

МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 534.014
DOI: [10.34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)

МОНОРЕАКТИВНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Игорь Павлович Попов

Курганский государственный университет,
Курган, Россия
ip.popov@yandex.ru

Аннотация. Механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах. Особое значение учет колебаний приобретает в авиационной и ракетной отраслях. Синтез монореактивного гармонического осциллятора производится на основе трех предпосылок. Первое. Осциллятор состоит из двух одинаковых по массе грузов. Второе. Грузы совершают синусоидальные перемещения. Третье. Суммарная энергия осциллятора со временем не изменяется. В монореактивном ($m-m$) гармоническом осцилляторе инертные элементы могут совершать свободные синусоидальные колебания, которые сопровождаются трансформацией кинетической энергии инертного элемента в кинетическую же энергию другого инертного элемента. В положении, при котором $\varphi = 0$ энергия первого инертного элемента равна нулю. При этом энергия второго элемента имеет максимальное значение. В следующий момент

времени первый элемент приобретает ускорение за счет кинетической энергии второго элемента, скорость которого начинает уменьшаться.

Ключевые слова: маятник, колебания, энергообмен, монореактивный, фаза, перемещение, скорость, ускорение

Для цитирования: Попов И.П. Монореактивный гармонический осциллятор // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)

MECHANICS

Original article

MONOREACTIVE HARMONIC OSCILLATOR

Igor P. Popov

Kurgan State University,

Kurgan, Russia

ip.popow@yandex.ru

Abstract. In classical oscillators, free sinusoidal oscillations are accompanied by an exchange of energy between its elements, which have the opposite nature of reactivity. In a spring pendulum, the potential energy of an elastic element is transformed into the kinetic energy of an inert element and vice versa. These elements have opposite character of reactivity. In an electric oscillatory circuit, the energy of the magnetic field of the coil is transformed into the energy of the electric field of the capacitor and vice versa. These elements also have the opposite character of reactivity. Oscillators are known in which free sinusoidal oscillations are accompanied by the transformation of the kinetic energy of

an inert element or the potential energy of an elastic element into the energy of the magnetic field of the coil or the energy of the electric field of the capacitor and vice versa. The synthesis of a monoreactive harmonic oscillator is based on three premises. First. The oscillator consists of two weights of the same weight. Second. Loads make sinusoidal movements. Third. The total energy of the oscillator does not change with time. In a monoreactive (m-m) harmonic oscillator, inert elements can perform free sinusoidal oscillations, which are accompanied by the transformation of the kinetic energy of an inert element. If the first inert element is zero. In this case, the energy of the second element has a maximum value. At the next moment of time, the first element acquires acceleration due to the kinetic energy of the second element, the speed of which begins to decrease.

Keywords: pendulum, oscillations, energy exchange, monoreactive, phase, movement, speed, acceleration

For citation: Popov I.P. Monoreactive harmonic oscillator. *Trudy MAI*, 2022, no. 126.

DOI: [10.34759/trd-2022-126-01](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-01)

В классических осцилляторах свободные синусоидальные колебания сопровождаются обменом энергии между его элементами, имеющими противоположный характер реактивности [1–5].

В пружинном маятнике потенциальная энергия упругого элемента трансформируется в кинетическую энергию инертного элемента и обратно. Эти элементы имеют противоположный характер реактивности [6–10].

В электрическом колебательном контуре энергия магнитного поля катушки трансформируется в энергию электрического поля конденсатора и обратно. Эти элементы тоже имеют противоположный характер реактивности.

Известны осцилляторы, в которых свободные синусоидальные колебания сопровождаются трансформацией кинетической энергии инертного элемента или потенциальной энергии упругого элемента в энергию магнитного поля катушки или энергию электрического поля конденсатора и обратно.

Все указанные колебательные системы по существу являются *биреактивными*, а именно: $m-k$, $L-C$, $m-L$, $m-C$, $k-L$, $k-C$.

Свободные синусоидальные колебания могут возникать при взаимной трансформации каких угодно физических видов энергии.

Это обстоятельство является побудительным мотивом создания осциллятора, в котором свободные синусоидальные колебания сопровождаются трансформацией кинетической энергии инертного элемента в кинетическую же энергию другого инертного элемента. Элементы с другим характером реактивности в таком осцилляторе отсутствуют.

Такой осциллятор по существу является *монореактивным*, а именно: $m-m$.

Актуальность работы обусловлена тем, что механические колебания широко распространены в разнообразных технологических процессах [11–15]. Особое значение учет колебаний приобретает в авиационной и ракетной отраслях [16–20].

Синтез монореактивного гармонического осциллятора

Синтез осциллятора производится на основе трех предпосылок.

Первое. Осциллятор состоит из двух одинаковых по массе грузов.

Второе. Грузы совершают синусоидальные перемещения

$$x_1 = A \sin(\zeta + \zeta_1),$$

$$x_2 = A \sin(\zeta + \zeta_2).$$

Здесь x_1, x_2 – перемещения инертных элементов, A – амплитуда, ζ – изменяющаяся фаза колебаний, ζ_1, ζ_2 – начальные фазы колебаний.

Третье. Суммарная энергия осциллятора со временем не изменяется

$$W_1 + W_2 = const.$$

Из второй и третьей предпосылок следует

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 = const,$$

$$\cos^2(\zeta + \zeta_1) + \cos^2(\zeta + \zeta_2) = const.$$

Из второго выражения следует, что

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Эта формула дает возможность определить конфигурацию монореактивного гармонического осциллятора, которая представлена на рисунке.

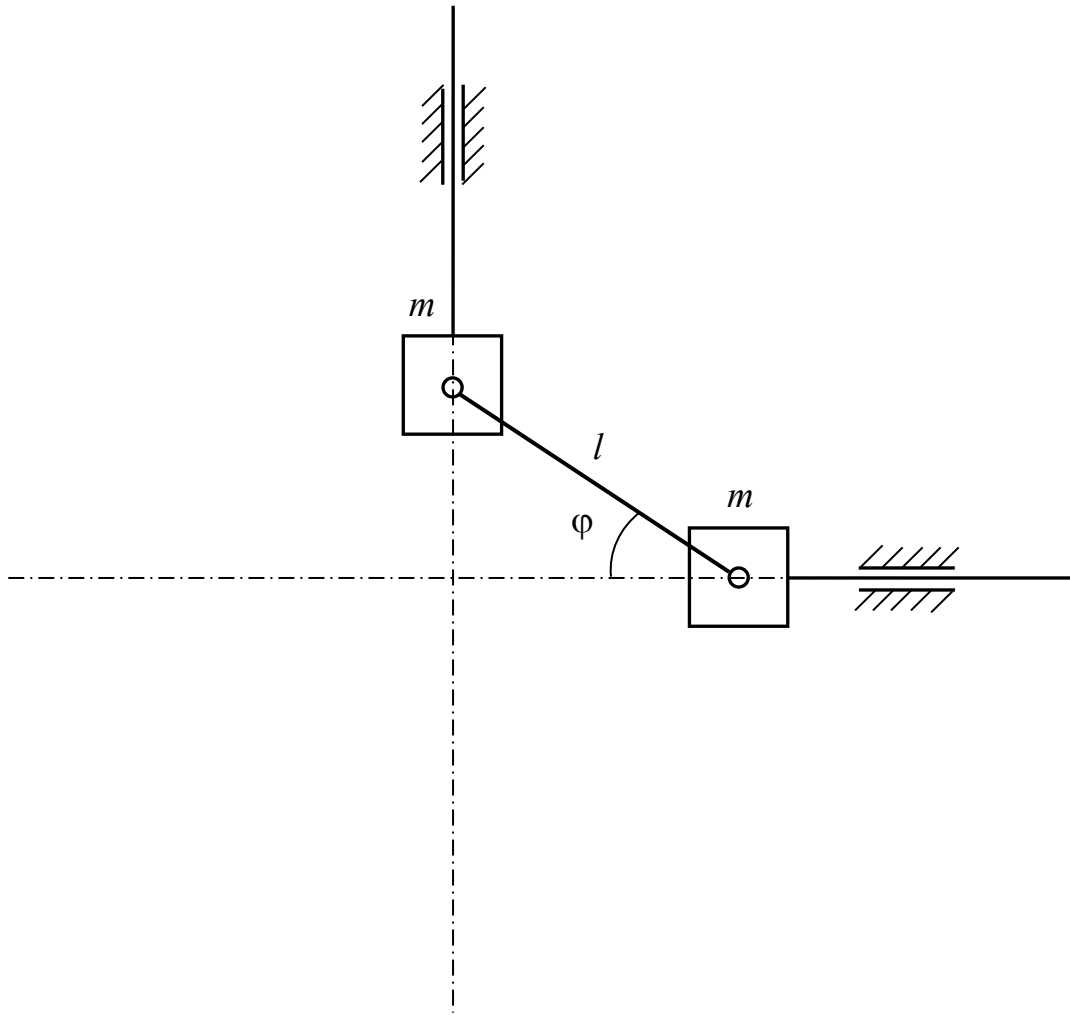


Рис. Монореактивный гармонический осциллятор

Анализ монореактивного гармонического осциллятора

Допущения. К инертным элементам внешние силы не приложены. Масса соединительного элемента равна нулю. Потери на трение отсутствуют.

В соответствии с рисунком перемещения инертных элементов имеют вид:

$$x_1 = l \cos \varphi, \quad (1)$$

$$x_2 = l \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right). \quad (2)$$

Текущая фаза φ наилучшим образом подходит на роль обобщенной координаты.

Рассматриваемая механическая система обладает одной степенью свободы, поэтому, соответственно, уравнение Лагранжа второго рода принимает следующую форму:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q.$$

Так как активные силы равны нулю, то обобщенная сила тоже равна нулю

$$Q = 0.$$

Суммарная кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 = \frac{ml^2}{2} \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \ddot{\varphi}.$$

Это дифференциальное уравнение имеет элементарное решение

$$\frac{d\varphi}{dt} = C_1,$$

$$\varphi = C_1 t + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся с учетом начальных условий

$$\varphi(0) = \varphi_0,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0.$$

Отсюда следует

$$C_1 = \omega_0,$$

$$C_2 = \varphi_0.$$

С учетом установленных величин перемещения инертных элементов (1) и (2) приобретают вид:

$$x_1 = l \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$x_2 = l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_0 t - \varphi_0\right).$$

Если исходное положение первого инертного элемента равно

$$x_1(0) = x_{10},$$

то

$$\cos \varphi_0 = \frac{x_{10}}{l},$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{x_{10}}{l} = \arcsin \frac{x_{20}}{l}.$$

Если исходная скорость второго инертного элемента равна

$$\frac{dx_2}{dt}(0) = v_{20},$$

то

$$l\omega_0 \cos(\omega_0 \cdot 0 + \varphi_0) = v_{20},$$

$$\omega_0 = \frac{v_{20}}{x_{10}} = -\frac{v_{10}}{x_{20}}.$$

С учетом полученных выражений перемещения инертных элементов и их скорости можно записать в виде:

$$x_1 = l \cos\left(\frac{v_{20}}{x_{10}} t + \arccos \frac{x_{10}}{l}\right),$$

$$x_2 = l \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{v_{10}}{x_{20}} t - \arcsin \frac{x_{20}}{l}\right),$$

$$v_1 = l \frac{v_{10}}{x_{20}} \sin\left(-\frac{v_{10}}{x_{20}} t + \arcsin \frac{x_{10}}{l}\right),$$

$$v_2 = l \frac{v_{20}}{x_{10}} \cos\left(\frac{v_{20}}{x_{10}} t - \arccos \frac{x_{20}}{l}\right).$$

Заключение

В монореактивном ($m-m$) гармоническом осцилляторе инертные элементы могут совершать свободные синусоидальные колебания, которые сопровождаются трансформацией кинетической энергии инертного элемента в кинетическую же энергию другого инертного элемента.

В положении, при котором $\varphi = 0$ энергия первого инертного элемента равна нулю. При этом энергия второго элемента имеет максимальное значение. В следующий момент времени первый элемент приобретает ускорение за счет кинетической энергии второго элемента, скорость которого начинает уменьшаться.

Список источников

1. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93297>
2. Алероева Х.Т., Алероев Т.С. Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80904>
3. Добрышкин А.Ю. Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
4. Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В. Радиальные и изгибные колебания круглой трехслойной пластины, взаимодействующей с пульсирующим слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
5. Попов И.П. Расчет механических колебаний в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=119885>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-01)
6. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76821>

7. Мухаметзянова А.А. Раскачивание и стабилизация равновесия двухмассового маятника ограниченным параметрическим управлением // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62975>
8. Попов И.П. Расчет колебаний для разветвленных механических систем в поле комплексных чисел // Труды МАИ. 2021. № 116. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=121007>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-01)
9. Семенов М.Е., Соловьев А.М., Попов М.А. Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80231>
10. Попов И.П. Виды механической мощности при гармонических колебаниях // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164101>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-03)
11. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
12. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Экспериментальная проверка математической модели вынужденных колебаний разомкнутой тонкостенной оболочки с малой присоединенной массой и жестко защемленными краями // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)

13. Петрухин В.А., Мельников В.Е. Маятниковый построитель вертикали с релейным управлением // Труды МАИ. 2017. № 93. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=80344>
14. Добрышкин А.Ю., Сысоев О.Е., Сысоев Е.О. Эффективные испытательные стенды для исследования собственных колебаний разомкнутых цилиндрических оболочек и пластин // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
15. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн С.Н. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90079>
16. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=65212>
17. Благодырёва О.В. Применение метода Ритца и метода конечных элементов к расчёту аэроупругих колебаний крылатой ракеты // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84426>
18. Загордан А.А., Загордан Н.Л. О применении специальных обобщенных координат для исследования совместных изгибных колебаний лопастей несущего винта, закрепленного на упругодемпфирующей опоре // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)

19. Рыбников С.И., Нгуен Т.Ш. Аналитическое конструирование системы демпфирования изгибных аэроупругих колебаний крыла самолета // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84572>
20. Анимица В.А., Борисов Е.А., Крицкий Б.С., Миргазов Р.М. Расчетные исследования виброперегрузок несущего винта, вызванных пульсацией силы тяги, на базе вихревой теории // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=69626>

References

1. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297>
2. Aleroeva Kh.T., Aleroev T.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80904>
3. Dobryshkin A.Yu. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112820>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-2](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2)
4. Bykova T.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Chernenko A.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112836>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-6](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-6)
5. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119885>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-01)
6. Aleroeva Kh.T. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76821>

7. Mukhametzyanova A.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62975>
8. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121007>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-01](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-01)
9. Semenov M.E., Solov'ev A.M., Popov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80231>
10. Popov I.P. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164101>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-03](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-03)
11. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618>
12. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111349>. DOI: [10.34759/trd-2019-109-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-109-4)
13. Petrukhin V.A., Mel'nikov V.E. *Trudy MAI*, 2017, no. 93. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=80344>
14. Dobryshkin A.Yu., Sysoev O.E., Sysoev E.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=117957>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-01](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-01)
15. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Yu., Nein S.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90079>
16. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212>
17. Blagodyreva O.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84426>

18. Zagordan A.A., Zagordan N.L. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109383>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-4](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-4)
19. Rybnikov S.I., Nguen T.Sh. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84572>
20. Animitsa V.A., Borisov E.A., Kritskii B.S., Mirgazov R.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 87. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69626>

Статья поступила в редакцию 08.09.2022

Статья после доработки 10.09.2022

Одобрена после рецензирования 15.09.2022

Принята к публикации 12.10.2022

The article was submitted on 08.09.2022; approved after reviewing on 15.09.2022; accepted for publication on 12.10.2022