УДК 519.624

ОПТИМАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Станислав Сергеевич ДМИТРИЕВ родился в 1983 году в городе Алма-Ате. Аспирант МАИ. Основные научные интересы — в области численных методов. Автор семи научных работ.

Stanislav S. DMITRIEV, was born in 1983, in Alma-Ata. He is a Postgraduate Student at the MAI. His research interests are in numerical methods. He has published 7 technical papers.

Евгений Борисович КУЗНЕЦОВ родился в 1946 г. в городе Ростове-на-Дону. Профессор МАИ. Доктор физико-математических наук, профессор. Основные научные интересы — в области численных методов, задач механики деформируемого твердого тела. Автор более 150 научных работ.

Eugeny B. KUZNETSOV, D.Sci, was born in 1946, in Rostov-on-Don. He is a Professor at the MAI. His research interests are in numerical methods and mechanics of deformable bodies. He has published over 150 technical papers.

Проблема численного решения начальной задачи для системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом исследуется с позиции метода продолжения решения по параметру. Получены необходимые и достаточные условия преобразования этой задачи к наилучшему аргументу, которым является длина дуги, отсчитываемая вдоль интегральной кривой задачи.

1. Введение

Рассмотрим численное решение системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, t); \\ G(y, y_\tau, x, x_\tau, z, z_\tau, t) = 0; \\ F_i\left(t, y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, \dot{z}, z_\tau, \dot{z}_\tau; \right. \\ \left. \displaystyle\int_{t_0}^{t} K_i[x(\xi), y(\xi), z(\xi), \xi] d\xi \right) = 0, \ i = \overline{1, k}, \end{cases} \tag{1.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{gathered} \begin{cases} y(t) = \tilde{y}(t), \quad \dot{y}(t) = \hat{y}(t), \\ x(t) = \tilde{x}(t), \quad \dot{x}(t) = \hat{x}(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0), \\ z(t) = \tilde{z}(t), \quad \dot{z}(t) = \hat{z}(t), \end{cases} \\ y(t_0) = \tilde{y}(t_0) = y_0, \quad x(t_0) = \tilde{x}(t_0) = x_0, \\ z(t_0) = \tilde{z}(t_0) = z_0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$y : R \to R^n, \ x : R \to R^m, \ z : R \to R^k, \ t \in R,$$

$$f : R^{3(n+m+k)+1} \to R^n, \ G : R^{2(n+m+k)+1} \to R^m,$$

$$F : R^{3n+3m+4k+1} \to R^k.$$

Здесь $\tilde{y}(t), \hat{y}(t), \tilde{x}(t), \hat{x}(t), \tilde{z}(t), \hat{z}(t)$ — заданные непрерывные функции, индекс $\tau > 0$ определяет запаздывание аргумента функции, т.е.

$$y_\tau(t) = y(t - \tau), \ x_\tau(t) = x(t - \tau), \ z_\tau(t) = z(t - \tau);$$

$$\dot{y}_\tau(t) = \dot{y}(t - \tau), \ \dot{x}_\tau(t) = \dot{x}(t - \tau), \ \dot{z}_\tau(t) = \dot{z}(t - \tau).$$

Начальные условия должны быть согласованными, т.е. должно выполняться равенство

$$G(y(t_0), y_\tau(t_0), x(t_0), x_\tau(t_0), z(t_0), z_\tau(t_0), t_0) = 0. \tag{1.3}$$

При отсутствии запаздывания $(\tau = 0)$ и интеграла задача (1.1), (1.2) является задачей Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений. Численному решению таких систем посвящено множество работ (см., например, [1, 2]). В работе [3] рассмотрено решение таких систем с позиции метода продолжения по наилучшему параметру.

При отсутствии интеграла и недифференциальных соотношений (вектор-функции G) задача (1.1), (1.2) является начальной задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Численное решение таких задач исследуется, например, в [4, 5]. В работе [6] получено преобразование этой задачи к наилучшему аргументу.

При отсутствии запаздывания и недифференциальных соотношений задача (1.1), (1.2) является начальной задачей для системы интегродифференциальных уравнений. Достаточно полный обзор численных методов решения задач такого типа приводится в [7]. Преобразование такой задачи к наилучшему аргументу получено в [8].

И, наконец, при отсутствии интеграла, задача (1.1), (1.2) представляет собой задачу Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом. Численное решение таких систем с позиции метода продолжения по наилучшему параметру рассмотрено в работе [9].

Однако численное решение задачи (1.1), (1.2) до настоящего времени не изучено.

2. Наилучший аргумент задачи

Пусть интеграл задачи (1.1), (1.2) задается соотношением

$$I(y,x,z,t)=0,\quad I=(I_1,...,I_{n+m+k})^T, \qquad (2.1)$$

которое в $(n+m+k+1)$-мерном евклидовом пространстве $R^{n+m+k+1}$ задает единственную кусочно-гладкую интегральную кривую L.

Процесс построения этой кривой можно рассматривать как задачу определения множества решений системы нелинейных уравнений (2.1), содержащих параметр-аргумент t. Будем решать эту систему методом продолжения по параметру [10]. Пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ являются функциями параметра t, тогда уравнения продолжения строятся дифференцированием (2.1) по параметру t:

$$\frac{\partial I}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial I}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial I}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial I}{\partial t}=0. \qquad (2.2)$$

Для построения кривой множества решений системы (2.1) систему уравнений (2.2) следует разрешить относительно производных

$$\begin{pmatrix} dy/dt \\ dx/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}=-J^{-1}\frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (2.3)$$

Здесь $J=\left[\frac{\partial I}{\partial y}\ \frac{\partial I}{\partial x}\ \frac{\partial I}{\partial z}\right]$ — матрица Якоби системы уравнений (2.1).

Существенные вычислительные трудности будут возникать в тех точках кривой множества решений системы уравнений (2.1), где якобиан $\det(J)$ становится малым. В тех точках, в которых якобиан обращается в ноль, эти трудности становятся непреодолимыми. Следовательно, встает вопрос о смене параметра продолжения и о выборе наилучшего, в некотором смысле, параметра продолжения решения системы (2.1), а значит, и наилучшего аргумента системы (1.1).

Пусть, величины y, x, z, t являются функциями некоторого аргумента μ, отсчитываемого от начальной точки задачи. Будем вводить наилучший аргумент локально, т.е. в малой окрестности каждой точки интегральной кривой L. Чтобы найти наилучший аргумент, введем в окрестности рассматриваемой точки параметр μ так, что

$$d\mu = \\ =\sum_{i=1}^{n}\alpha_i dy_i+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{j+n}dx_j+\sum_{l=1}^{k}\alpha_{l+n+m}dz_l+\alpha_{n+m+k+1}dt, \qquad (2.4)$$

где α_s $(s=\overline{1,n+m+k+1})$ — компоненты единичного вектора $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_{n+m+k+1})^T\in R^{n+m+k+1}$, задающего направление оси, вдоль которой отсчитывается аргумент μ.

Поскольку интеграл (2.1) до решения задачи (1.1), (1.2) неизвестен, уравнения продолжения решения не могут быть получены дифференцированием (2.1) по параметру μ.

Уравнения продолжения могут быть получены иначе. Линеаризуем вектор-функцию F относительно $\dot z_i$ в окрестности некоторых значений $\dot z_i=\dot z_i^*$, полученных, например, на предыдущем шаге процедуры интегрирования, тогда

$$F^*+\sum_{i=1}^{k}F^*_{,\dot z_i}(\dot z_i-\dot z_i^*)=0.$$

Здесь функции F^* и $F^*_{,\dot z_i}$ вычисляются при $\dot z_i=\dot z_i^*$.

С учетом обозначений

$$y_{i,\mu}=dy_i/d\mu,\ x_{i,\mu}=dx_i/d\mu,\ z_{i,\mu}=dz_i/d\mu,\ t_{,\mu}=dt/d\mu,$$
$$G_{,y}=\partial G/\partial y,\ G_{,x}=\partial G/\partial x,\ G_{,z}=\partial G/\partial z,\ G_{,t}=\partial G/\partial t,$$

принимая во внимание равенства

$$\dot y_i=\frac{dy_i}{dt}=\frac{dy_i/d\mu}{dt/d\mu}=\frac{y_{i,\mu}}{t_{,\mu}},\quad \dot y_i^*=\frac{y^*_{i,\mu}}{t^*_{,\mu}},$$

а также разделив равенство (2.4) и первое уравнение системы (1.1) на $d\mu$ и продифференцировав вектор-функцию G по μ, придем к системе уравнений продолжения

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_{i,\mu} + \sum_{j=1}^{m}\alpha_{j+n} x_{j,\mu} + \sum_{l=1}^{k}\alpha_{l+n+m} z_{l,\mu} + \\ +\alpha_{n+m+k+1} t_{,\mu} = 1; \\ y_{,\mu} - f t_{,\mu} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} G_{,y_i} y_{i,\mu} + \sum_{j=1}^{m} G_{,x_j} x_{j,\mu} + \sum_{l=1}^{k} G_{,z_l} z_{l,\mu} + \\ +(G_{,t} + \sum_{i=1}^{n} G_{,y_{i\tau}} \dot{y}_{i\tau} + \sum_{j=1}^{m} G_{,x_{j\tau}} \dot{x}_{j\tau} + \sum_{l=1}^{k} G_{,z_{l\tau}} \dot{z}_{l\tau}) t_{,\mu} = 0; \\ \sum_{l=1}^{k} F^*_{,\dot{z}_i} t^*_{,\mu} z_{i,\mu} + (F^* t^*_{,\mu} - \sum_{l=1}^{k} F^*_{,\dot{z}_i} z^*_{i,\mu}) t_{,\mu} = 0. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Начальные условия примут вид

$$\begin{cases} y(\mu) = \tilde{y}(\mu), \quad \dot{y}(\mu) = \hat{y}(\mu); \\ x(\mu) = \tilde{x}(\mu), \quad \dot{x}(\mu) = \hat{x}(\mu), \quad \mu \in [-\mu_\tau, 0); \\ z(\mu) = \tilde{z}(\mu), \quad \dot{z}(\mu) = \hat{z}(\mu); \end{cases} \qquad (2.6)$$
$$y(0) = y_0,\ x(0) = x_0,\ z(0) = z_0,\ t(0) = t_0,$$

где величина μ_τ находится из решения уравнения $t_0 - \tau = t(-\mu_\tau)$.

В условиях (2.6) переменная μ отсчитывается от начальной точки задачи (1.1), (1.2).

Для нахождения интегральной кривой задачи (2.5), (2.6), которая также является решением задачи (1.1), (1.2), систему (2.5) необходимо разрешить относительно производных $y_{i,\mu}$, $x_{j,\mu}$, $z_{l,\mu}$, $t_{,\mu}$. Успех этой операции зависит от обусловленности системы. Обусловленность же зависит от выбора параметра μ, который определяется вектором α.

В качестве меры обусловленности системы линейных уравнений примем значение $|D|$ — абсолютную величину определителя этой системы, деленную на произведение квадратичных норм его строк [11]:

$$D = \frac{\Delta}{\prod_{i=1}^{n+m+k+1} (d_i d_i)^{1/2}},$$

где Δ — определитель матрицы системы; d_i — строка матрицы.

Величина D удовлетворяет условию $0 \le |D| \le 1$. Чем больше $|D|$, тем лучше система обусловлена. Значение $D = 0$ соответствует вырожденной матрице, а $|D| = 1$ означает, что система уравнений, в терминологии [11], является идеально обусловленной.

Определение. Назовем наилучшим такой аргумент задачи, который доставляет системе уравнений (2.5) наилучшую обусловленность, т.е. наибольшее абсолютное значение мере обусловленности $D(\alpha_1, ..., \alpha_{n+m+k+1})$.

Разложим определитель системы (2.5) по элементам первой строки:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n+m+k+1} (-1)^{i+1} \alpha_i \Delta_i, \qquad (2.7)$$

где Δ_i — определитель, получающийся при вычеркивании в матрице системы последних $n+m+k$ уравнений i-го столбца. Решение системы (2.5) по правилу Крамера можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_{i,\mu} &= (-1)^{i+1} \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n}; \\ x_{j,\mu} &= (-1)^{n+j+1} \frac{\Delta_{n+j}}{\Delta}, \quad j = \overline{1,m}; \\ z_{l,\mu} &= (-1)^{n+m+l+1} \frac{\Delta_{n+m+l}}{\Delta}, \quad l = \overline{1,k}; \\ t_{,\mu} &= (-1)^{n+m+k+2} \frac{\Delta_{n+m+k+1}}{\Delta}. \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Теорема. *Для того чтобы задачу Коши (1.1), (1.2) для системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом преобразовать к наилучшему аргументу, необходимо и достаточно выбрать в качестве такого длину дуги* λ*, отсчитываемую вдоль интегральной кривой задачи. При этом задача (1.1), (1.2) преобразуется к виду (2.8), (2.6), где аргумент* $\mu = \lambda$ *отсчитывается от начальной точки задачи (1.1), (1.2).*

Доказательство. *Необходимость.* Исследуем на экстремум величину D как функцию компонентов α_i, $i = \overline{1, n+m+k+1}$, которая для матрицы системы (2.5) представляется в виде

$$D(\alpha_1, ..., \alpha_{n+m+k+1}) = \frac{\Delta}{d}.$$

Здесь $d = d_1 d_2 \dots d_{n+1} > 0$;

$$d_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+m+k+1} \alpha_i^2} = 1; \quad d_{\beta+1} = \sqrt{1 + f_\beta^2}, \quad \beta = \overline{1,n};$$

$$d_{s+n+1} = \left[\sum_{i=1}^{n} G_{s,y_i}^2 + \sum_{j=1}^{m} G_{s,x_j}^2 + \sum_{l=1}^{k} G_{s,z_l}^2 + \right.$$
$$\left. + \left(G_{s,t} + \sum_{i=1}^{n} G_{s,y_{i\tau}} \dot{y}_{i\tau} + \sum_{j=1}^{m} G_{s,x_{j\tau}} \dot{x}_{j\tau} + \sum_{l=1}^{k} G_{s,z_{l\tau}} \dot{z}_{l\tau} \right)^2 \right]^{1/2},$$
$$s = \overline{1,m};$$

$$d_{p+n+m+1}=\sqrt{\sum_{l=1}^{k}(F^*_{p,\dot z_l}t^*_{,\mu})^2+\left(F^*_p t^*_{,\mu}-\sum_{l=1}^{k}F^*_{p,\dot z_l}z^*_{l,\mu}\right)^2},\ p=\overline{1,k}.$$

Так как α — единичный вектор, то $d_1=1$. Таким образом, величина d не зависит от α_i, $i=\overline{1,n+m+k+1}$.

Для нахождения экстремума функции D при условии $\alpha\cdot\alpha=1$ составим функцию Лагранжа, учитывая выражение (2.7) для Δ:

$$L=\sum_{i=1}^{n+m+k+1}(-1)^{i+1}\alpha_i\frac{\Delta_i}{d}+\gamma\left(1-\sum_{i=1}^{n+m+k+1}\alpha_i^2\right),$$

где γ — неопределенный множитель Лагранжа.

Запишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha_k}=(-1)^{k+1}\frac{\Delta_k}{d}-2\gamma\alpha_k=0,\ k=\overline{1,n+m+k+1},$$

откуда получим, что экстремум функции Лагранжа достигается при $\alpha_k=(-1)^{k+1}\dfrac{\Delta_k}{2\gamma d}$.

Подставив эти значения α_k в условие $\alpha^2=1$, найдем множитель Лагранжа:

$$\gamma=\pm\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+m+k+1}\Delta_i^2}}{2d}. \tag{2.9}$$

Таким образом, экстремум функции Лагранжа достигается при

$$\alpha_k=\pm(-1)^{k+1}\frac{\Delta_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+m+k+1}\Delta_i^2}},\quad k=\overline{1,n+m+k+1}. \tag{2.10}$$

Если эти выражения для α_k подставить в равенство (2.7), то получаем, что определитель системы (2.5) должен удовлетворять соотношению

$$\Delta=\pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n+m+k+1}\Delta_i^2} \tag{2.11}$$

и экстремум функции Лагранжа достигается при значениях

$$\alpha_k=(-1)^{k+1}\frac{\Delta_k}{\Delta}. \tag{2.12}$$

Сравнивая (2.8) и (2.12), видим, что имеют место равенства

$$\begin{aligned}&\alpha_i=y_{i,\mu},\quad i=\overline{1,n},\quad \alpha_{j+n}=x_{j,\mu},\ j=\overline{1,m};\\ &\alpha_{l+n+m}=z_{l,\mu},\ l=\overline{1,k},\quad \alpha_{n+m+k+1}=t_{,\mu},\end{aligned} \tag{2.13}$$

которые означают, что направление, в котором отсчитывается наилучший аргумент, должно быть касательным к интегральной кривой задачи (1.1), (1.2).

С учетом соотношений (2.13) равенство (2.4) можно представить в виде

$$d\mu^2=\sum_{i=1}^{n}dy_i^2+\sum_{j=1}^{m}dx_j^2+\sum_{l=1}^{k}dz_j^2+dt^2. \tag{2.14}$$

Согласно (2.9), (2.11), значение множителя Лагранжа будет

$$\gamma=\frac{\Delta}{2d}=\frac{D}{2}. \tag{2.15}$$

Анализ второго дифференциала функции Лагранжа показывает, что в этом случае модуль функции $D=\dfrac{\Delta}{d}$ принимает наибольшее значение. Действительно, знак второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2L=-2\gamma\sum_{i=1}^{n+m+k+1}d\alpha_i^2$$

определяется множителем Лагранжа γ, который согласно формуле (2.15) положителен, если $D>0$, и, следовательно, функция D принимает наибольшее значение, и отрицателен, если $D<0$, и, следовательно, функция D принимает наименьшее значение.

Таким образом, при значениях α_k, вычисляемых по формулам (2.10), величина меры обусловленности $|D|$ достигает наибольшего значения и система (2.5) будет наилучшим образом обусловлена, что и требовалось доказать.

Достаточность. Выберем в качестве параметра продолжения решения μ длину дуги, вычисляемую вдоль интегральной кривой задачи (1.1), (1.2). Вектор τ, касательный к этой кривой, равен

$$\tau=(y_{1,\mu},\ldots,y_{n,\mu},x_{1,\mu},\ldots,x_{m,\mu},z_{1,\mu},\ldots,z_{k,\mu},t_{,\mu})^T.$$

Вектор α определяет направление продолжения решения задачи (1.1), (1.2), поэтому он в силу выбранного параметра продолжения должен быть коллинеарен вектору τ. Но они не только коллинеарны, но и равны, так как вектор τ, как и α, является единичным. Действительно, дифференциал длины интегральной кривой должен удовлетворять равенству (2.14). Разделив обе части этого равенства на $(d\mu)^2$, получим

$$1=\sum_{i=1}^{n} y_{i,\mu}^2+\sum_{j=1}^{m} x_{j,\mu}^2+\sum_{l=1}^{k} z_{l,\mu}^2+t_{,\mu}^2=\tau^2.$$

Из равенства векторов следует равенство компонент (2.13).

Компоненты

$$y_{i,\mu},\ x_{j,\mu},\ z_{l,\mu},\ t_{,\mu}\ (i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m},\ \ l=\overline{1,k})$$

при любом параметре продолжения μ должны удовлетворять системе линейных уравнений (2.5), т.е. определяться в соответствии с формулами (2.8). Из соотношений (2.13) и (2.8) вытекают равенства (2.12), левая часть которых доставляет наибольшее значение функции $|D|$, т.е. наилучшую обусловленность системе (2.5), что и требовалось доказать.

3. Непрерывное продолжение по наилучшему аргументу

Рассмотрим систему интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=f(y,y_\tau,\dot{y}_\tau,x,x_\tau,\dot{x}_\tau,z,z_\tau,\dot{z}_\tau,t); \\ G(y,y_\tau,x,x_\tau,z,z_\tau,t)=0; \\ \dfrac{dz_l}{dt}=F_l\left(t,y,y_\tau,\dot{y}_\tau,x,x_\tau,\dot{x}_\tau,z,z_\tau,\dot{z}_\tau,\right. \\ \left.\displaystyle\int_{t_0}^{t} K_l[x(\xi),y(\xi),z(\xi),\xi]d\xi\right),\quad l=\overline{1,k} \end{cases} \qquad (3.1)$$

с начальными условиями (1.2).

Здесь

$$y:R\to R^n,\quad x:R\to R^m,\quad z:R\to R^k,\quad t\in R,$$

$$f:R^{3(n+m+k)+1}\to R^n, G:R^{2(n+m+k)+1}\to R^m,$$

$$F:R^{3(n+m+k)+1}\to R^k.$$

Начальные условия должны быть согласованными, т.е. должно выполняться равенство (1.3).

Рассмотрим сначала решение задачи (3.1), (1.2) без преобразования ее к наилучшему аргументу, используя подход, названный непрерывным продолжением, основанный на дифференцировании недифференциальных соотношений. Идея такого подхода, по-видимому, впервые была предложена в работах [12, 13].

Для этого продифференцируем вектор-функцию G по t и запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_i-f_i=0; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} G_{,y_i}\dot{y}_i+\sum_{j=1}^{m} G_{,x_j}\dot{x}_j+\sum_{l=1}^{k} G_{,z_l}\dot{z}_l+ \\ \displaystyle+\sum_{i=1}^{n} G_{,y_{i\tau}}\dot{y}_{i\tau}+\sum_{j=1}^{m} G_{,x_{j\tau}}\dot{x}_{j\tau}+\sum_{l=1}^{k} G_{,z_{l\tau}}\dot{z}_{l\tau}+G_{,t}=0; \\ \dot{z}_l-F_l=0,\quad i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m},\ \ l=\overline{1,k}. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Разрешив систему (3.2) относительно производных ($\dot{y}_i,\ \dot{x}_j,\ \dot{z}_l$), получим систему уравнений в нормальном виде

$$\dot{y}_i=\Phi_{y_i},\quad \dot{x}_j=\Phi_{x_j},\quad \dot{z}_l=\Phi_{z_l}, \qquad (3.3)$$

где $\Phi_{y_i}=\dfrac{\Delta_{y_i}}{\Delta};\ \ \Phi_{x_j}=\dfrac{\Delta_{x_j}}{\Delta};\ \ \Phi_{z_l}=\dfrac{\Delta_{z_l}}{\Delta}.$

Здесь Δ — определитель матрицы системы (3.2):

$$\Delta=\begin{vmatrix} E & 0 & 0 \\ G_{,y} & G_{,x} & G_{,z} \\ 0 & 0 & E \end{vmatrix}=\left|G_{,x_j}\right|;$$

Δ_{y_i} — определитель, полученный заменой в матрице системы i-го столбца; Δ_{x_j} — заменой $(n+j)$-го столбца; Δ_{z_l} — заменой $(n+m+l)$-го столбца столбцом свободных членов (вектором правой части системы (3.2)).

Систему (3.3) следует решать при начальных условиях (1.2).

Теперь рассмотрим решение задачи (3.1), (1.2), преобразованной к наилучшему аргументу λ.

Пусть кривая, задаваемая функциями $y=y(\lambda)$, $x=x(\lambda)$, $z=z(\lambda)$, $t=t(\lambda)$, является гладкой. Обозначим

$$\begin{gathered} dy/d\lambda=Y,\ dx/d\lambda=X,\ dz/d\lambda=Z,\ dt/d\lambda=T; \\ Y=(Y_1,\ldots,Y_n)^T,\quad X=(X_1,\ldots,X_m)^T; \\ Z=(Z_1,\ldots,Z_k)^T. \end{gathered} \qquad (3.4)$$

После дифференцирования по λ вектор-функции G с учетом (3.4) и смысла наилучшего аргумента система (3.1) примет вид

$$
\begin{cases}
Y_i - f_i T = 0; \\
\sum_{i=1}^{n} G_{,y_i} Y_i + \sum_{j=1}^{m} G_{,x_j} X_j + \sum_{l=1}^{k} G_{,z_l} Z_l + \\
+\left(\sum_{i=1}^{n} G_{,y_{i\tau}} \dot{y}_{i\tau} + \sum_{j=1}^{m} G_{,x_{j\tau}} \dot{x}_{j\tau} + \sum_{l=1}^{k} G_{,z_{l\tau}} \dot{z}_{l\tau} + G_{,t} \right) T = 0; \\
Z_l - F_l T = 0; \\
\sum_{i=1}^{n} Y_i Y_i + \sum_{j=1}^{m} X_j X_j + \sum_{l=1}^{k} Z_l Z_l + TT = 1; \\
i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,k}.
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

Первые три уравнения этой системы с точностью до постоянного множителя задают в пространстве $R^{n+m+k+1}:\{y,x,z,t\}$ вектор, касательный к интегральной кривой. Четвертое уравнение определяет то обстоятельство, что этот вектор является единичным. Из-за этого уравнения система (3.5) является нелинейной. Для того чтобы избежать трудностей, связанных с ее решением, можно при нахождении решения в s-й точке интегральной кривой взять в качестве вектора α вектор, касательный к интегральной кривой в предыдущей ($s-1$)-й точке [10]. При достаточно малом шаге интегрирования $\Delta\lambda = \lambda_s - \lambda_{s-1}$ этот вектор будет близок к вектору, обеспечивающему наилучший аргумент задачи, а после нормировки его к единице будет удовлетворяться и последнее уравнение системы (3.5). Обозначим через $W^* = (Y^*, X^*, Z^*, T^*)$ единичный вектор решения размерности $(n+m+k+1)$, вычисленный на предыдущем шаге процедуры интегрирования. Тогда систему (3.5) в s-й точке интегральной кривой можно записать в виде

$$
\begin{cases}
Y_i - f_i T = 0; \\
\sum_{i=1}^{n} G_{,y_i} Y_i + \sum_{j=1}^{m} G_{,x_j} X_j + \sum_{l=1}^{k} G_{,z_l} Z_l + \\
+\left(\sum_{i=1}^{n} G_{,y_{i\tau}} \dot{y}_{i\tau} + \sum_{j=1}^{m} G_{,x_{j\tau}} \dot{x}_{j\tau} + \sum_{l=1}^{k} G_{,z_{l\tau}} \dot{z}_{l\tau} + G_{,t} \right) T = 0; \\
Z_l - F_l T = 0; \\
\sum_{i=1}^{n} Y_i^* Y_i + \sum_{j=1}^{m} X_j^* X_j + \sum_{l=1}^{k} Z_l^* Z_l + T^* T = 1; \\
i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,k}.
\end{cases}
\tag{3.6}
$$

Последнее уравнение системы (3.6) представляет собой скалярное произведение векторов W и W^*, касательных к интегральной кривой на s-м и $(s-1)$-м шагах соответственно. Это уравнение утверждает, что проекция вектора W на направление единичного вектора W^* равна единице.

Очевидно, что вектор W, удовлетворяющий системе линейных уравнений (3.6), вообще говоря, не будет единичным, как этого требует последнее уравнение системы (3.5), поэтому вектор W, найденный из системы (3.6), следует нормировать по формулам

$$
\widetilde{W}_i = \frac{W_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+m+k+1} W_j^2}}, \quad i = \overline{1, n+m+k+1}. \tag{3.7}
$$

Таким образом, после преобразования к наилучшему аргументу мы приходим к системе (3.4), которую следует интегрировать при начальных условиях

$$
\begin{cases}
y(\lambda) = \tilde{y}(\lambda), \quad \dot{y}(\lambda) = \hat{y}(\lambda), \\
x(\lambda) = \tilde{x}(\lambda), \quad \dot{x}(\lambda) = \hat{x}(\lambda), \qquad \lambda \in [-\lambda_\tau, 0), \\
z(\lambda) = \tilde{z}(\lambda), \quad \dot{z}(\lambda) = \hat{z}(\lambda),
\end{cases}
\tag{3.8}
$$
$$
y(0) = y_0, \quad x(0) = x_0, \quad z(0) = z_0, \quad t(0) = t_0,
$$

где величина λ_τ находится из решения уравнения $t_0 - \tau = t(-\lambda_\tau)$.

Правые части системы (3.4) определяются из решения системы линейных уравнений (3.6) с последующей нормировкой по формулам (3.7).

Принципиальной особенностью систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом является наличие у аналитического решения начальной задачи угловых точек — точек, в которых производные решения, начиная с некоторого порядка, не являются непрерывными функциями. Этот факт может иметь место вне зависимости от гладкости правой части уравнений и начальных функций, а устраняется, только если начальные функции удовлетворяют специальным условиям согласования [14]. Причем, так как в систему (3.1) входят дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом нейтрального типа [15], то при численном интегрировании задачи гладкость решения улучшаться не будет.

Построение надежного алгоритма численного решения начальной задачи для системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом требует для обеспечения необходимого порядка гладкости создания методики учета недостаточной гладкости точного решения. Наиболее эффективной и распространенной методикой из известных является включение угловых точек в число точек сетки численного интегрирования. Такой подход позволяет сохранить порядки используемого метода интерполяции решения в момент с запаздыванием и адаптируемого метода численного интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что если значения в угловых точках, соответствующих переменной t решения системы уравнений (1.1), могут быть определены до начала решения, то их значения, соответствующие переменной λ, не могут быть определены до начала решения, поскольку вид зависимости $t(\lambda)$ неизвестен [16].

Для численного решения системы дифференциальных уравнений применялись метод Эйлера и интерполяционные полиномы Лагранжа.

Так как погрешность интерполирования существенно зависит от гладкости функции [17], узлы интерполирования выбирались так, чтобы между ними не было угловых точек.

4. Дискретное продолжение по наилучшему аргументу

Рассмотрим задачу Коши для системы интегро-дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом (3.1), (1.2). В силу гладкости интегральной кривой функции $y = y(\lambda)$, $x = x(\lambda)$, $z = z(\lambda)$, $t = t(\lambda)$ являются дифференцируемыми.

Введем следующие обозначения: $x_{(i)} = x(\lambda_i)$, $y_{(i)} = y(\lambda_i)$, $z_{(i)} = z(\lambda_i)$, $t_{(i)} = t(\lambda_i)$ — приближенное значение решения, соответствующее параметру $\lambda = \lambda_i$; $\Delta\lambda_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$ — длина шага по параметру λ.

Рассмотрим решение задачи (3.1), (1.2) с использованием дискретного продолжения, идея которого, по-видимому, впервые была предложена в работах [18, 19]. Сформулируем задачу дискретного продолжения относительно наилучшего параметра λ [20]. В этом случае решение (y, x, z, t) на $(i+1)$-м шаге в точке, соответствующей параметру $\lambda = \lambda_{i+1}$, будем искать, решая следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\lambda} - f(y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, t)\dfrac{dt}{d\lambda} = 0; \\ G(y, y_\tau, x, x_\tau, z, z_\tau, t) = 0; \\ \dfrac{dz_l}{d\lambda} - F_l\left(t, y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau,\right. \\ \left.\displaystyle\int_{t_0}^{t} K_l[x(\xi), y(\xi), z(\xi), \xi]d\xi\right)\dfrac{dt}{d\lambda} = 0, \ l = \overline{1,k}; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m}(x_j - x_j^{(i)})^2 + \sum_{j=1}^{n}(y_j - y_j^{(i)})^2 + \\ +\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(z_j - z_j^{(i)})^2 + (t - t^{(i)})^2 - \Delta\lambda_i^2 = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

преобразованную к конечно-разностному виду и удовлетворяющую начальным условиям (3.8).

5. Результаты численного эксперимента

Рассмотрим результаты численного решения, полученные при помощи методов непрерывного и дискретного продолжения. В непрерывном продолжении систему (3.4) будем интегрировать при помощи явного метода Эйлера. В дискретном продолжении производные будем аппроксимировать конечными разностями первого порядка, а получившуюся систему нелинейных уравнений решать при помощи метода Ньютона, причем будем делать только одну итерацию.

Пример. Рассмотрим решение системы интегро-дифференциально-алгебраических уравнений без запаздывания

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1(t) + y_2(t) + \displaystyle\int_0^t (y_2(\xi) - x(\xi))d\xi + 2e^t + te^t; \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_2(t) - x(t) + te^t + 4e^{3t} - 6e^{4t}; \\ x(t) - y_2(t) - e^t(t+1) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

с начальными условиями

$$y_1(0) = 1, \ y_2(0) = 2, \ x(0) = 1. \quad (5.2)$$

Данная задача имеет точное решение

$$\begin{gathered} y_1(t) = -e^t + 2e^{3t} + te^t - e^{4t}; \\ y_2(t) = e^t + 2e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}; \\ x(t) = e^t + 2e^{3t} - 2e^{4t}. \end{gathered} \quad (5.3)$$

Поскольку известно точное решение, мы можем вычислить погрешность как модуль разности между точным и численным решением. Общую погрешность будем вычислять по формуле

$$\Delta=\sqrt{\Delta_{y_1}^2+\Delta_{y_2}^2+\Delta_x^2}, \qquad (5.4)$$

где $\Delta_{y_1}, \Delta_{y_2}, \Delta_x$ — погрешности для y_1, y_2 и x соответственно.

Задача (5.1), (5.2), преобразованная к наилучшему аргументу, решалась при помощи методов непрерывного и дискретного продолжения с постоянным шагом $h=0{,}01$. Общая погрешность для обоих методов, вычисленная по формуле (5.4), практически одинакова и в точке $t=1$ составляет $0{,}057$ для непрерывного продолжения и 0,055 для дискретного продолжения. При этом невязка (модуль третьего уравнения системы (5.1)) на несколько порядков меньше в методе дискретного продолжения, что объяснимо, поскольку в дискретном продолжении система нелинейных уравнений, в которую входит третье уравнение системы (5.1), не дифференцируется, а решается методом Ньютона.

Выводы

Предложенное преобразование обладает рядом достоинств, отмеченных для систем дифференциально-алгебраических уравнений в [3], а для систем дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом в [9].

Численные результаты показали, что дискретное продолжение обладает несколько большей точностью. При этом важным преимуществом дискретного продолжения является то, что, в отличие от непрерывного продолжения, для нахождения решения нет необходимости в дифференцировании недифференциальных соотношений.

Summary

A numerical solution of initial value problem for nonlinear systems of integro-differential-algebraic equations with delay argument is investigated using the method of solution continuation with respect to a parameter. Necessary and sufficient conditions are proved to transform the problem to the optimal argument. The optimal argument is the arc length counted along the integral curve of the problem. Numerical examples demonstrate efficiency of this approach.

Библиографический список

1. *Gear C.W.* Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations // IEEE Trans. Circuit Theory. 1971. CT.18. №1. P. 89-95.

2. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.

3. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Решение дифференциально-алгебраических уравнений с выбором наилучшего аргумента // Журнал выч. математ. и математич. физики. 1997. Т.37. №6. С.711-722.

4. *Jackievicz Z., Kwapisz M.* The numerical solution of functional differential equations, a survey // Rocz. PTM. Ser.3. 1991. V.33. P.57-78.

5. *Ким А.В., Пименов В.Г.* *i*-гладкий анализ и численные методы решения функционально — дифференциальных уравнений. — Ижевск: Изд-во PXD R&C Dynamics, 2004.

6. *Кузнецов Е.* Преобразование уравнений с запаздывающим аргументом к наилучшему аргументу // Мат. заметки. 1998. Т. 63. Вып. 1. С. 62-68.

7. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Ред. Дж. Холл, Дж. Уатт. — М.: Мир, 1979.

8. *Кузнецов Е.Б.* Об одной формулировке задачи Коши для интегродифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. 1995. Т.50. Вып. 3(303). С.149-150.

9. *Кузнецов Е.Б., Микрюков В.Н.* Численное интегрирование системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Журнал выч. математ. и математич. физики. 2007. Т.47. 1. С.83-95.

10. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. (Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publisher, 2003.)

11. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.

12. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // ДАН СССР. 1953. Т. 88. №4. С. 601-602.

13. *Давиденко Д.Ф.* О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. мат. журн. 1953. Т. 5. 2. С. 196-206.

14. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.

15. *Каменский Г.А.* Общая теория уравнений с отклоняющимся аргументом // ДАН СССР. 1958. Т.120. №4. С.697 — 700.

16. *Feldstein A., Neves K.W.* High order methods for state — dependent delay differential equations with

nonsmooth solutions // SIAM J. Numer. Analys. 1984. V.21. P.844-863.

17. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987.

18. *Lahaye M.E.* Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Compter Rendus hebdomataires des seances de L' Academie des sciences. 1934. V. 198. №21. P. 1840-1842.

19. *Lahaye M.E.* Solution of systems of transcendental equations // Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sci. 5. 1948. P.805-822.

20. *Кузнецов Е.Б.* Наилучшая параметризация при построении кривых // Журнал выч. математ. и математич. физики. 2004. Т.44. №9. С.1540-1551. 746-748.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 06-08-00371 и 06-01-00239).

Московский авиационный институт

Статья поступила в редакцию 09.10.2007