угла ϑ и улучшить их в соответствии со следствием 1.

Выводы

1. Неизвестны эффективные оценки фазового потока для систем с дрейфом при немалых размерностях n,p. Оценки фазового потока с помощью эллипсоидов для рассматриваемых систем могут оказаться весьма грубыми (см. замечание 2). Построение СС для общих динамических систем в немалой окрестности инвариантного множества известно в частных случаях для квазилинейных, квазиоднородных, для систем с известными первыми интегралами и др. [2,19,20]. В данной работе строятся СС для нового класса систем (системы с «дрейфом») и рассматриваются вопросы улучшения оценок.

2. В практических исследованиях для решения поставленной задачи используется непосредственное интегрирование по многомерной сетке в фазовом пространстве и пространстве параметров. Проведем сравнение с предлагаемым методом.

2.1. При непосредственном интегрировании возможны известные проблемы интегрирования для так называемых «жестких» систем, проблемы, связанные с существованием неустойчивых кривых системы на множестве малой меры и возможностью катастроф, аналогичных теории бифуркаций при изменении параметров. В предлагаемом подходе указанные проблемы отсутствуют и гарантируется математическая корректность получаемых оценок.

2.2. При непосредственном интегрировании хранение и дальнейшее использование данных большого количества траекторий затруднительно. Для получения аналитических формул, используемых при проектировании ЛА, необходимо решать дополнительные задачи аппроксимации и др.

2.3. При использовании предлагаемого подхода достаточно проинтегрировать лишь один раз СС (3-11) (или несколько раз при улучшении оценок). При непосредственном интегрировании по n p мерной сетке число траекторий (r), которые необходимо просчитать не менее числа n p a/h b/ h_1, где a,b-минимальное ребро описанного n мерного параллелепипеда в множество G и аналогичное расстояние в пространстве параметров, h и h_1 соответствующие шаги сетки в фазовом пространстве и пространстве параметров. В задачах динамики ЛА такое число траекторий может быть весьма большим. Например, в случае плоского движения ЛА может быть n=5, p=3,a=300;b=5. h, h_1=0,01, тогда r$\geq$ 45000000.

3. Методы, предлагаемые в статье, могут применяться в различных задачах динамики ЛА при существенном перепаде высот полета, при существенном изменении параметров атмосферы (например, при прохождении грозового фронта), при изучении влияния неконтролируемых факторов (например, влияния ветрового воздействия при посадке ЛА) при, прохождении атмосферы (пылевых облаков) ЛА или метеоритом. Алгоритмы могут применяться в судостроении и при анализе движения подводных аппаратов. Также отметим задачи управления в условиях неопределенности и задачи дифференциальных игр.

Библиографический список

1. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. - М.: Наука, 1988. - 320 с.

2. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. - М.: Наука, 1977. - 248 с.

3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. - М.: Наука, 1977. - 392 с.

4. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. - М.: Наука, 1985. - 288 с.

5. Зайцев В.В. Применение второго метода Ляпунова для оценки интегральной воронки системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1992. Т.28. №3. С.540-543.

6. Веретенников В.Г., Зайцев В.В. Второй метод Ляпунова. Оценки областей устойчивости и притяжения. - М.: МАИ, 1986. - 72 с.

7. Зайцев В.В. Покоординатные оценки множества достижимости динамической системы // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. №4. С.575-584.

8. Зайцев В.В Приложение теорем, характеризующих свойства интегральных воронок, в задаче баллистики // Сборник статей «Аналитические и численные методы исследования механических систем. - М.: МАИ, 1989. С.4-7.

9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М: Наука, 1971. - 240 с.

10. Ярошевский В.А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов. - М.: Наука, 1988. - 339 с.

11. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1969. - 500 с.

12. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. - М.: Бином, 2013.- 407 с.

13. Окунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А. О движении твердого тела в сопротивляющейся среде // Автоматика и телемеханика. 2013. №8. С.112-120.

14. Зея М., Хлопков А.Ю., Чжо З., Тху Р.Т. Использование локального метода для расчета аэродинамических характеристик гиперзвуковых летательных аппаратов в переходном режиме // Труды МАИ, 2012, вып.53: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=29714

15.Зайцев В.В. Оценки эволюции множеств динамических систем // Сборник статей «Проблемы механики управляемого движения». - Пермь: Пермский университет, 1988. С. 72-78.

16.Зайцев В.В. Построение и локализация квазиинвариантных множеств динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2002. Т.38. №1. С. 11-15.

17. Зайцев В.В. Критерий существования и оценки инвариантных ограниченных множеств системы автономных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1993. Т.29. №5. С.766 -771.

18. Зайцев В.В. Построение систем сравнения в задаче оценивания интегральной воронки динамической системы // Автоматика и телемеханика.1993. №4. С. 62-73.

19. Воронов А.А., Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. - М.: Наука, 1987. - 310 с.

20. Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения. - Киев: Наукова Думка, 1991. - 248 с.

21. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. - М.: Мир, 1989. - 480 с.

22. Бронштейн Е.М., Иванов Л.Д. О приближении выпуклых множеств многогранниками // Сибирский математический журнал. 1975. Т.16. № 5. С.1100-1120.

23. Зайцев В.В. Оценка интегральных воронок при воздействии в динамике ЛА // Тезисы докладов 14 международной конференции «Авиация и космонавтика», Москва, МАИ, 2015, 409-410 с.