

УДК 539.3

Теория теплового удара в моделях динамической термоупругости

Е.В. Ненахов¹, Э.М. Карташов²

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, 125993, Россия

²Московский технологический университет (Институт тонких химических технологий),
Москва, 119454, Россия

e-mail: newnew94@mail.ru; kartashov@mitht.ru

Поступила в редакцию 12.02.2019

После доработки 13.02.2019

Принята к публикации 13.02.2019

Изучена проблема теплового удара твердого тела на основе модели динамической термоупругости. Предложена краткая схема вывода уравнения совместности в напряжениях для динамических задач, обобщающее известное соотношение Бельтрами–Митчелла для квазистатических случаев. Выделен класс задач, в которых учет геометрических размеров конструкции, исследуемой на термомеханическую реакцию в условиях интенсивного нагрева, касается главным образом приповерхностных слоев. Исследована термическая реакция массивного тела при нагреве его границы нестационарным тепловым потоком экспоненциального и линейного вида, а также при действии внутреннего источника теплоты – практически важные случаи в теории термической прочности. Описан малоизученный в термомеханике эффект релаксации материала на внезапный нагрев и внезапное охлаждение его границы. Установлена зависимость максимума внутренних температурных напряжений от параметров, характеризующих упругие и теплофизические свойства материалов, а также время нагрева и время охлаждения.

Ключевые слова: тепловой удар, математическая модель, динамическая термоупругость, эффект релаксации.

Введение

Проблема термического удара – одна из центральных в термомеханике в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в различных технологических операциях. Ее исследования на основе моделей динамической и квазистатической термоупругости получили широкое развитие: изучены физические закономерности термонапряженного состояния в изотропных и анизотропных упругих телах на основе классических феноменологий Фурье [1–4] и Максвелла–Каттанео–Лыкова о конечной скорости распространения теплоты в твердых телах [5–7]; развита обобщенная теория сопряжения термомеханических полей с полями различной физической природы (электрических, магнитных) [8–9]; сформулированы определяющие соотношения линеаризованной теории с учетом тепловой памяти [10]; установлена

связь макроскопического поведения сплошной среды с внутренними параметрами состояния среды и скоростью их изменения во времени [11]. Интенсификация тепловых взаимодействий на элементы конструкций, создание новых технологических процессов, основанных на использовании высокоинтенсивных импульсных потоков энергии, стимулирует разработку соответствующих модельных представлений для описания термической реакции конструкционных материалов, применяемых на практике. Систематизация результатов, накопленных в этой области термомеханики, дана в [1, 12–15].

Определяющие соотношения динамической термоупругости

Пусть D – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x, y, z)$, описывающая реальное твердое тело

и находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – внешняя нормаль к S , вектор, непрерывный на S ; $T(M, t)$ – распределение температуры в области D при $t > 0$; T_0 – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и напряженном состоянии. Пусть $\sigma_{ij}(M, t)$, $\varepsilon_{ij}(M, t)$, $U_i(M, t)$ – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях):

$$\sigma_{ij,j}(M, t) + F_i(M, t) = \rho \ddot{U}_i(M, t); \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2)[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)]; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M, t) + \\ + [\lambda\varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij}, \quad (3) \\ M \in D, t > 0, \end{aligned}$$

где ρ – плотность; $\mu = G$, $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$ – изотермические коэффициенты Ламе; ν – коэффициент Пуассона, при этом $2G(1+\nu) = E$; E – модуль Юнга; G – модуль сдвига; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; δ_{ij} – символ Кронекера; $\bar{\varepsilon}(M, t) = U_{i,j}(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t)$ – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{nn}(M, t)$ ($n = x, y, z$) соотношением

$$\bar{\varepsilon}(M, t) = \frac{1-2\nu}{E}\bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T[T(M, t) - T_0]. \quad (4)$$

Исключая в (2) компоненты вектора перемещения, приходим к известному уравнению совместности деформаций в виде $\gamma_{pmj}\gamma_{qni}\varepsilon_{ij, mn}(M, t) = 0$, где γ_{ijk} – альтернативный (антисимметричный) тензор ($p, q, m, n = x, y, z$). Это уравнение можно расписать подробнее:

$$\varepsilon_{ij, mn} - \varepsilon_{im, jn} - \varepsilon_{nj, mi} + \varepsilon_{mn, ji} = 0. \quad (5)$$

Выразим из уравнения (3) деформации через напряжения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(M, t) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}(M, t) - \\ - \frac{\nu}{E}\sigma_{nn}(M, t)\delta_{ij} + \alpha_T[T(M, t) - T_0]\delta_{ij}. \quad (6) \end{aligned}$$

Свернем в (5) в тензоры по индексам $m = n$: $\varepsilon_{ij, nn} - \varepsilon_{in, jn} - \varepsilon_{nj, ni} + \varepsilon_{nn, ji} = 0$ и подставим правые части соотношения (6). Произведя преобразования с использованием (1), (2) и свойств тензорной алгебры, найдем следующее основное уравнение динамической термоупругости в напряжениях:

$$\begin{aligned} (1+\nu)\sigma_{ij, nn}(M, t) + \sigma_{nn, ji}(M, t) + \\ + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)}F_{n, n}(M, t)\delta_{ij} + \\ + (1+\nu)[F_{i, j}(M, t) + F_{j, i}(M, t)] + E\alpha_T \times \\ \times \left[\frac{1+\nu}{1-\nu}(T(M, t) - T_0)_{nn}\sigma_{ij} + (T(M, t) - T_0)_{ij} \right] = \quad (7) \\ = \frac{\rho(1+\nu)}{2G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[2\sigma_{ij}(M, t) - \frac{\nu}{1-\nu^2}\sigma_{nn}(M, t)\delta_{ij} + \right. \\ \left. + \frac{2G(2+\nu)}{1-\nu}\alpha_T(T(M, t) - T_0)\delta_{ij} \right], \\ M \in D, t > 0. \end{aligned}$$

Выражение (7) является обобщением уравнений Бельтрами–Митчелла на динамические задачи. Этот случай впервые рассмотрел В. Новацкий, используя уравнения эластокинетики в напряжениях [4], однако конечный результат имеет форму, отличную от (7) и менее удобную для практических приложений. В этом смысле уравнение (7) представляет самостоятельный интерес для термомеханики.

Наиболее удобное приложение соотношения (7) для частных случаев реализуется в декартовой системе координат для тел канонической формы (бесконечная пластина; пространство, ограниченное изнутри плоской поверхностью, и др.). Что касается цилиндрической и сферической системы координат, то здесь более удобной математической моделью динамической термоупругости является «уравнение совместности» в перемещениях. Подставляя правые части (3) в (1) (в отсутствие объемных сил $F_i(M, t)$) и используя далее (2), (4) после ряда длительных преобразований приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U}(M, t) + \frac{1}{(1-2\nu)} \text{grad}[\text{div} \bar{U}(M, t)] - \\ - (\rho/G) \frac{\sigma^2 \bar{U}(M, t)}{\partial t^2} = \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)} \times \\ \times \alpha_T \text{grad}[T(M, t) - T_0], \quad M \in D, t > 0, \end{aligned}$$

особенно удобному для исследования в случае радиального потока теплоты в телах цилиндрической формы и центральной симметрии в телах сферической формы. Впрочем, это соотношение может быть использовано и в декартовых координатах при одномерном движении.

Термонапряженное состояние области D при $t > 0$ может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу S , создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи [17, 18]: температурный нагрев $T(M, t) = T_c(t)$, $M \in S$, $t > 0$ ($T_c(t) > T_0, t \geq 0$); тепловой нагрев $\partial T(M, t)/\partial n = -(1/\lambda_T)q_0(t)$, $M \in S$, $t > 0$ (λ_T – теплопроводность материала; $q_0(t)$ – величина теплового потока); нагрев средой $\partial T(M, t)/\partial n = -h[T(M, t) - T_c]$, $M \in S$, $t > 0$ (h – относительный коэффициент теплообмена; T_c – температура окружающей среды ($T_c > T_0$)), а также от действия внутренних источников теплоты. В равной мере могут быть рассмотрены и случаи охлаждения твердого тела.

В качестве применения соотношения (7) рассмотрим случай, имеющий большое значение для многих практических приложений. Можно выделить класс задач, в которых сочетание теплофизических свойств материала, геометрических размеров конструкций и интересующая исследователя термическая реакция тела касается приповерхностных слоев. В этих слоях происходит резкое (или достаточно интенсивное) изменение температуры и сосредоточено основное количество теплоты, поглощенной во времена, близкие к началу нагрева, и так как толщина приповерхностного слоя мала по сравнению с размерами тела, то в этих случаях твердое тело можно моделировать полупространством $z \geq 0$, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}(z, t)$; напряжения $\sigma_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$ для $i = j$, температурная функция $T = T(z, t)$ и уравнение (7) при отсутствии объемных сил приводится к следующему виду

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+v)}{(1-v)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$z > 0, t > 0,$$

где

$$v_p = \sqrt{\frac{2G(1-v)}{\rho(1-2v)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad (9)$$

– скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (3), (4), имеют вид:

$$\sigma_{xx}(z, t) = \sigma_{yy}(z, t) = \frac{v}{1-v} \sigma_{zz}(z, t) - \frac{E\alpha_T [T(z, t) - T_0]}{1-v}, \quad (10)$$

при этом

$$\varepsilon_{zz}(z, t) = \frac{1-2v}{2G(1-v)} \sigma_{zz}(z, t) + \frac{(1+v)}{(1-v)} \alpha_T [T(z, t) - T_0]. \quad (11)$$

Уравнение (8) впервые получила В.И. Даниловская [19] непосредственно из соотношений (1)–(3) и независимо от нее Т. Мура [20], который, по-видимому, не знал о ранней и более общей работе Даниловской.

Модельные представления тепловых воздействий

Рассмотрим последовательно несколько моделей термической реакции указанной области на нагрев, представляющих значительный практический интерес [17].

В первом случае рассматривается нагрев границы области $z > 0$ тепловым потоком экспоненциального во времени вида (температурная функция $T_1(z, t)$, $z \geq 0$, $t \geq 0$). Последнее встречается при генерировании теплоты в результате пропускания электрического тока через плоский нагревательный элемент; при выделении теплоты вследствие трения; в условиях высокочастотного индукционного нагрева; в ранних фазах нагрева печи или помещения; при нагреве поверхности Земли в ясный безветренный день (знание термонапряженного состояния внутри Земли существенно для понимания многих геофизических явлений, например, для понимания магнитного поля Земли, пластических свойств вещества Земли, а также для выяснения происхождения и причин вулканизма и тектонических движений).

Во втором случае рассматривается нагрев границы тела линейным во времени тепловым потоком (температурная функция $T_2(z, t)$, $z \geq 0$, $t \geq 0$), что встречается в ряде практических приложений: диэлектрический нагрев поверхности, нагрев при помощи вихревых потоков и др.

В третьем случае изучается действие внутреннего точечного источника теплоты (температурная функция $T_3(z, t)$, $z \geq 0$, $t \geq 0$), что также представляет практический интерес: нагрев бесконечно тонкой проволоки, по которой пропускается электрический ток; автогенная сварка; обработка металлов резанием. Здесь предполагается, что конечный источник теплоты действует на расстоянии d от границы области $z \geq 0$ и его мощность изменяется в начальный момент времени на некоторую величину Q_0 , оставаясь в дальнейшем постоянной.

В заключение рассматривается малоизученный эффект релаксации материала на нагрев и охлаждение и его влияние на тепловой удар. По этому вопросу имеются лишь единичные публикации в качестве постановки проблемы в первом приближении [1, 2].

Соответствующие модели динамической термоупругости для свободной от напряжений границы области имеют вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2}, \quad (12)$$

$$z > 0, t > 0$$

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{t=0} = 0, \frac{\partial \sigma_{zz}(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, z \geq 0, \quad (13)$$

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(z, t)|_{z=\infty} = 0, t \geq 0, \quad (14)$$

где $i = 1, 2, 3$; температурная функция $T_i(z, t)$, входящая в (12), удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} + \gamma_i \frac{Q_0}{c\rho} \delta(z-d) \eta_+(t), \quad (15)$$

$$z > 0, t > 0,$$

$$T_i(z, t)|_{t=0} = T_0, z \geq 0, \quad (16)$$

$$\lambda_T \frac{\partial T_1(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -q_0 \exp(-kt) \eta_+(t), t \geq 0, \quad (17)$$

$$\lambda_T \frac{\partial T_2(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = -q_0 (1-kt) \eta_+(t), t \geq 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial T_3(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, t \geq 0, \quad (19)$$

$$|T_i(z, t)| < \infty, z \geq 0, t \geq 0. \quad (20)$$

Здесь $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, $\eta_+(t)$ – обобщенная функция Хевисайда [5]:

$$\eta_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0; \end{cases}$$

$\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Приведенные соотношения (12)–(20) целесообразно записать в безразмерных переменных (ξ, τ) :

$$\xi = \frac{v_p z}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a^2},$$

$$W_i(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{T_i(z, t) - T_0}{(q_0/\lambda_T)(a/v_p)}, & i = 1, 2, \\ \frac{T_i(z, t) - T_0}{T_0}, & i = 3; \end{cases}$$

$$\sigma_{zz}(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T (q_0/\lambda_T)(a/v_p)}, & i = 1, 2, \\ \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T T_0}, & i = 3; \end{cases}$$

$$S_T = \frac{\alpha_T E}{1-2\nu} = \alpha_T (3\lambda + 2\mu), \quad q_0 = \frac{Q_0}{c\rho v_p T_0};$$

$$d_0 = \frac{v_p d}{a}, \quad k_0 = (a/v_p^2)k.$$

В новых переменных задача (12)–(20) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \quad (21)$$

$$\xi > 0, \tau > 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\tau=0} = [\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)/\partial \tau]_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \quad (22)$$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=0} = \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=\infty} = 0, \tau \geq 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} + \gamma_i q_0 \delta(\xi - d_0) \eta_+ \tau, \xi > 0, \tau > 0, \quad (24)$$

$$W_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (25)$$

$$\frac{\partial W_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -\exp(-k_0 \tau), \tau > 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial W_2(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -(1 - k_0 \tau), \tau > 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial W_3(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \tau > 0, \quad (28)$$

$$|W_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0. \quad (29)$$

В пространстве изображений по Лапласу:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \int_0^{\infty} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau,$$

$$\bar{W}_i(\xi, p) = \int_0^{\infty} W_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau.$$

Операционное решение динамической задачи (21)–(29) имеет вид:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = -\bar{f}_i(p) \left[\exp(-\xi\sqrt{p}) - \exp(-\xi p) \right], \quad (30)$$

где

$$\bar{f}_1(p) = \frac{\sqrt{p}}{(p-1)(p+k_0)}; \quad (31)$$

$$\bar{f}_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}(p-1)} \left(1 - \frac{k_0}{p} \right);$$

при $i = 3$ ($\gamma_3 = 1$)

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(q_0/2)} = -\frac{1}{\sqrt{p}(p-1)} \left\{ \exp[-(\xi+d_0)\sqrt{p}] + \right. \quad (32)$$

$$\left. + \exp[-|\xi-d_0|\sqrt{p}] - 2 \exp[-(d_0\sqrt{p} + \xi p)] \right\}.$$

Переходя к оригиналам, находим:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, \tau < \xi \left(t < \frac{z}{v_p} \right), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tau > \xi \left(t > \frac{z}{v_p} \right). \end{cases} \quad (33)$$

Здесь функции $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$ и $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$ имеют следующие значения:

– в случае экспоненциального нагрева (26) ($i = 1$)

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}(1+k_0)} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau'}\right) \times \quad (34)$$

$$\times \left\{ \exp(\tau - \tau') + k_0 \exp[-k_0(\tau - \tau')] \right\} d\tau',$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{1}{(1+k_0)} \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) + \quad (35)$$

$$+ \frac{\sqrt{k_0}}{(1+k_0)\sqrt{\pi}} F(\tau - \xi),$$

где $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$ – функция

Лапласа, $F(z) = \exp(-z^2) \int_0^z \exp(y^2) dy$ – вещест-

венная функция, ограниченная при любых вещественных z , при этом $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n z^{2n+1}}{(2n+1)!!}$; – в случае линейного нагрева (27) ($i = 2$)

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\left\{ \frac{(1-k_0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\tau'} + (\tau - \tau')\right] d\tau' + \right. \quad (36)$$

$$\left. + \frac{k_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau'}\right) d\tau' \right\},$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = (1-k_0) \times \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}) + \frac{2k_0\sqrt{\tau - \xi}}{\sqrt{\pi}}; \quad (37)$$

в частном случае при $k_0 = 0$, т.е. в условиях нагрева постоянным тепловым потоком, из (30), (31) находим:

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[\exp(\tau - \xi) \Phi^*\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) - \exp(\tau + \xi) \Phi^*\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \right],$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \exp(\tau - \xi) \Phi(\sqrt{\tau - \xi}),$$

где $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$;

– в случае действия внутреннего источника теплоты ($i = 3, \gamma_3 = 1$)

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(q_0/2)} = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) +$$

$$\begin{cases} 0, \tau < \xi \left(t < \frac{z}{v_p} \right), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), \tau > \xi \left(t > \frac{z}{v_p} \right), \end{cases} \quad (38)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \times \exp\left[-\frac{(\xi+d_0)^2}{4\tau'} + (\tau - \tau')\right] d\tau' + \right. \quad (39)$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left[-\frac{(\xi-d_0)^2}{4\tau'} + (\tau - \tau')\right] d\tau' \right\},$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^{\tau-\xi} \frac{1}{\sqrt{\tau'}} \exp\left[-\frac{d_0^2}{4\tau'} + (\tau - \xi - \tau')\right] d\tau'. \quad (40)$$

Вычисление остальных компонент тензора напряжения проводится по формуле (10), предварительно записанной в системе координат (ξ, τ) .

Физический анализ решения

Если в выражении (12) отбросить инерционное слагаемое, т.е. положить $\rho = 0$ и учесть при этом граничные условия (14), то напряжение $\sigma_{\xi\xi}(z, t)$ вообще будет равно нулю и из (10) находим квазистатическое решение задачи (12)–(20) (в исходной системе координат)

$$\sigma_{zz}(z, t) = 0; \\ \sigma_{xx}(z, t) = \sigma_{yy}(z, t) = -\frac{E\alpha_T [T(z, t) - T_0]}{1 - \nu}.$$

Весьма поучительно сравнить оба полученных решения. Прежде всего, на поверхности $z = 0$ ($\xi = 0$) оба решения дают одинаковый результат, заключающийся в том, что на этой поверхности по всем направлениям действуют равные между собой сжимающиеся напряжения

$$\sigma = -\frac{E\alpha_T [T_i(0, t) - T_0]}{1 - \nu}, \quad (41)$$

а в системе координат (ξ, τ)

$$\frac{\sigma}{(1 - 2\nu)/(1 - \nu)} = -W_i(0, \tau) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2\sqrt{k_0}}{\sqrt{\pi}} F(k_0\sqrt{\tau}) - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}, & i = 1; \\ \frac{4k_0\tau^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} - 2\sqrt{\tau/\pi}, & i = 2; \\ (q_0/2) \left[d_0\Phi^*\left(\frac{d_0}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{d_0^2}{4\tau}\right) \right], & i = 3. \end{cases}$$

Аналогичные сравнения динамических и соответствующих им квазистатических решений, приведенные в [1] для сплошного цилиндра, шара, бесконечной среды с внутренней шаровой или цилиндрической полостью, показывают, что соотношение (41) будет справедливо также и в этих случаях, но только для моментов времени микросекундной длительности, т.е.

непосредственно после воздействия теплового удара. В последние моменты времени напряжение на поверхности в динамическом случае может превзойти квазистатическое значение. Иным будет положение внутри области $\xi > 0$, занятой телом. На рис. 1–3 представлены зависимости напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ от времени в фиксированном сечении $\xi = 1$, рассчитанные по (34)–(40). Вначале рассмотрим данные на рис. 1 и 2.

Как следует из (38), вначале в фиксированном сечении возникает только составляющая напряжения $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}$ – продольная упругая волна, фронт которой движется со скоростью v_p от поверхности внутрь тела; напряжение растет от нуля до некоторого отрицательного значения, оставаясь сжимающим (материал, занимающий область $0 < \xi < 1$, нагревается сильнее, чем материал, расположенный в области $\xi > 1$, и поэтому

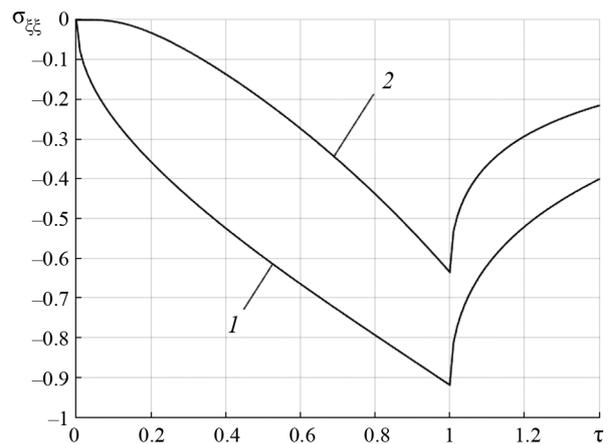


Рис. 1. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ от времени в сечении $\xi = 1$ при $k_0 = 0.7$ (кривая 1) и $k_0 = 0$ (кривая 2) при тепловом нагреве экспоненциального вида (26)

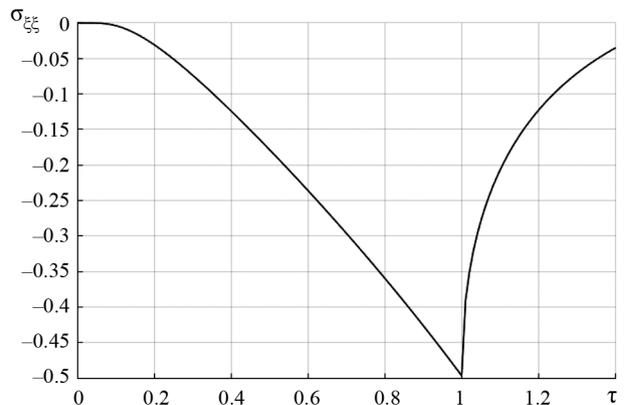


Рис. 2. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ от времени в сечении $\xi = 1$ при $k_0 = 0.7$ при линейном тепловом нагреве (27)

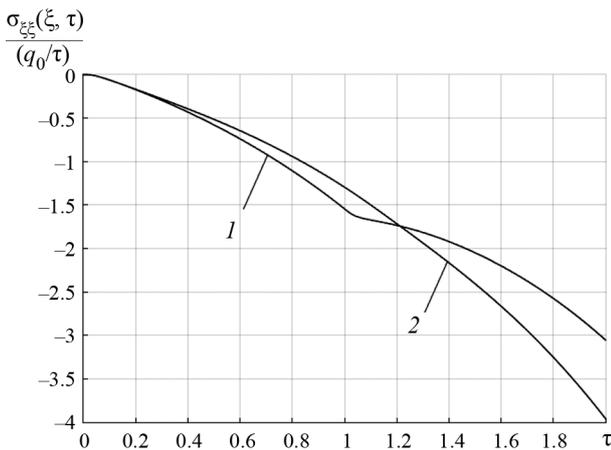


Рис. 3. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ от времени в сечении $\xi=1$ при действии внутреннего источника теплоты. Кривая 1 – в сечении $d_0 = 0.5$; кривая 2 – в сечении $d_0 = 1.5$

при $\xi \leq 1$ возникают сжимающие напряжения). В момент времени $\tau = 1$ ($t = z/v_p$) к этому сечению ($\xi = 1$) приходит волна напряжения, соответствующая функции $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}$, напряжение плавно без скачка изменяется непрерывно, возрастает при прохождении волны расширения, оставаясь сжимающим при всех $\tau > 0$, и затем убывает, достигая квазистатических значений. Таким образом, процесс распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели не является чисто диффузионным, а связан с распространением термоупругих волн. Данные рис. 3 представляют особый интерес.

В условиях непрерывного действия внутреннего источника теплоты возникающее напряжение сжатия со временем возрастает по абсолютной величине, не выходя на квазистатическое значение.

К числу малоисследованных вопросов в теории теплового удара относится эффект релаксации материала на внезапный нагрев. В основном это касается случаев внезапного нагрева границы области до температуры $T_c > T_0$ ($T(0, t) = T_c, t > 0$) или внезапного нагрева средой температуры $T_c > T_0$ [$(\partial T / \partial z)|_{z=0} = h(T|_{z=0} - T_c), t > 0$] ($h = \alpha / \lambda_T$ – относительный коэффициент теплообмена, α – коэффициент теплоотдачи). В первом случае скачкообразное изменение температуры поверхности тела от T_0 до T_c представляет собой математическую идеализацию, которая практически может осуществиться с некоторым при-

ближением при очень больших числах Био ($Bi = (\alpha / \lambda_T) l, l$ – масштабная единица длины). Однако подобное ограничение не исключает из рассмотрения большое количество исследований по тепловому удару при внезапном нагреве границы тела канонической формы (бесконечная пластина; цилиндр; шар; упругое полупространство сплошное и с полостью), отраженных в [1]. Тем не менее, для полноты изучения данной проблемы рассмотрим случай, когда температура поверхности $T(0, t) = \varphi(t)$ области $z > 0$ возрастает от начальной T_0 по линейному закону и достигает значения T_c ($T_c > T_0$) за малый, но отличный от нуля интервал времени t_0 : $\varphi(t) = [(T_c - T_0) / t_0][t - \eta(t - t_0)(t - t_0)] + T_0$, $\eta(t)$ – функция Хевисайда. В системе координат (ξ, τ) граничная функция (при $\xi = 0$) имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = \frac{\varphi(t) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{\tau}{\tau_0} - \eta(\tau - \tau_0)(\tau / \tau_0 - 1), \\ \tau_0 = v_p^2 t_0 / a; \end{cases} \quad (42)$$

температурная функция $W(\xi, \tau) = [T(z, t) - T_0] / (T_c - T_0)$ находится из (24) ($\gamma_i = 0$), (25), (42), (29); напряжение $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{zz}(z, t) / [S_T(T_c - T_0)]$ находится из (21)–(23).

В пространстве изображений (по Лапласу) находим искомые функции:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(\xi, p) &= \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{p^2} \left(e^{-\xi\sqrt{p}} - e^{-\xi\sqrt{p-\tau_0 p}} \right); \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= -\frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \times \\ &\times \left(e^{-\xi\sqrt{p}} - e^{-\xi\sqrt{p-\tau_0 p}} \right) + \\ &+ \frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \left[e^{-\xi p} - e^{-(\tau_0 + \xi)p} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Переходя к оригиналам, находим

$$\left. \begin{aligned} W(\xi, \tau) &= \Psi(\xi, \tau) = \\ &= \frac{1}{\tau_0} \left[\left(\tau + \frac{\xi^2}{2} \right) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) - \xi\sqrt{\tau/\pi} \exp \left(\frac{-\xi^2}{4\tau} \right) \right]; \\ &\quad (0 \leq \tau \leq \tau_0) \\ W(\xi, \tau) &= \Psi(\xi, \tau) - \Psi(\xi, \tau - \tau_0); \quad (\tau > \tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = F(\xi, \tau) = & \\ = \frac{1}{\tau_0} \left\{ \eta(\tau - \xi)(\exp(\tau - \xi) - 1) + \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) \right\} - & \\ - \frac{1}{2} \left[\exp(\tau - \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \right. & \\ \left. + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] & \quad (0 \leq \tau \leq \tau_0); \\ \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = F(\xi, \tau) - F(\xi, \tau - \tau_0). & \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

На рис. 4 показаны графики зависимости напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ от времени τ в точке $\xi = 1$ при различных значениях $\tau_0 = v_p^2 \tau_0 / a$.

Как можно видеть из графиков, максимум напряжений быстро уменьшается с увеличением τ_0 . При $\tau_0 = 3$ этот максимум составляет лишь около 14% от его значения при $\tau = 0$ (мгновенный нагрев). Например, для углеродистой стали ($\nu = 0.3$; $G = 8 \cdot 10^9$ Н/м²; $\rho = 7.85 \cdot 10^3$ кг/м³; $a = 13 \cdot 10^{-6}$ Н/м²) из формулы получаем скорость волны расширения $v_p = 6 \cdot 10^3$ м/с, а зависимость между временем t и безразмерной переменной τ будет иметь вид $t = 3.7 \cdot 10^{-3} \tau$ с. При значении $\tau_0 = 3$ время нагрева будет $\tau_0 = 10^{-12}$ с.

Для органического стекла ПММА ($\lambda = 2.26 \cdot 10^9$ Н/м²; $\mu = 3.8 \cdot 10^8$ Н/м²; $\rho = 1.2 \cdot 10^3$ кг/м³; $a = 1.13 \cdot 10^{-7}$ м²/с) скорость волны расширения $v_p = 1.6 \cdot 10^3$ м/с, а зависимость $\tau(t) = t = 0.44 \cdot 10^{-13} \tau$ с. При $\tau_0 = 3$ время нагрева составляет $\tau_0 = 10^{-13}$ с.

Эти результаты показывают, что даже при столь малой продолжительности нагрева максимум динамических напряжений снижается по сравнению с его значениями при скачкообразном изменении температуры поверхности тела.

В то же время для достаточно малых значений величины τ_0 , что связано с целым комплексом параметров, входящих в τ_0 , идеализация внезапного нагрева границы становится приближенно оправданной. Ещё больший интерес представляет режим охлаждения с учетом эффекта релаксации, когда температура поверхности области $z > 0$ убывает от начального значения T_0 по линейному закону и достигает конечного значения T_c за время релаксации t_0 , т.е. когда

$$T(0, t) = \varphi(t) = T_0 - \frac{T_0 - T_c}{t_0} [t - \eta(t - t_0)(t - t_0)].$$

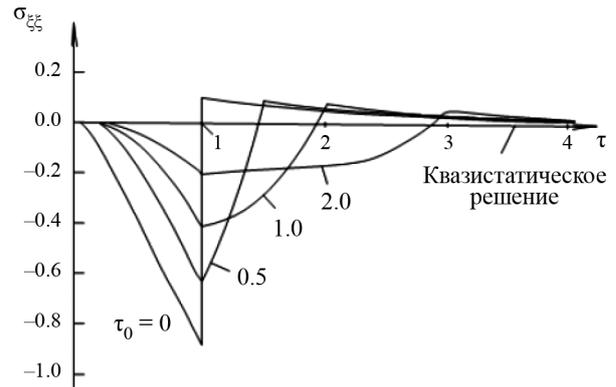


Рис. 4. Изменение напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ со временем в сечении $\xi = 1$ при различных временах релаксации (нагрев)

В системе координат (ξ, τ) граничная функция (при $\xi = 0$) имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(\tau) = \frac{\varphi(t) - T_0}{T_c - T_0} = \frac{\tau}{\tau_0} - \eta(\tau - \tau_0) \left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1 \right), \\ \tau_0 = v_p^2 \tau_0 / a, \end{aligned} \right. \quad (46)$$

температурная функция:

$$W(\xi, \tau) = [T(z, t) - T_c] / (T_0 - T_c),$$

напряжение:

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{\xi\xi}(z, t) / [S_T (T_0 - T_c)].$$

В пространстве изображений (по Лапласу) находим искомые функции:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(\xi, p) = \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{p^2} \times & \\ \times [\exp(-\xi\sqrt{p} - \tau_0 p) - \exp(-\xi\sqrt{p})]; & \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = -\frac{1}{\tau_0 p(p-1)} \times & \\ \times [\exp(-\xi\sqrt{p} - \tau_0 p) - \exp(-\xi\sqrt{p})] + & \\ + \frac{1}{\tau_0 p(p-1)} [\exp(-(\tau_0 + \xi)p) - \exp(-\xi p)]. & \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Переходя к оригиналам, находим:

$$\begin{aligned} -W(\xi, \tau) = \Psi(\xi, \tau) = & \\ = \frac{1}{\tau_0} \left[\left(\tau + \frac{\xi^2}{2} \right) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) - \xi\sqrt{\tau/\pi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) \right], & \quad (48) \\ 0 \leq \tau \leq \tau_0; & \\ -W(\xi, \tau) = \Psi(\xi, \tau) - \Psi(\xi, \tau - \tau_0), \quad \tau \geq \tau_0; & \end{aligned}$$

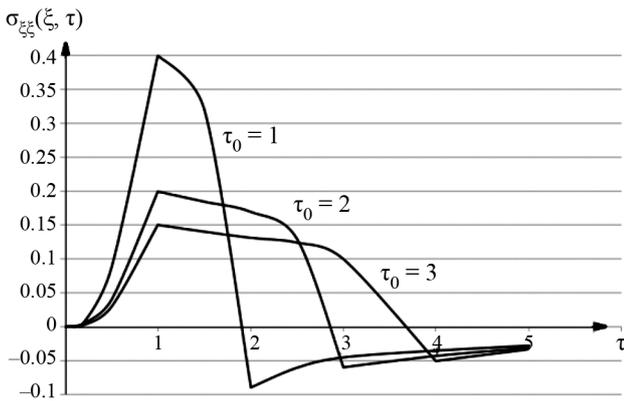


Рис. 5. Изменение напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ со временем в сечении $\xi = 1$ при различных временах релаксации (охлаждение)

$$\begin{aligned}
 -\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= F^*(\xi, \tau) = \\
 &= \frac{1}{\tau_0} \left\{ \eta(\tau - \xi) [\exp(\tau - \xi) - 1] + \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\exp(\tau - \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \exp(\tau + \xi) \Phi^* \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] \right\}, \\
 &0 \geq \tau \geq \tau_0, \\
 -\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= F^*(\xi, \tau) - F^*(\xi, \tau - \tau_0), \tau \geq \tau_0. \quad (49)
 \end{aligned}$$

На рис. 5 показаны графики зависимости напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ от времени в сечении $\xi = 1$ при различных значениях времени релаксации τ_0 , характеризующие влияние скорости охлаждения граничной поверхности тела на его термическую реакцию.

Чем больше время охлаждения, тем меньше максимум напряжений растяжения.

Заключение

Рассмотрены термические реакции массивного тела (упругое полупространство), возникающие при различных режимах теплового воздействия на его границу: тепловой поток во времени экспоненциальный, линейный; внутренний точечный источник теплоты постоянной мощности. Показано, что процесс распространения термоупругих напряжений на основе динамической модели не является чисто диффузионным, а связан с распространением термоупругих волн. Описан эффект релаксации материала на внезапный нагрев границы облас-

ти; установлено, что максимум динамических напряжений снижается по сравнению с его значениями при скачкообразном изменении температуры. При этом величина снижения определяется упругими и теплофизическими свойствами материала, а также скоростью нагрева поверхности тела. Показано также, что режим внезапного охлаждения создает напряжения растяжения, более разрушительные по сравнению с режимом нагревания. При этом с увеличением времени охлаждения максимум напряжений растяжения уменьшается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карташов Э.М., Кудинов В.А.** Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Изд-во URSS, 2012. 970 с.
2. **Паркус Г.** Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматлит, 1963. 252 с.
3. **Боли Б., Уэйнер Дж.** Теория термоупругих напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
4. **Карташов Э.М.** Теория теплового удара на основе обобщенной модели динамической термоупругости // Вестник МИТХТ. 2012. Т. 7. № 1. С. 69–72.
5. **Лыков А.В.** Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инженерно-физический журнал. 1985. Т. 9. № 3. С. 287–304.
6. **Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.** Волновые явления теплопроводности. Минск: Наука и техника, 1993. 279 с.
7. **Карташов Э.М., Ненахов Е.В.** Динамическая термоупругость в проблеме теплового удара на основе обобщенного уравнения энергии // Тепловые процессы в технике. 2018. Т. 10. № 7–8. С. 334–344.
8. **Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.** Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
9. **Коляно Ю.М.** Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. Киев: Наукова думка, 1992. 280 с.
10. **Колпащиков В.Л., Яновский С.Ю.** Уравнения динамической термоупругости для сред с тепловой памятью // Инженерно-физический журнал. 1984. Т. 47. № 4. С. 670–675.
11. **Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.** Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
12. **Новацкий В.** Обзор работ по динамическим проблемам термоупругости. Механика (сб. переводов). 1966. № 6. С. 101–142.
13. **Коляно Ю.М.** Обобщенная термомеханика (обзор). Математические методы и физико-механические поля. Вып. 2. Киев: Наукова думка. 1975. С. 37–42.
14. **Карташов Э.М., Бартенев Г.М.** Динамические эффекты в твердых телах в условиях взаимодействия с интенсивными потоками энергии. Итоги науки и техники. Серия: Химия и технология высокомолекулярных соединений. М.: ВИНТИ. 1988. Т. 25. С. 3–88.
15. **Карташов Э.М., Партон В.З.** Динамическая термоупругость и проблемы термического удара. Итоги науки

- и техники. Серия: Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 22. С. 55–127.
16. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
 17. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
 18. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 540 с.
 19. **Даниловская В.И.** Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // Прикладная математика и механика. 1950. Т. 14. Вып. 3. С. 317–318.
 20. **Mura T.** Dynamical thermal stresses due to thermal shocks. Res. Rep. Fac. Engng., Meiji. Univ. 1956. V. 8. P. 63–73.

Theory of thermal shock in models of dynamic thermoelasticity

E.V. Nenakhov¹, E.M. Kartashov²

¹ *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia*

² *Moscow Technological University (Institute of Fine Chemical Technologies, Moscow, 119454, Russia
e-mail: newnew94@mail.ru; kartashov@mitht.ru*

The problem of thermal shock of a solid is studied on the basis of the model of dynamic thermoelasticity. A brief scheme for deriving the compatibility equation in voltages for dynamic problems is proposed, which generalizes the well-known Beltrami-Mitchell relation for quasi-static cases. The proposed relation is convenient for considering numerous special cases in the theory of thermal shock in Cartesian coordinates for both restricted bodies of canonical form and partially limited ones. In the latter case, the obtained analytical solutions of the dynamic problems of the theory of thermal shock lead to visual and convenient for physical analysis functional structures describing the kinetics of thermal stresses.

As for the cylindrical and spherical coordinate systems, for these cases a “compatibility equation” in displacements was proposed, convenient for studying the problem of thermal shock in bodies with a radial heat flow and central symmetry. The class of problems in which the consideration of the geometrical dimensions of the structure investigated for a thermomechanical reaction under conditions of intense heating is mainly concerned with the near-surface layers is highlighted. As the experiments show, it is these layers that absorb the main amount of heat during a time close to the beginning of heating, corresponding to microsecond duration times during which inertial effects are active. The thermal reaction of a massive body when it is heated by a nonstationary heat flux of an exponential and linear type, as well as under the action of an internal heat source – practically important cases in the theory of thermal strength is investigated. Numerical experiments were carried out and the wave nature of the propagation of thermoelastic waves was described. The effect of material relaxation on sudden heating and sudden cooling of its boundary, which has been little studied in thermomechanics, is described. The dependence of the maximum internal temperature stress on the parameters characterizing the elastic and thermophysical properties of materials, as well as the heating time and cooling time, is established.

Keywords: thermal shock, mathematical model, dynamic thermoelasticity, relaxation effect.

REFERENCES

1. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** *Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoj termouprugosti* [Analytical theory of heat conduction and thermoelasticity]. Moscow: URSS, 2013. 656 p. In Russ.
2. **Parkus G.** *Neustanovivshiesya temperaturnye napryazheniya* [Unsteady thermal stresses]. Moscow: Fizmatlit, 1963. 252 p. In Russ.
3. **Boley B.A., Weiner J.H.** *Theory of Thermal Stresses*. Wiley, New York, 1960. 586 p.
4. **Kartashov E.M.** Teoriya teplovogo udara na osnove obobshhennoj modeli dinamicheskoy termouprugosti [Theory of thermal shock based on a generalized model of dynamic thermoelasticity]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta tonkikh khimicheskikh tekhnologij im. M.V. Lomonosova – Bulletin of the Moscow State University of Fine Chemical Technologies*, 2012, vol. 7, no. 1, pp. 69–72. In Russ.
5. **Lykov A.V.** *Primenenie metodov termodinamiki neobratimyykh protsessov k issledovaniyu teplo- i massoobmena* [Application of methods of thermodynamics of irreversible processes to the study of heat and mass transfer]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal – Physical Engineering Journal*, 1985, vol. 9, no. 3, pp. 287–304. In Russ.
6. **Shashkov A.G., Bubnov V.A., Yanovsky S.Yu.** *Volnovye yavleniya teploprovodnosti* [Heat conduction wave phenomena]. Minsk: Izdatel'stvo Nauka i tekhnika, 1993. 279 p. In Russ.
7. **Kartashov E.M., Nenakhov E.V.** Dinamicheskaya termouprugost' v probleme teplovogo udara na osnove obob-

- shhennogo uravneniya energii [Dynamic thermoelasticity in the problem of heat shock based on the general energy equation]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2018, vol. 10, no. 7–8, pp. 334–344. In Russ.
8. **Podstrigach Ya.S., Lomakin V.A., Koliano Yu.M.** *Termouprugost' tel neodnorodnoj struktury* [Thermoelasticity of bodies of non-uniform structure]. Moscow: Nauka, 1984. 368 p. In Russ.
 9. **Kolyano Yu.M.** *Metody teploprovodnosti i termouprugosti neodnorodnogo tela* [Methods of thermal conductivity and thermoelasticity of an inhomogeneous body]. Kiev: Naukova Dumka, 1992. 280 p. In Russ.
 10. **Kolpashchikov V.L., Yanovsky S.Yu.** Uravneniya dinamicheskoy termouprugosti dlya sred s teplovoj pamyat'yu [Dynamic thermoelasticity equations for environments with thermal memory]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal – Physical Engineering Journal*, 1984, vol. 47, no. 4, pp. 670–675. In Russ.
 11. **Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N.** *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoj sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continua]. Moscow: Publishing house Bauman, 2008. 512 p. In Russ.
 12. **Novatsky V.** *Obzor rabot po dinamicheskim problemam termouprugosti. Mekhanika (sb. perevodov)*. [Review of works on dynamic problems of thermoelasticity. Mechanics (collection of translations)]. 1966, no. 6, pp. 101–142. In Russ.
 13. **Kolyano Yu.M.** Obobshhennaya termomekhanika (obzor) [Generalized thermomechanics (review)]. *Matematicheskie metody i fiziko-mekhanicheskie polya – Mathematical methods and physico-mechanical fields*, 1975, Iss. 2, pp. 37–42. In Russ.
 14. **Kartashov E.M., Bartenev G.M.** Dinamicheskie efekty v tverdykh telakh v usloviyakh vzaimodejstviya s intensivnymi potokami energii [Dynamic effects in solids under conditions of interaction with intense energy flows]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Khimiya i tekhnologiya vysokomolekulyarnykh soedinenij – Results of science and technology. Series: chemistry and technology of high-molecular compounds*. Moscow: VINITI, 1988, vol. 25, pp. 3–88. In Russ.
 15. **Kartashov E.M., Parton V.Z.** Dinamicheskaya termouprugost' i problemy termicheskogo udara [Dynamic thermoelasticity and thermal shock problems]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela – Results of science and technology Series of mechanics of a deformable solid body*. Moscow: VINITI, 1991, vol. 22, pp. 55–127. In Russ.
 16. **Novatsky V.** *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir, 1975. 872 p. In Russ.
 17. **Karslou G., Eger D.** *Teploprovodnost' tvordyh tel* [Thermal conductivity of solids]. M.: Nauka, 1964. 488 p. In Russ.
 18. **Kartashov E.M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. M.: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
 19. **Danilovskaya V.I.** Temperaturnye napryazheniya v uprugom poluprostranstve, vznikayushhie v sledstvie vnezapnogo nagreva ego granitsy [Temperature stresses in the elastic half-space resulting from the sudden heating of its boundary]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1950, vol. 14, no. 3, pp. 317–318. In Russ.
 20. **Mura T.** Dynamic thermal stresses due to thermal shocks. *Res. Rep. Fac. Engng., Meiji. Univ*, 1956, vol. 8, pp. 63–73.

Учредитель и издатель журнала:

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-72651 от 16.04.2018

Редактор Бублик Н.П., e-mail: tpt@mai.ru

Оригинал-макет и электронная версия изготовлены в МАИ.

Сдано в набор 15.04.2019. Подписано в печать 07.05.2019.

Формат 60×90 1/8. Печать цифровая. Усл. печ. л. 5.82. Уч.-изд. л. 6.35. Тираж 55 экз. «Свободная цена».

Отпечатано в ООО «Печатный салон ШАНС»