

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ПОЛОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ ГАЗОВЫХ ТУРБИН

Зуев А.А.<sup>1\*</sup>, Назаров В.П.<sup>1\*\*</sup>, Арнгольд А.А.<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, проспект им. газеты «Красноярский рабочий», 31, Красноярск, 660037, Россия

<sup>2</sup> Красноярский машиностроительный завод, Красмаш, проспект им. газеты «Красноярский рабочий», 29, Красноярск, 660123, Россия

\* e-mail: dla2011@inbox.ru

\*\* e-mail: nazarov@mail.sibsau.ru

Статья поступила в редакцию 21.03.2019

Предложена модель распределения динамического и температурного пространственных пограничных слоев с конвективной составляющей (для случая  $Pr < 1$ ), необходимая для аналитического определения локального коэффициента теплоотдачи в полостях вращения турбин жидкостных ракетных двигателей. Получено интегральное соотношение уравнения энергии температурного пространственного пограничного слоя, позволяющего вести интегрирование по поверхности любой формы, необходимое для определения толщины потери энергии. С учетом интегрального соотношения записан закон теплообмена турбулентного пограничного слоя для полостей вращения. Аналитическим путем получены выражения для определения локального коэффициента теплоотдачи в виде критерия Стантона для прямолинейного равномерного течения потока, вращательного течения по закону твердого тела и вращательного течения свободной вихря степенного профиля распределения параметров динамического и температурного пограничного слоя. Аналитические выражения для коэффициентов теплоотдачи хорошо согласуются с экспериментальными данными и зависимостями, полученными другими авторами.

*Ключевые слова:* температурный пограничный слой, коэффициент теплоотдачи, интегральное соотношение уравнения энергии, проточная часть турбонасосного агрегата.

## Введение

Учет особенностей теплоотдачи в проточных частях турбонасосных агрегатов (ТНА) жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) является актуальной задачей. В настоящее время учет особенностей течения с теплоотдачей при реализации потенциального и вихревого вращательного течения в проточных частях в основном осуществляется следующими методами: использованием эмпирических уравнений, численными и аналитическими методами решения дифференциальных уравнений в частных производных [1].

Первый метод не всегда обеспечивает требуемую точность расчета гидродинамических и тепловых характеристик вращательных течений с учетом теплоотдачи и требует дополнительных уточняющих экспериментальных исследований. Как правило, это требует больших временных и материальных затрат на постановку и проведение исследований.

Численные методы достаточно сложны в использовании при инженерных расчетах, и для их реализации требуется специализированное программное обеспечение. Численные методы исследования используют прямое численное моделирование (метод DNS) и усредненные уравнения Навье—Стокса и Рейнольдса (метод RANS). Выбор метода зависит от сложности проблемы и требуемой точности результатов. Достаточно часто используется метод RANS с применением моделей  $k-\epsilon$  и  $k-\omega$  турбулентности [2–7]. Вопросы теплоотдачи при обтекании криволинейной поверхности с продольной кривизной газообразным потоком рабочего тела также рассмотрены в работах [8–10], где исследованы случаи обтекания лопаток турбин. В работе [11] исследуется конвективный теплообмен в канале с периодическими выступами на основе многоблочных вычислительных технологий, основанных на решении факторизованным конечно-объемным методом уравне-

ний Рейнольдса, замыкаемых с помощью модели переноса сдвиговых напряжений Менгера, и уравнения энергии на разномасштабных пересекающихся структурированных сетках.

Аналитический метод позволяет получить аналитические зависимости, применимые для инженерных расчетов в широком диапазоне возможных вариаций конструктивных и режимно-эксплуатационных параметров. Аналитические методы, как правило, разрабатывались для прямолинейного равномерного течения, и их применение имеет ряд ограничений. Одно из ранних исследований — это работа Е.Л. Кнута [12], в которой анализ основан на расширенной аналогии Рейнольдса с передачей тепла, массы и импульса в развитом турбулентном потоке в трубе. Использование профиля распределения скорости и температуры в пограничном слое предложено В.Д. Ранни [13] и модифицировано Д.Л. Туркоттом [14]. Анализ подслоя, проведенный Туркоттом, учитывал влияние теплообмена на турбулентность. Аналитические методы определения коэффициентов теплоотдачи, предложенные в работах [15, 16], учитывают конвективный перенос тепла в камерах ЖРД и предназначены для исследования прямолинейного турбулентного течения. Одномерная аналитическая модель, для докритических условий, также предложена С.Р. Шайном [17].

### **Особенности конструкции турбин ТНА ЖРД и объект исследования**

При проектировании диаметр турбины ТНА ЖРД выбирается с учетом компоновки и обеспечения минимальных габаритов и лимитируется прочностью ротора турбины. Из анализа адиабатной работы известно, что при выбранном рабочем теле наибольшее значение адиабатной работы достигается при высоких температурах и больших отношениях давлений.

Значения температур ограничиваются работоспособностью конструкции. В ЖРД применяются неохлаждаемые турбины. Из-за конструктивных особенностей и свойств применяемых материалов температура рабочего тела перед неохлаждаемой турбиной ограничивается, как правило, для восстановительного газа 1000—1200 °С, для окислительного газа 700—900 °С. Чем большую температуру перед турбиной можно допустить, тем меньше должно быть давление перед турбиной. Из-за особенностей конструкции турбины ЖРД выполняют одноступенчатыми и реже двухступенчатыми.

Высокие температуры рабочего тела приводят к температурным деформациям, в том числе и

дисков турбин [18]. При проектировании проточных частей узлов и агрегатов ТНА ЖРД необходимо учитывать изменение температуры потока рабочего тела по длине рабочего канала, так как параметр вязкости является функцией температуры и определяет режим течения и, как следствие, потери, в частности дисковое трение и гидродинамические потери в проточной части.

Оптимальный уровень стабильности энергетических параметров турбонасосных агрегатов (ТНА) обеспечивается в процессе опытно-конструкторских работ путем корректировки геометрических размеров деталей и сборочных единиц газодинамического тракта, выбора технологических схем размерной обработки, сборки и испытаний турбин с привлечением значительного объема статического материала. В связи с этим моделирование энергетических параметров ТНА ЖРД представляет актуальную научно-техническую задачу. Вопросы оптимизации параметров рабочего процесса и математическая модель ДУ рассмотрены в работе В.А. Григорьева [19], где проведен анализ моделей и раскрыты преимущества и недостатки для различных этапов проектирования.

При проектировании требования к ТНА формируются исходя из задач, выполняемых двигательной установкой (ДУ), в которую ТНА входит составной частью и с которой компоуется как единый блок. Требования к ДУ в полной мере относятся и к ТНА: обеспечивать на всех режимах работы двигателя подачу компонентов топлива с требуемым расходом и давлением при высокой степени надежности и КПД; обеспечивать минимальные размеры и массу, простоту конструкции и минимальную стоимость.

Основными объектами исследования, в которых реализуется потенциальное и вихревое вращательное течение, являются конструктивные элементы проточных частей газовых турбин ЖРД: подводящее и отводящее устройство, полости между статором и рабочим колесом [20].

### **Постановка задачи исследования**

При обобщенной постановке задачи о течении жидкости при теплообмене с поверхностью агрегатов, таких, как компрессоры, детандеры, насосы криогенных компонентов и т.п., необходимо учитывать изменение температуры потока по длине рабочего канала, поскольку вязкость, как функция температуры, в основном определяет режим течения и, как следствие, гидравлические потери [21].

Для случая течения несжимаемой жидкости необходимо и достаточно совместного решения уравнений движения и энергии в граничных условиях пространственного пограничного слоя [22], для сжимаемой жидкости необходимо дополнение системы уравнением состояния.

Процессы теплоотдачи в энергетических установках во многом схожи, но при анализе и выводе уравнений теплообмена для граничных условий ЖРД существуют определенные отличия. Основные отличия заключаются в следующем: экстремально высокие значения тепловых потоков, температур и давлений, наличие высоких скоростей потоков, начальное турбулентное состояние потоков в активной зоне, рабочие тела могут находиться в газообразном и жидком состоянии, эффекты кривизны поверхности, наличие градиентов плотности и сжимаемости, нестационарность тепловых потоков и неустойчивость потоков в активной зоне теплообмена [23].

#### Закон теплообмена турбулентного течения температурного пространственного пограничного слоя. Интегральное соотношение уравнения энергии

При числах Прандтля, меньших единицы ( $Pr < 1$  характерно для газообразных рабочих тел, в том числе и продуктов сгорания), толщина динамического пограничного слоя меньше толщины температурного пограничного слоя, т. е.  $\delta < \delta_t$  (рис. 1). При очень низких числах Прандтля (жидкие металлы) молекулярная теплопроводность является основным механизмом переноса тепла и ею нельзя пренебречь даже в турбулентном ядре потока. При низких числах Прандтля термическое сопротивление распределено по всему сечению потока [24].

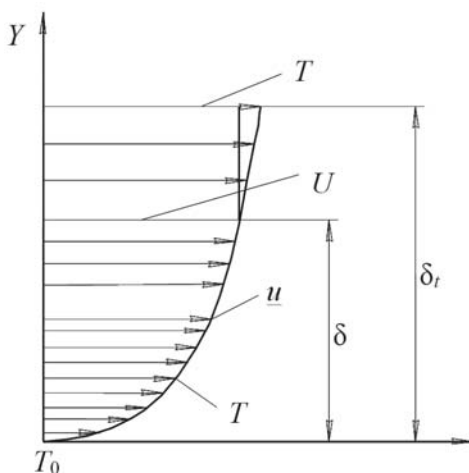


Рис. 1. Модель распределения температурного и динамического пограничных слоев при  $Pr < 1$

Примем, что в границах динамического пограничного слоя изменение температуры происходит за счет переноса скорости, а за его пределами — только за счет молекулярной теплопроводности. Данное предположение хорошо согласуется с выводами Кейса, так как при очень низких числах Прандтля толщина динамического пограничного слоя в значительной степени меньше толщины температурного пограничного слоя. Соответственно, термическое сопротивление присутствует по всей толщине температурного пограничного слоя. В границах динамического пограничного слоя термическое сопротивление обусловлено турбулентным переносом тепла, а вне границ динамического пограничного слоя — молекулярной теплопроводностью.

Рассмотрим выражение толщины потери энергии температурного пограничного слоя [25]:

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \int_0^{\delta_t} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right) dy. \quad (1)$$

Границы интегрирования толщины потери энергии (1) необходимо разбить на два характерных участка. Первый участок интегрирования лежит в границах толщины динамического пограничного слоя  $\delta$ , второй участок интегрирования — в границах окончания толщины динамического пограничного слоя  $\delta$  до окончания температурного пограничного слоя  $\delta_t$ .

Запишем выражение толщины потери энергии (1) для рассматриваемой модели распределения температурного и динамического пограничных слоев, с принятой моделью разбиения на два характерных участка интегрирования:

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right) dy + \int_{\delta}^{\delta_t} \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} \right) dy. \quad (2)$$

С применением уравнения (2) становится возможным определить вид закона теплообмена для случая  $Pr < 1$ . Для дальнейшего использования уравнение (2) необходимо проинтегрировать с учетом принятых законов распределения профиля скорости в пограничном слое. Далее последовательно рассмотрим сначала степенной профиль, потом градиентный.

Распределение динамического пограничного слоя аппроксимируем степенной функцией вида

$$\frac{u}{U} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^m.$$

Распределение температурного пограничного слоя аппроксимируем функцией вида

$$\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Учитывая принятую модель распределения динамического и температурного пограничных слоев и функции распределения параметров динамического и температурного слоев, запишем выражение для толщины потери энергии:

$$\delta_{\text{тф}}^{**} = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy + \int_\delta^{\delta_t} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta_t}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy. \quad (3)$$

Учтем, что в первом члене уравнения (3) профили распределения динамического и температурного пограничных слоев совпадают. Тогда в границах интегрирования первого члена уравнения (3) совпадают и толщины температурного и динамического пограничных слоев, т. е.  $\delta_t = \delta$ . Рассматривая второй член уравнения (3), отметим, что изменения динамического пограничного слоя вдоль оси  $Y$  в границах интегрирования не происходит и скорость потока равна скорости потока в ядре течения. Тогда распределение динамического пограничного слоя во втором члене уравнения (3) запишется в виде

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} = 1.$$

Также во втором члене уравнения (3) изменение эпюры температурного пограничного слоя происходит только за счет молекулярной теплопроводности. Необходимо учесть, что для данного участка эпюра профиля выглядит следующим образом:

$$\frac{T - T_\delta}{T_{\delta_t} - T_\delta} = \lambda \frac{y}{\delta_t}.$$

Учитывая условие сопряжения температурного и динамического профилей для физической модели теплопроводности при  $Pr < 1$  (рис. 2) с конвективной составляющей, запишем:

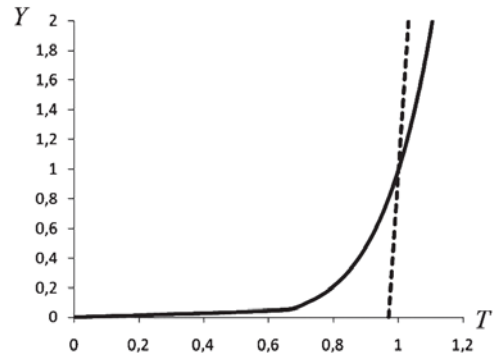


Рис. 2. Сопряжение температурного и динамического профилей для физической модели при  $Pr < 1$  (— — динамический пограничный слой со степенным распределением скорости; - - - - температурный пограничный слой)

$$\frac{T - T_0}{T_\delta - T_0} = \lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1\right) + 1.$$

Перепишем выражение для толщины потери энергии с учетом принятой двухслойной модели распределения температурного пограничного слоя с наличием теплоотдачи при условии  $Pr < 1$ :

$$\delta_{\text{тф}}^{**} = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy + \int_\delta^{\delta_t} \left(1 - \left(\lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1\right) + 1\right)\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy + \int_\delta^{\delta_t} \left(-\lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1\right)\right) dy. \quad (4)$$

Проведем замену переменных в уравнении толщины потери энергии температурного пограничного слоя (4):

$$A_1 = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy;$$

$$A_2 = \int_\delta^{\delta_t} \left(-\lambda \left(\frac{y}{\delta} - 1\right)\right) dy.$$

Рассмотрим первый член уравнения:

$$A_1 = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{m}}\right) dy = \frac{m\delta}{(m+1)(m+2)}. \quad (5)$$

Рассмотрим второй член уравнения для определения толщины потери энергии температурного пограничного слоя:

$$A_2 = \int_{\delta}^{\delta_t} -\lambda \left( \frac{y}{\delta} - 1 \right) dy =$$

$$= - \frac{\delta \lambda \left( \frac{y}{\delta} - 1 \right)^2}{2} \Big|_{\delta}^{\delta_t} = - \frac{\lambda (\delta - \delta_t)^2}{2\delta}. \quad (6)$$

Тогда выражение для толщины потери энергии (4) с учетом (5) и (6) запишется как

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{m\delta}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(\delta - \delta_t)^2}{2\delta}. \quad (7)$$

Приняв во внимание, что

$$\frac{\delta}{\delta_t} = x,$$

после преобразований получим

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{m\delta}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda \left( \delta - \frac{\delta}{x} \right)^2}{2\delta} \quad (8)$$

или

$$\delta_{t\varphi}^{**} = \frac{m\delta}{(m+1)(m+2)} - \frac{\delta \lambda (x-1)^2}{2x^2} =$$

$$= \delta \left( \frac{m}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda (x-1)^2}{2x^2} \right). \quad (9)$$

Для закона теплообмена в виде критерия Стантона необходимо определить производную температурного пограничного слоя на стенке поверхности теплообмена. Так как производная не существует формально при  $m < 1$ , определяем ее из принятой двухслойной модели турбулентности с ламинарным подслоем. Учитывая, что в ламинарном подслое профили динамического и температурного ППС совпадают, исходя из принятой модели

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{T - T_0}{T_{\delta} - T_0} \right)_{y=0} = \frac{U}{\alpha_{\lambda}^2 v} \left( \frac{\alpha_{\lambda}^2 v}{U \delta_t} \right)^{\frac{2}{m+1}}, \quad (10)$$

выразим толщину динамического пограничного слоя из (9):

$$\delta = \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{\frac{m}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x^2}}. \quad (11)$$

Тогда толщина температурного пограничного слоя определится как

$$\delta_t = \frac{\delta_{t\varphi}^{**}}{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}. \quad (12)$$

Используя выражение для толщины потери энергии (12) и проведя преобразования для производной на стенке поверхности теплообмена профиля распределения температурного пограничного слоя (10), а также учитывая закон теплообмена, получим

$$St = \frac{\lambda}{\rho C_p U} \cdot \frac{U}{\alpha_{\lambda}^2 v} \left( \frac{\frac{\alpha_{\lambda}^2 v}{\delta_{t\varphi}^{**}}}{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \quad (13)$$

или

$$St = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \times$$

$$\times \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\lambda}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}}. \quad (14)$$

Учитывая степень турбулизации профилей распределения теплового и динамического пограничных слоев при  $m = 7$ , запишем

$$St = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{0,25} \alpha_{\lambda}^{1,5} v^{0,75}} \cdot \frac{1}{(\delta_{t\varphi}^{**})^{0,25}} \times$$

$$\times \left( \frac{7}{72} x - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{0,25}. \quad (15)$$

Для практической реализации закона теплообмена необходимо определить значение  $\alpha_{\lambda}$ . Оно находится из условия смыкания ламинарного под-

слоя с турбулентным профилем [25] при  $y = \delta_{\text{л}}$  и степени профиля 7:

$$\alpha_{\text{л}} = 1,5 \sqrt{\frac{\left(\frac{xm}{(m+1)(m+2)}\right)^{0,25} \left(\left(\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}\right) x \frac{(m+1)}{(m+3)}\right)^{\frac{2}{m+1}}}{\left(\left(\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}\right) \frac{(m+1)}{(m+3)}\right)^{\frac{2}{m+1}} 0,01256}}.$$

Теперь окончательно получим выражение для определения коэффициента ламинарного подслоя турбулентного профиля распределения температурного пограничного слоя для принятой модели:

$$\alpha_{\text{л}} = 12,5496 \text{Pr}^{\frac{1}{18}}.$$

Запишем интегральное соотношение уравнения энергии ППС с учетом закона теплообмена (14):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_{\varphi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\delta_{t\varphi}^{**}) + \frac{1}{H_{\psi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} (\delta_{t\psi}^{**}) + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \cdot \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \delta_{t\varphi}^{**} + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \cdot \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi} \delta_{t\psi}^{**} = \\ & = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \frac{1}{(\delta_t^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho C_p (T_{\delta} - T_0)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Принимая относительную характерную толщину

$$J = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\delta_{t\psi}^{**}}{\delta_{t\varphi}^{**}}, \quad (17)$$

запишем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_{\varphi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\delta_{t\varphi}^{**}) + \frac{J}{H_{\psi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} (\varepsilon \delta_{t\varphi}^{**}) + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \cdot \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \delta_{t\varphi}^{**} + \\ & + \frac{J}{H_{\varphi} H_{\psi}} \cdot \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi} \delta_{t\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \nu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \frac{1}{(\delta_t^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho C_p (T_{\delta} - T_0)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим прямолинейное равномерное течение при следующих граничных условиях [26]:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = 0, \quad H_{\psi} = H_{\varphi} = 1, \quad \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} = \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi} = 0.$$

Тогда интегральное соотношение уравнения энергии для прямолинейного равномерного течения (3.18) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \delta_{\tau\varphi}^{**}}{\partial \varphi} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \frac{1}{(\delta_{\tau\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0}(1+\varepsilon^2)}{\rho C_p (T_\delta - T_0)}. \quad (19)$$

Для вращательного течения, реализующегося в полостях энергетических и энергосиловых агрегатов, линия тока представляет собой кольцевую линию. Запишем интегральное соотношение уравнения энергии (18) в цилиндрических координатах, учитывая, что для осесимметричного течения при

$$\varepsilon = \text{const} \text{ выполняются соотношения } \varphi = \alpha, \psi = R, H_\varphi = R, \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} = \frac{\partial R}{\partial R} = 1, H_\psi = 1, \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

[27, 28]:

$$J\varepsilon \frac{\partial}{\partial R} \delta_{\tau\varphi}^{**} + \frac{J\varepsilon}{R} \delta_{\tau\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \frac{1}{(\delta_{\tau\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} - \frac{\tau_{\varphi_0}(1+\varepsilon^2)}{\rho C_p (T_\delta - T_0)}. \quad (20)$$

Интегральное соотношение уравнения энергии (20) необходимо для записи и определения толщины потери энергии температурного пространственного пограничного слоя, входящей в выражение для определения локального коэффициента теплоотдачи в виде критерия Стантона.

#### Локальная теплоотдача при различных законах течения внешнего потока

Для прямолинейного равномерного течения пренебрегаем диссипативным членом и получим интегральное соотношение уравнения энергии (19) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \delta_{\tau\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \frac{1}{(\delta_{\tau\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}}. \quad (21)$$

Разделим переменные и проинтегрируем от нуля до текущего значения переменных:

$$\int_0^{\delta_{\tau\varphi}^{**}} (\delta_{\tau\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}} d\delta_{\tau\varphi}^{**} = \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} \mu^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \int_0^\varphi d\varphi; \quad (22)$$

$$\delta_{\tau\varphi}^{**} = \left( \frac{\lambda\varphi}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \right)^{\frac{m+1}{3+m}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2m+2}{(m+1)(m+3)}} \left( \frac{3+m}{m+1} \right)^{\frac{m+1}{3+m}}. \quad (23)$$

С учетом выражения закона теплоотдачи (14) и полученного выражения для толщины потери энергии (23), запишем:

$$St = \frac{\lambda \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}} \alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \cdot \left[ \left( \frac{\lambda \varphi}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \right)^{\frac{m+1}{3+m}} \cdot \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{\frac{2m+2}{(m+1)(m+3)}} \cdot \left( \frac{3+m}{m+1} \right)^{\frac{m+1}{3+m}} \right]^{\frac{2}{m+1}}. \quad (24)$$

Проведя преобразования и учитывая выражения для критериев Прандтля  $\left( Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \right)$  и Рейнольдса  $\left( Re = \frac{\rho U \varphi}{\mu} \right)$ , получим выражение для определения локального коэффициента теплоотдачи в виде критерия Стантона прямолинейного равномерного течения при степенном профиле распределения эпюры скорости и температуры при  $Pr < 1$ :

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left( \frac{\left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{\frac{2}{m+1}} (m+1)}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} (m+3) Re_U} \right)^{\frac{2}{m+3}}. \quad (25)$$

Рассмотрим вращательное течение. Пренебрегая диссипативным членом в интегральном соотношении уравнения энергии (20), получим

$$J\varepsilon \frac{\partial}{\partial R} (\delta_{\text{т}\varphi}^{**}) + \frac{J\varepsilon}{R} \delta_{\text{т}\varphi}^{**} - \frac{\lambda}{\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{1}{(\delta_{\text{т}\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (26)$$

Учтем, что реализуется вращательное течение по закону твердого тела  $\left( \frac{U}{R} = \omega = \text{const} \right)$ , тогда уравнение (26) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial R} \delta_{\text{т}\varphi}^{**} + \frac{\delta_{\text{т}\varphi}^{**}}{R} - \frac{\lambda}{J\varepsilon \rho C_p \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{1}{R^{\frac{2}{m+1}} (\delta_{\text{т}\varphi}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (27)$$



Введем промежуточные обозначения:

$$\delta_{т\varphi}^{**} = y; \quad B = \frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{л}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dR} + \frac{y}{R} - \frac{B}{R^{m+1} y^{\frac{2}{m+1}}} = 0.$$

Данное уравнение решается методом подстановки  $y = u\vartheta$ :

$$\frac{du}{dR} \vartheta + \frac{d\vartheta}{dR} u + u \frac{\vartheta}{R} = \frac{B}{u^{m+1} \vartheta^{m+1} R^{m+1}}; \quad u \left( \frac{d\vartheta}{dR} + \frac{\vartheta}{R} \right) + \vartheta \frac{du}{dR} = \frac{B}{u^{m+1} \vartheta^{m+1} R^{m+1}}.$$

Функция  $\vartheta$  должна удовлетворять условию  $\frac{d\vartheta}{dR} + \frac{\vartheta}{R} = 0$ , тогда  $\vartheta = \frac{1}{R}$ , откуда находим

$$u = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{BR^2(m+3)}{2(m+1)}};$$

$$y = \delta_{т\varphi}^{**} = \frac{1}{R} \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{BR^2(m+3)}{2(m+1)}} = \frac{m+3}{m+1} \sqrt{\frac{BR^2(m+3)}{2(m+1)}} R^{\left(\frac{m-1}{m+1}\right)}; \quad (28)$$

$$\delta_{т\varphi}^{**} = \sqrt{\frac{\frac{m+3}{m+1} \frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{л}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot (m+3)}{2(m+1)}} \cdot R^{\frac{m-1}{m+1}}.$$

С учетом выражения для закона теплообмена (14) и полученного выражения толщины потери энергии (28) определим критерий Стантона для вращательного течения по закону твердого тела степенного профиля распределения температурного пограничного слоя и  $Pr < 1$ :

$$St = \frac{\frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p U^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{л}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\sqrt{\frac{\frac{m+3}{m+1} \frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p \omega^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{л}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{(m+3)}{2(m+1)} R^{\frac{m-1}{m+1}}}}}. \quad (29)$$

Проведя преобразования и учитывая критерии Прандтля  $\left( Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \right)$  и Рейнольдса  $\left( Re = \frac{\rho U \varphi}{\mu} \right)$ ,

определим локальный коэффициент теплоотдачи в виде критерия Стантона для вращательного течения по закону твердого тела для случая  $Pr < 1$ :

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left( \frac{2J\varepsilon}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} Re} \frac{(m+1)}{(m+3)} \right)^{\frac{2}{m+3}} \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{\frac{2(m+3)-4}{(m+1)(m+3)}} \quad (30)$$

Рассмотрим вращательное течение, которое осуществляется по закону свободного вихря ( $UR = C = \text{const}$ ), тогда интегральное соотношение уравнения энергии (26) примет вид

$$\frac{d\delta_{\text{тф}}^{**}}{dR} + \frac{\delta_{\text{тф}}^{**}}{R} - \frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p C^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \cdot \frac{R^{\frac{2}{m+1}}}{(\delta_{\text{тф}}^{**})^{\frac{2}{m+1}}} = 0. \quad (31)$$

Проведя замену:

$$\delta_{\text{тф}}^{**} = y; \quad D = \frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p C^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}},$$

решаем уравнение (31) аналогично случаю вращательного течения по закону твердого тела для  $Pr < 1$  подстановкой  $y = u\vartheta$ , причем

$$\vartheta = \frac{1}{R}; \quad u = \frac{D^{\frac{m+1}{m+3}} R^2}{2^{\frac{m+1}{m+3}}}. \quad (32)$$

Тогда толщина потери энергии определится в виде

$$\delta_{\text{тф}}^{**} = \left( \frac{D}{2} \right)^{\frac{m+1}{m+3}} R \quad (33)$$

или, после подстановки:

$$\delta_{\text{тф}}^{**} = \left[ \frac{\lambda}{J\varepsilon\rho C_p C^{\frac{2}{m+1}}} \left( \frac{\frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \right)^{\frac{2}{m+1}} \right]^{\frac{m+1}{m+3}} \cdot R. \quad (34)$$

Подставив полученное выражение для определения толщины потери энергии (34) в выражение закона теплообмена (14), получим

$$St = \frac{\frac{\lambda}{\rho C_p U^{m+1}} \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{\frac{2}{m+1}}}{\left[ \frac{J\varepsilon C_p C^{m+1}}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} v^{\frac{m-1}{2}}} \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{\frac{2}{m+1}} / 2^{\frac{m+1}{m+3}} \right]^{\frac{m+1}{m+3}}} \cdot R \quad (35)$$

Проведя преобразования и учитывая критерии Прандтля  $\left( Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \right)$  и Рейнольдса  $\left( Re = \frac{\rho U \varphi}{\mu} \right)$ , определим локальный коэффициент теплоотдачи в виде критерия Стантона для вращательного течения по закону свободного вихря для случая  $Pr < 1$ :

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left( \frac{2J\varepsilon}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} Re} \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right) \right)^{\frac{2}{m+3}} \quad (36)$$

Таким образом, определены выражения для локального коэффициента теплоотдачи в виде критерия Стантона при различных законах течения внешнего потока для степенного профиля распределения скорости в пограничном слое для случая  $Pr < 1$ .

На рис. 3 показано влияние критерия Прандтля на трение и теплообмен по данным различных

исследований [29]. В области значений чисел Прандтля  $Pr > 1$  полученные теоретические зависимости для безразмерных коэффициентов теплоотдачи в виде критериев Стантона, с учетом интегрального соотношения уравнения энергии, хорошо совпадают с зависимостями, полученными другими авторами. Cf представляет коэффициент трения.

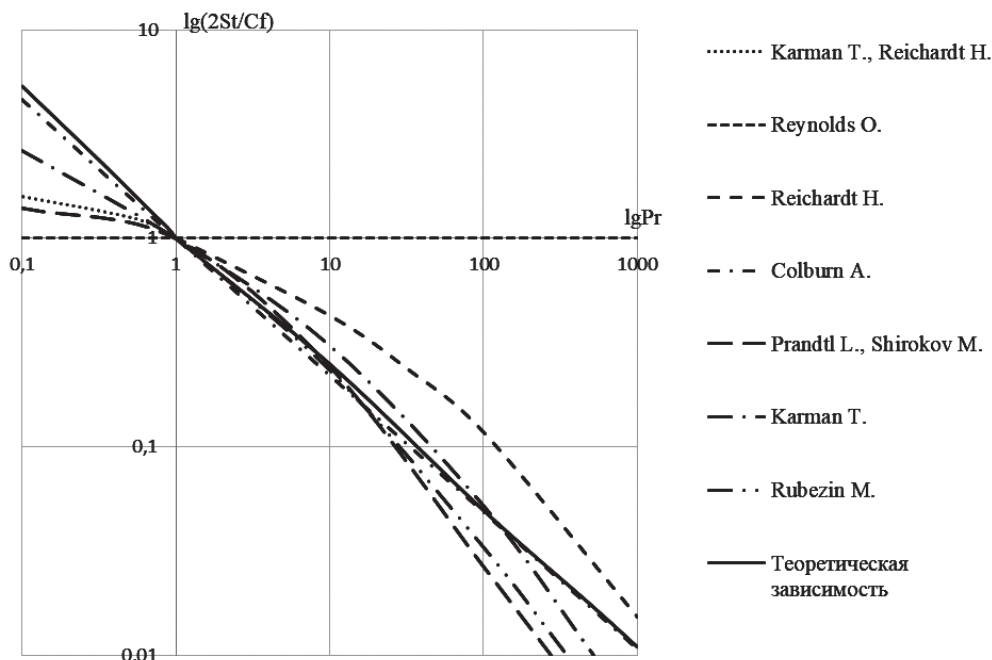


Рис. 3. Сравнение различных теорий аналогии между трением и теплообменом в турбулентных потоках при  $Re = 10^7$

Коэффициент теплоотдачи в виде критерия Нуссельта представляет произведение критериев Стантона, Рейнольдса и Прандтля  $Nu = StRePr$ .

На рис. 4 представлен график распределения безразмерного коэффициента теплоотдачи в виде критерия Нуссельта для турбулентного вращательного течения по закону «твердого тела» при критерии Прандтля  $Pr = 0,7$ . Теоретическая зависимость, определенная по модели с конвективной составляющей, дает наилучшее совпадение с результатами экспериментальных исследований. Расхождение не превышает 3,5%. Также наилучшее совпадение результатов, определяемых по модели с конвективной составляющей, дают теоретическая зависимость, полученная по аффинно-подобной модели, и теоретическая зависимость, полученная J.M. Owen [30]. Расхождения не превышают 1,5 и 2,66% соответственно.

Расхождение теоретических данных, полученных по теоретической зависимости с использованием модели с конвективной составляющей, с зависимостью, полученной И.В. Шевчуком [31], составило 9,5%, с зависимостью, полученной L.A. Dorfman [32], 16,7%.

На рис. 5 представлен график распределения безразмерного коэффициента теплоотдачи в виде критерия Нуссельта для турбулентного потенциального вращательного течения по закону «свободного вихря» при критерии Прандтля  $Pr = 0,7$ .

Теоретическая зависимость, определенная по модели с конвективной составляющей, дает хорошее совпадение с результатами экспериментальных исследований. Расхождение не превышает 5%.

Расхождение теоретических данных, полученных по теоретической зависимости с использованием модели с конвективной составляющей и по модели с аффинноподобными профилями, не превышает 3,5%. Теоретические зависимости, полученные по моделям распределения температурного и динамического пограничных слоев с конвективной составляющей и с аффинноподобными профилями при  $Pr = 0,7$ , дают достаточно похожие результаты, в связи с близким подобием распределения температурного и динамического слоев и схожи с таковыми для случая  $Pr = 1$ .

Из графика рис. 5 видно, что полученные теоретические зависимости находятся в области, определяемой другими авторами, но сравнение результатов не корректно, так как теоретические зависимости получены для других граничных условий потенциального вращательного течения по закону «свободного вихря».

Полученные теоретические зависимости и зависимости, полученные другими авторами, находятся в одном диапазоне и пригодны для инженерных расчетов и анализа данных. Необходимо отметить, что на безразмерный коэффициент теплоотдачи в виде критерия Нуссельта существен-

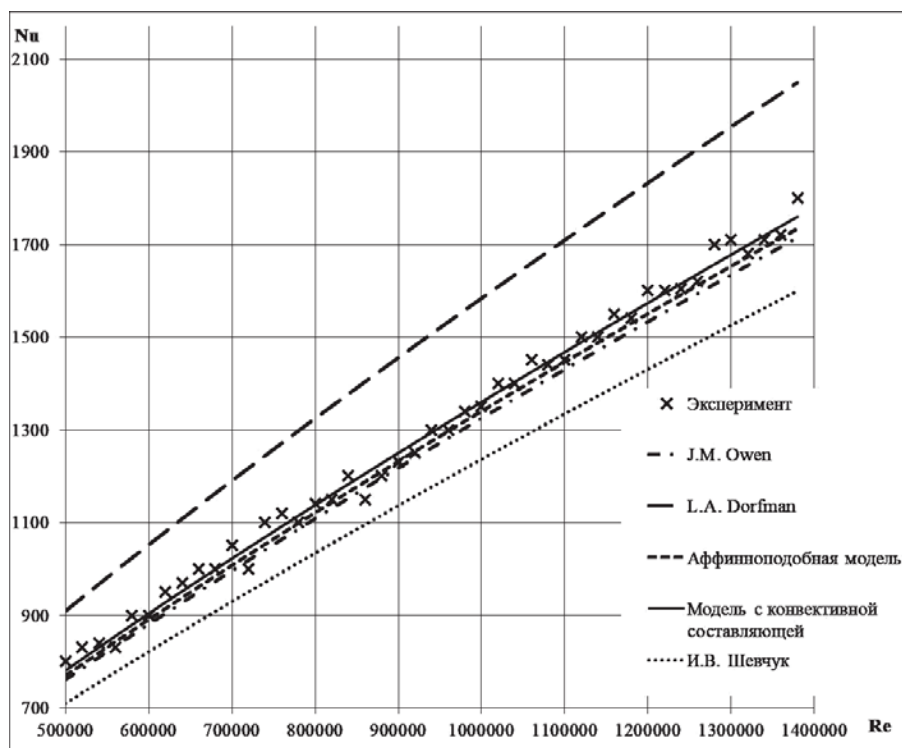


Рис. 4. Зависимость безразмерного коэффициента теплоотдачи турбулентного вращательного течения по закону твердого тела при  $Pr = 0,7$

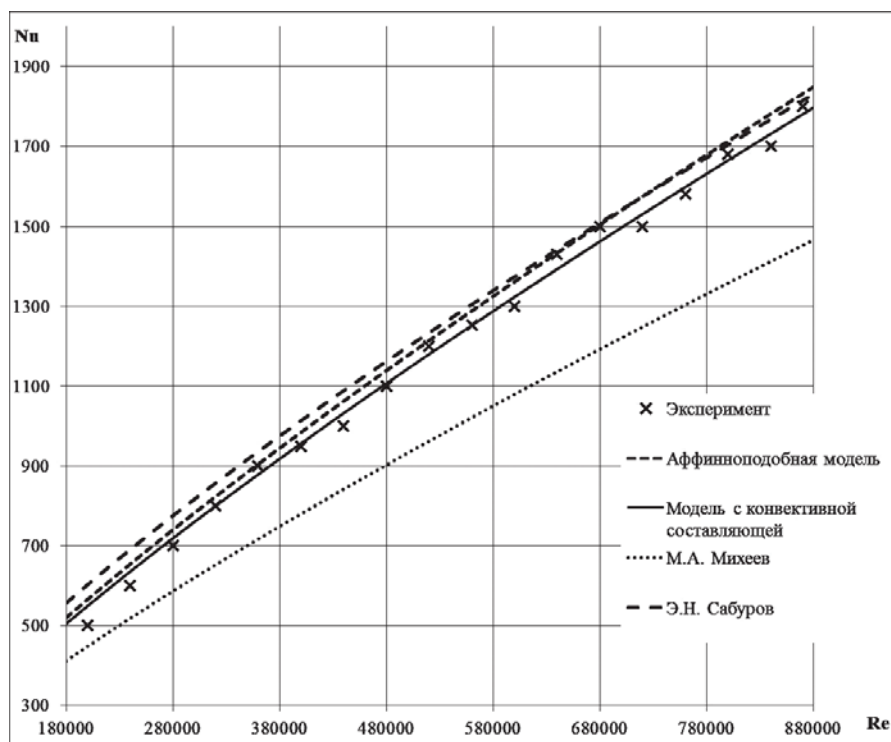


Рис. 5. Зависимость безразмерного коэффициента теплоотдачи турбулентного вращательного течения по закону свободного вихря при  $Pr^* = 0.7$

но влияют граничные условия течения и теплообмена, такие, как скорость, вязкость, плотность и градиент температур рабочего тела и поверхности теплообмена.

### Выводы

Предложена модель распределения динамического и температурного пространственных пограничных слоев с конвективной составляющей (для случая  $Pr < 1$ ), необходимая для аналитического определения локального коэффициента теплоотдачи в полостях вращения турбин жидкостных ракетных двигателей. При аналитическом решении уравнения энергии, в граничных условиях полостей газовых турбин, получены выражения для коэффициентов теплоотдачи в виде критериев Стантона для характерных элементов газового тракта, таких, как подводящие, отводящие устройства, элементы уплотнений, а также диска турбины. Полученные аналитические выражения для коэффициентов теплоотдачи верифицированы результатами проведенных экспериментальных исследований и результатами, полученными другими авторами.

### Библиографический список

1. *Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И., Федяевский К.К.* Гидромеханика. — Л.: Судостроение, 1982. — 456 с.
2. *Stoll J., Straub J.* Film cooling and heat transfer in nozzles // *Journal of Turbomachinery*. 1988. Vol. 110. Issue 1, pp. 57–64. DOI: 10.1115/1.3262168
3. *Dellimore K.H.J.* Modeling and Simulation of Mixing Layer Flows for Rocket Engine Film Cooling. Ph.D. thesis. — University of Maryland at College Park, 2010. — 303 p.
4. *Jansson L.S., Davidson L., Olsson E.* Calculation of steady and unsteady flows in a film-cooling arrangement using a two-layer algebraic stress model // *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 1994. Vol. 25. Issue 3, pp. 237–258. DOI: 10.1080/10407789408955947
5. *Cruz C.A.* Experimental and Numerical Characterization of Turbulent Slot Film Cooling. Ph.D. thesis. — University of Maryland at College Park, 2008. — 171 p.
6. *Cruz C., Marshall A.W.* Surface and gas measurements along a film cooled wall // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2007. Vol. 21. No.1, pp. 181–189. DOI: 10.2514/1.25041
7. *Betti B., Martelli E., Nasuti F.* Heat flux evaluation in oxygen/ methane thrust chambers by RANS approach // 46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference. AIAA Paper 2010–6721, 2010. DOI: 10.2514/6.2010-6721
8. *Ильинков А.В., Габдрахманов Р.Р., Такмовцев В.В., Щукин А.В.* Влияние центробежных массовых сил на теплоотдачу при обтекании потоком воздуха вогнутой поверхности с поперечными выступами // *Вестник Московского авиационного института*. 2018. Т. 25. № 1. С. 39–48.

9. Горелов Ю.Г., Строчак Е.А. Анализ закономерностей расчета коэффициента теплоотдачи от газа на входных кромках сопловых лопаток турбин высокого давления // Вестник Московского авиационного института. 2016. Т. 23. № 1. С. 80-85.
10. Шербаков М.А., Воробьев Д.А., Маслаков С.А., Равикович Ю.А. Определение коэффициента теплоотдачи на пере лопатки турбины на нерасчётных режимах работы // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20. № 3. С. 95-103.
11. Дрейцер Г.А., Исаев С.А., Лобанов И.Е. Расчёт конвективного теплообмена в трубе с периодическими выступами // Вестник Московского авиационного института. 2004. Т. 11. № 2. С. 28-35.
12. Knuth E.L. The mechanism of film cooling. Ph.D. thesis. — California Institute of Technology, 1954. — 115 p.
13. Rannie W.D. Heat transfer in turbulent shear flow // Journal of the Aeronautical Sciences. 1956. Vol. 23. No. 5, pp. 485-489.
14. Turcotte D.L. A sublayer theory for fluid injection into the incompressible turbulent boundary layer // Journal of the Aeronautical Sciences. 1960. Vol. 27. No. 9, pp. 675-678. DOI: 10.2514/8.8708
15. Howell J.C., Oberstone J., Stechman R.C. Design criteria for film cooling for small liquid-propellant rocket engines // Journal of Spacecraft and Rockets. 1969. Vol. 6. No. 2, pp. 97-102. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.29545>
16. Bartz D.R. A simple equation for rapid estimation of rocket nozzle convective heat transfer coefficients // Journal of Jet Propulsion. 1957. Vol. 27. No. 1, pp. 49-53.
17. Shine S.R., Kumar S.S., Suresh B.N. A new generalised model for liquid film cooling in rocket combustion chambers // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. Vol. 55. Issues 19-20, pp. 5065-5075. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.05.006
18. Elhefny A., Liang G. Stress and deformation of rocket gas turbine disc under different loads using finite element modelling // Propulsion and Power Research. 2013. Vol. 2. Issue 1, pp. 38-49. DOI: 10.1016/j.jprr.2013.01.002
19. Григорьев В.А., Загребельный А.О., Кузнецов С.П. К вопросу оценки массы силовой установки в задаче оптимизации параметров рабочего процесса авиационного турбовинтового двигателя // Вестник Московского авиационного института. 2015. Т. 22. № 3. С. 103-106.
20. Кишкин А.А., Черненко Д.В., Черненко Е.В. Уравнения импульсов трехмерного пограничного слоя // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2007. № 4(140). С. 35-41.
21. Романенко П.Н. Теплообмен и трение при градиентном течении жидкостей. — М.: Энергия, 1971. — 568 с.
22. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
23. Shine S.R., Nidhi S.S. Review on film cooling of liquid rocket engines // Propulsion and Power Research. 2018. Vol. 7. Issue 1, pp. 1-18. DOI: 10.1016/j.jprr.2018.01.004
24. Кейс В.М. Конвективный тепло- и массообмен: Пер. с англ. — М.: Энергия, 1972. — 448 с.
25. Кишкин А.А., Зуев А.А., Леонов В.П. Локальная теплоотдача в граничных условиях турбомашин // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2015. № 1(658). С. 3-10. DOI: 10.18698/0536-1044-2015-1-3-10
26. Толстомятов М.И., Зуев А.А., Кишкин А.А., Жуйков Д.А., Назаров В.П. Прямолинейное равномерное течение газов с теплоотдачей в энергетических установках летательных аппаратов // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2012. № 4(44). С. 134-139.
27. Зуев А.А., Кишкин А.А., Жуйков Д.А., Толстомятов М.И. Течение с теплоотдачей в полостях вращения энергетических установок космических и летательных аппаратов // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2011. № 7(40). С. 63-68.
28. Кишкин А.А., Зуев А.А., Черненко Е.В., Смирнов П.Н. Вращение жидкости над неподвижным основанием по закону твердого тела // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2011. № 1(159). С. 126-131.
29. Chapman D.R., Kester R.H. Measurements of turbulent skin friction on cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities // Journal of the Aeronautical Sciences. 1953. Vol. 20. No. 7, pp. 441-448. DOI: 10.2514/8.2688
30. Owen J.M., Rogers R.H. Flow and heat transfer in rotating-disc systems: Rotor-stator systems. — Taunton: Research Studies Press, 1989. — 302 p.
31. Shevchuk I.V. Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Disk Systems. Springer, 2009. — 235 p.
32. Дорфман Л.А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. — М.: Физматгиз, 1960. — 260 с.

## DETERMINING LOCAL HEAT TRANSFER COEFFICIENT BY A MODEL OF TEMPERATURE BOUNDARY LAYER IN GAS TURBINE CAVITY OF ROTATION

Zuev A.A.<sup>1\*</sup>, Nazarov V.P.<sup>1\*\*</sup>, Arngol'd A.A.<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> Reshetnev Siberian State University of Science and Technologies,

31, Krasnoyarsky Rabochy av., Krasnoyarsk, 660037, Russia

<sup>2</sup> Krasnoyarsk Machine-Building Plant,

29, Krasnoyarsky Rabochy av., Krasnoyarsk, 660123, Russia

\* e-mail: dla2011@inbox.ru

\*\* e-mail: nazarov@mail.sibsau.ru

### Abstract

Accounting for heat transfer specifics in flow-through parts of turbo-pump assemblies of liquid rocket engines (LRE) is a topical task. Currently, accounting for the specifics of the flow with heat transfer while realizing both potential and vortex rotary flow in the flow-through parts is implemented generally by the following methods: employing empirical equations, numerical and analytical methods for solving partial differential equations [1].

High temperatures of the working fluid lead to thermal deformations of components, including the turbine disks [18]. When designing the flow-through parts of the LRE turbo-pump units and assemblies, it is necessary to account for the temperature change of the working fluid flow along the working channel, since the viscosity parameter is a function of temperature and determines the flow regime and, as a result, losses, particularly disk friction and hydrodynamic losses in the flow-through part. The LRE turbo-pump energy parameters modelling is a topical scientific and technical task. The issues of the workflow parameters optimization, and the propulsion system mathematical model were reviewed in the V.A. Grigoriev's treatise [19], where analysis of the models was performed, and merits and demerits for various design stages were disclosed.

A model for dynamic and thermal spatial boundary layers distribution with convective component for the combustion products turbulent flow in the LRE gas turbines rotation cavities is proposed. For combustion products, the Prandtl number is less than unity ( $Pr < 1$ ), and dynamic boundary layer thickness is less than the thermal boundary layer one. It was assumed, that the temperature change and thickness of energy loss within the dynamic boundary layer border occurs due to the dynamic velocity transfer, and beyond the border - due to thermal conductivity only. This assumption complies well with the inferences of many authors [20, 21, 24]. Thermal resistance manifests itself

over the entire thermal boundary layer thickness. Thermal resistance exists within the dynamic boundary layer borders due to the turbulent heat transfer, and beyond the border - due to thermal conductivity [24]. The distribution model of the dynamic and thermal spatial boundary layers with convective component is necessary for analytical determination of the local heat transfer coefficient in the LRE turbines rotation cavities.

The main objects of research, where the potential and vortex rotational flow is realized, are the flow-through components of LRE gas turbines such as inlet and outlet devices, as well as cavities between the stator and the working wheel [20].

An integral relation for the thermal spatial boundary layer energy equation, allowing integration over the surface of any shape, which is necessary for determining the thickness of energy loss, was obtained. The expressions for determining the energy loss thickness for thermal spatial boundary layer are necessary to determine the local heat transfer coefficients for the typical flow cases with account for the heat exchange.

Expressions for determining the local heat transfer coefficient in the Stanton number form for the straight linear uniform flow, rotational flow according to the rigid body law, and rotational flow of the free vortex of a power profile distribution for dynamic and thermal boundary layers parameters in case of  $Pr < 1$  were obtained analytically.

Local heat transfer coefficient in the Stanton number form for straight linear uniform turbulent flow is

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left( \frac{\left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right) (m+1)}{\alpha_{\text{л}}^{m-1} (m+3) Re_U} \right)^{\frac{2}{m+3}}$$

where  $m$  – is the turbulization degree of spatial boundary layer dynamic velocity profile,  $x = \frac{\delta}{\delta_l} = \sqrt[3]{Pr}$  – is the dynamic and thermal boundary layers ratio of the thickness,  $\lambda$  – is the coefficient of thermal conductivity,  $\alpha_{л} = 12,5496 Pr^{\frac{1}{18}}$  – the laminar sublayer coefficient of turbulent velocity distribution profile (obtained considering the two-layer turbulence model with a viscous laminar sublayer),  $Re$  – the Reynolds number.

Local heat transfer coefficient in the Stanton number form for rotational flow according to the rigid body law is

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left( \frac{2J\varepsilon}{\alpha_{л}^{m-1} Re} \frac{(m+1)}{(m+3)} \right)^{\frac{2}{m+3}} \times \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right)^{\frac{2(m+3)-4}{(m+1)(m+3)}}$$

where  $\varepsilon$  – is the angle tangent of the bottom streamlines bevel,  $J$  – is the relative characteristic thickness.

Local heat transfer coefficient in the Stanton number form for rotational flow of a free vortex is

$$St = \frac{1}{Pr^{\frac{m+1}{m+3}}} \left( \frac{2J\varepsilon}{\alpha_{л}^{m-1} Re} \left( \frac{xm}{(m+1)(m+2)} - \frac{\lambda(x-1)^2}{2x} \right) \right)^{\frac{2}{m+3}}$$

Analytical expressions for heat transfer coefficients agree well with the experimental data and dependencies of other authors [7–10].

The obtained analytical expressions well agree with the data of other authors and are necessary for engineering calculations while designing the LRE flow-through parts of turbo-pumps.

**Keywords:** temperature boundary layer, heat transfer coefficient, integral relation of energy equation, flow-through part of turbo-pump assembly.

## References

1. Voitkunsii Ya.I., Faddeev Yu.I., Fedyavskii K.K. *Gidromekhanika* (Hydromechanics), Leningrad, Sudostroenie, 1982, 456 p.
2. Stoll J., Straub J. Film cooling and heat transfer in nozzles. *Journal of Turbomachinery*, 1988, vol. 110, issue 1, pp. 57–64. DOI: 10.1115/1.3262168
3. Dellimore K.H.J. *Modeling and Simulation of Mixing Layer Flows for Rocket Engine Film Cooling*. Ph.D. thesis. University of Maryland at College Park, 2010, 303 p.
4. Jansson L.S., Davidson L., Olsson E. Calculation of steady and unsteady flows in a film-cooling arrangement using a two-layer algebraic stress model. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 1994, vol. 25, issue 3, pp. 237–258. DOI: 10.1080/10407789408955947
5. Cruz C.A. *Experimental and Numerical Characterization of Turbulent Slot Film Cooling*. Ph.D. thesis. University of Maryland at College Park, 2008, 171 p.
6. Cruz C., Marshall A.W. Surface and gas measurements along a film cooled wall. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2007, vol. 21, no. 1, pp. 181–189. DOI: 10.2514/1.25041
7. Betti B., Martelli E., Nasuti F. Heat flux evaluation in oxygen/ methane thrust chambers by RANS approach. *46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*. AIAA Paper 2010–6721, 2010. DOI: 10.2514/6.2010-6721
8. Il'inkov A.V., Gabdrakhmanov R.R., Takmvtsev V.V., Shchukin A.V. Effect of centrifugal mass forces on heat transfer when airflow of concave surface with transverse projections. *Aerospace MAI Journal*, 2018, vol. 25, no. 1, pp. 39–48.
9. Gorelov Yu.G., Strokach E.A. Conformities analysis of heat transfer coefficient calculation from the gas at high-pressure turbines entry nozzle blade edges. *Aerospace MAI Journal*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 80–85.
10. Shcherbakov M.A., Vorobyov D.A., Maslakov S.A., Ravikovich Yu.A. Calculation of heat-transfer coefficient on a turbine blade airfoil in abnormal modes. *Aerospace MAI Journal*, 2013, vol. 20, no.3, pp. 95–103.
11. Dreytser G.A., Isayev S.A., Lobanov I.E. Computation of convective heat transfer in a tube with repeating protrusions. *Aerospace MAI Journal*, 2004, vol. 11, no. 2, pp. 28–35.
12. Knuth E.L. *The mechanism of film cooling*. Ph.D. thesis. California Institute of Technology, 1954, 115 p.
13. Rannie W.D. Heat transfer in turbulent shear flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1956, vol. 23, no. 5, pp. 485–489.
14. Turcotte D.L. A sublayer theory for fluid injection into the incompressible turbulent boundary layer. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1960, vol. 27, no. 9, pp. 675–678. DOI: 10.2514/8.8708
15. Howell J.C., Oberstone J., Stechman R.C. Design criteria for film cooling for small liquid-propellant rocket engines. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1969, vol. 6, no. 2, pp. 97–102. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.29545>
16. Bartz D.R. A simple equation for rapid estimation of rocket nozzle convective heat transfer coefficients. *Journal of Jet Propulsion*, 1957, vol. 27, no. 1, pp. 49–53.
17. Shine S.R., Kumar S.S., Suresh B.N. A new generalised model for liquid film cooling in rocket combustion chambers. *International Journal of Heat and Mass*



- Transfer*, 2012, vol. 55, issues 19-20, pp. 5065–5075. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.05.006
18. Elhefny A., Liang G. Stress and deformation of rocket gas turbine disc under different loads using finite element modelling. *Propulsion and Power Research*, 2013, vol. 2, issue 1, pp. 38-49. DOI: 10.1016/j.jprr.2013.01.002
  19. Grigoriev V.A., Zagrebelnyi A.O., Kuznetsov S.P. On the of power plant mass evaluation in the problem of aircraft turboprop operating procedure optimization. *Aerospace MAI Journal*, 2015, vol. 22, no. 3, pp. 103-106.
  20. Kishkin A.A., Chernenko D.V., Chernenko E.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki*, 2007, no. 4(140), pp. 35-41.
  21. Romanenko P.N. *Teplomassoobmen i trenie pri gradientnom techenii zhidkosti* (Heat and mass transfer and friction at gradient flow of liquids), Moscow, Energiya, 1971, 568 p.
  22. Shlikhting G. *Teoriya pogrannichnogo sloya* (Theory of boundary layer), Moscow, Nauka, 1974, 712 p.
  23. Shine S.R., Nidhi S.S. Review on film cooling of liquid rocket engines. *Propulsion and Power Research*, 2018, vol. 7, issue 1, pp. 1-18. DOI: 10.1016/j.jprr.2018.01.004
  24. Kays W.M., Crawford M.E. Convective heat and mass transfer. 3rd edition. McGraw-Hill, Inc., 1993, 601 p.
  25. Kishkin A.A., Zuev A.A., Leonov V.P. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie*, 2015, no. 1(658), pp. 3-10. DOI: 10.18698/0536-1044-2015-1-3-10
  26. Tolstopyatov M.I., Zuev A.A., Kishkin A.A., Zhuikov D.A., Nazarov V.P. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni akademika M.F. Reshetneva*, 2012, no. 4(44), pp. 134-139.
  27. Zuev A.A., Kishkin A.A., Zhuikov D.A., Tolstopyatov M.I. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta imeni akademika M.F. Reshetneva*, 2011, no. 7(40), pp. 63-68.
  28. Kishkin A.A., Zuev A.A., Chernenko E.V., Smirnov P.N. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki*, 2011, no. 1(159), pp. 126-131.
  29. Chapman D.R., Kester R.H. Measurements of turbulent skin friction on cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1953, vol. 20, no. 7, pp. 441-448. DOI: 10.2514/8.2688
  30. Owen J.M., Rogers R.H. *Flow and heat transfer in rotating-disc systems: Rotor-stator systems*. Taunton, Research Studies Press, 1989, 302 p.
  31. Shevchuk I.V. *Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Disk Systems*, Springer, 2009, 235 p.
  32. Dorfman L.A. *Gidrodinamicheskoe soprotivlenie i teplootdacha vrashchayushchikhsya tel* (Hydrodynamic resistance and heat transfer of rotating bodies), Moscow, Fizmatgiz, 1960, 260 p.