Труды МАИ. 2023. № 133
Trudy MAI, 2023, no. 133

Научная статья
УДК 531.38
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=177663

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К СОСТАВЛЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛО- ДВЕ ЖИДКОСТИ

Ко Ко Вин
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия
win.c.latt@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена формулировке основных уравнений нелинейной динамики твердого тела, совершающего сложное движение, и имеющего полость заполненной двухслойной идеальной тяжелой жидкостью. В постановке задачи введено рассмотрение квазискоростей вместо обобщенных скоростей и использовано уравнение Эйлера-Лагранжа для движения твердого тела. В статье показывается, что с помощью принципа Остроградского, была получена полная совокупность уравнений движения твердого тела относительно квазискоростей V_{0i}, ω_i и движения двухслойной жидкости относительно обобщенных координат β_j и Q_n.

Ключевые слова: вариационный принцип, несмешивающиеся жидкости, возмущённая поверхность раздела, вариации квазикоординат, вариации квазискоростей

Для цитирования: Вин К.К. Вариационный подход к составлению нелинейных уравнений движения системы тело- две жидкости // Труды МАИ. 2023. № 133. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=177663

Original article

VARIATIONAL APPROACH TO COMPILING NONLINEAR EQUATIONS OF MOTION FOR A BODY-TWO FLUIDS SYSTEM

Ko Ko Win
Moscow State Technical University. N.E. Bauman,
Moscow, Russia
win.c.latt@gmail.com

Abstract. The dynamics of motion of a solid body interacting with a fluid is an important field of research in mechanics and physics. Particularly interesting are cases where several immiscible liquids are present in the cavity of a solid. The introduction briefly introduces the main aspects of this topic, covering both linear and nonlinear approximations. The article is devoted to the formulation of the basic equations of nonlinear dynamics of a solid body undergoing complex motion and having a cavity filled with a two-layer ideal heavy liquid. In the formulation of the problem, consideration of quasi-velocities was introduced instead of generalized velocities and the Euler-Lagrange equation for the motion of a rigid body was used. The article shows that using the Ostrogradsky principle, a complete set of equations of motion of a rigid body relative to quasi-velocities V_{0i}, ω_i and the motion of a two-layer liquid relative to generalized coordinates β_j and Q_n was obtained.

The article is devoted to the definition of differential equations for the generalized coordinate motions of a two-layer liquid in the cavity of a solid body performing a given motion in space. In the article, the formulation of a nonlinear problem about the motions of immiscible incompressible ideal liquids that completely fill a cylindrical cavity is formulated, and velocity potentials are given for each liquid.

The article shows that with the help of the variational principle, written in a form different from the traditional one, it is possible to obtain a complete set of equations of nonlinear motions of liquids, including nonlinear kinematic and dynamic conditions on the interfaces of liquids filling the cavity of a solid body that performs a given movement.

Keywords: variational principle, immiscible liquids, perturbed interface, variations of quasi-coordinates, variations of quasi-velocities

For citation: Win K.K. Variational approach to compiling nonlinear equations of motion for a body-two fluids system. *Trudy MAI*, 2023, no. 133. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=177663

1. Введение

Динамика движения твердого тела, взаимодействующего с жидкостью, представляет собой важное поле исследований в механике и физике. Особенно интересными являются случаи, когда в полости твердого тела присутствуют несколько несмешивающихся жидкостей. Во введении кратко представлены основные аспекты этой темы, охватывая как линейные, так и нелинейные приближения.

В рамках линейных приближений рассматривались следующие задачи. В работах [1-2] исследовался вопрос об управлении движением сосуда, при котором внутренние волны, возникающие в двухслойной тяжелой жидкости, были погашены за конечный момент времени. Также в ходе исследования рассматривалась проблема колебаний твердого тела, упруго связанного с неподвижным основанием и имеющего прямоугольную полость. В статье [3] было продемонстрировано качественное различие между движениями твердого тела, полость которого полностью заполнена двумя различными жидкостями, и аналогичными случаями движения твердого тела с однородной капельной жидкостью, рассмотренных ранее Н.Е. Жуковским [4]. Обсуждаемые проблемы были подвергнуты исследованию во многих работах, посвященных линейной задаче динамики однородной жидкости, частично заполняющей полости подвижного твёрдого или деформируемого тела. В последние годы эта тема активно исследуется в различных областях науки и инженерии [5-6].

Следует отметить, что идея применения вариационных принципов для вывода уравнений движения твердого тела, внутри которого находится жидкость, была предложена ранее В.В. Румянцевым [7-8].

В работе [9] изложены вариационные принципы механики жидкости и газа и механики твердого деформируемого тела. Описаны прямые качественные методы вариационного исчисления (теория двойственности вариационных задач). В статье [10] рассмотрен вариационный принцип классической задачи о волнах на воде в эйлеровых координатах с использованием функции давления жидкости.

Приведённый функционал сравнивается с более распространенным выражением, получаемым из разницы между кинетической и потенциальной энергией.

В статье [11] были рассмотрены параметрические колебания жидкости, заполняющей цилиндрический сосуд и была показана возможность возбуждения малых симметричных колебаний в системе с демпфированием. В работе [12] предполагалось, что конструкция из двух соосных оболочек, заполненных жидкостью, находится под внешним и внутренним давлением. К внутренней цилиндрической оболочке прилагается внутреннее распределенное давление, а к внешней оболочке - внешнее давление и эти давления являются независимыми переменными.

В рамках нелинейных задач в работе [13] исследовались нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, которая содержит вязкую несжимаемую жидкость и окружена упругой средой.

В работе [14] был получен аналогичный результат для тяжелой идеальной жидкости, частично заполняющей полость подвижного твердого тела. Такая постановка задачи представляет значительный интерес в контексте разработки приближенных методов исследования динамики твердого тела с полостями, содержащими жидкость, в нелинейной постановке. Аналогичные исследования для неподвижных сосудов показали, что приближенные методы анализа нелинейных задач динамики жидкости на основе их вариационной формулировки обладают рядом преимуществ по сравнению с другими приближенными методами [15].

В работе [16] исследовалась задача о колебаниях жидкости со свободной поверхностью в резервуарах нецилиндрической формы. В основу исследования положены вариационные методы механики, математической физики и методы нелинейной механики. В последние время появились работы, в которых проводили теоретико-экспериментальные исследования колебания двуслойной жидкости в баках в виде прямоугольного параллелепипеда [17], круглого цилиндра [18-19]. В классическом варианте вариационного метода Гамильтона-Остроградского с использованием множителей Лагранжа можно получить уравнения движения механической системы, включающей тело и две жидкости, включая динамические условия на поверхности раздела между жидкостями.

В работе [20], используя вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, приведены постановки краевых задач, описывающих немалые колебания двух жидкостей сосудов произвольной формы, совершающих заданное движение в пространстве.

2. Постановка задачи

В предыдущих работах [18-20] получена постановка нелинейных краевых задач о колебаниях двух жидкостей в полости твердых тел, двигающихся в заданном направлении. Другим важным аспектом теории движения тел с полостями, содержащими жидкость, является вторая задача динамики твёрдого тела с жидкостью - определение движения твёрдого тела и жидкостей внутри него, а также сил взаимодействия между телом и жидкостями при действии внешних сил на тело. В данной работе на основе принципа Остроградского рассматривается вывод уравнений движения твердого тела и двухслойной жидкости.

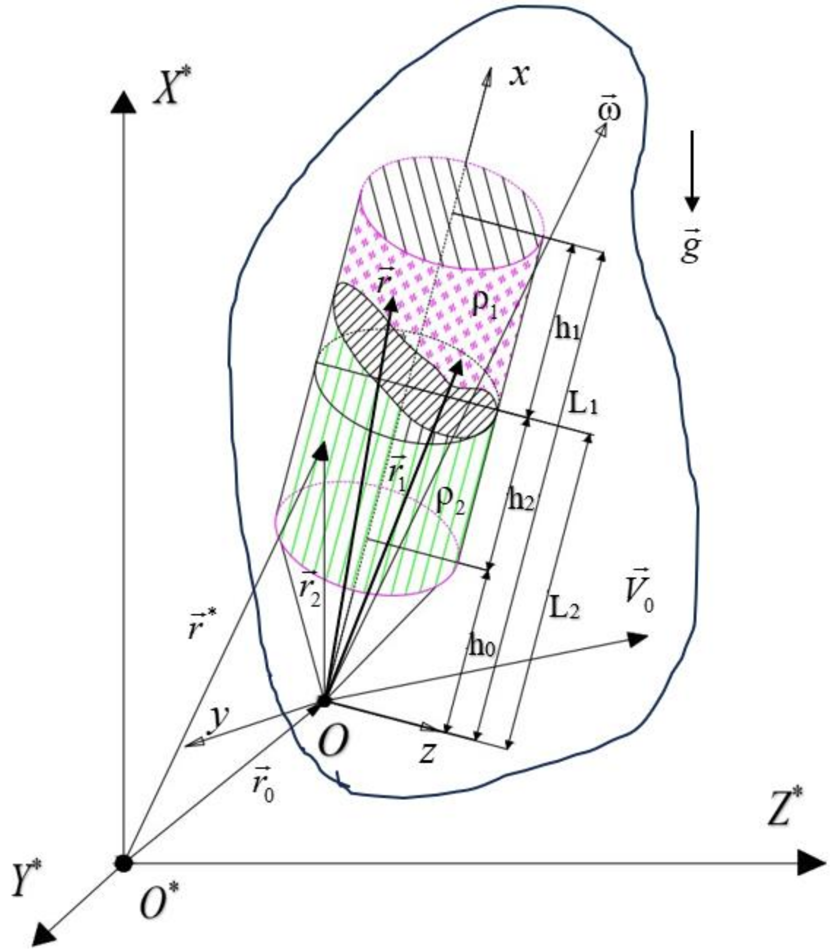

Рис. 1. Система координат и принятые обозначения

Введём в рассмотрение неподвижную систему координат $O^* X^* Y^* Z^*$ и жёстко связанную с твёрдым телом систему координат $Oxyz$.

На рис. 1 представлены основные обозначения и системы координат рассматриваемой механической системы. Уравнения движения рассматриваемой механической системы будем относить к подвижной системе координат. Параметры, определяющие движение твёрдого тела, выберем в виде квазискоростей V_{0i} и ω_i $(i = 1, 2, 3)$, а обобщенные координаты, характеризующие движение двухслойной жидкости, оставим прежними $-\beta_j(t)$ и $Q_n(t)$ [18-19]. Сообщим твёрдому телу бесконечно малые поступательное и вращательное перемещения, а жидкости бесконечно малые приращения обобщенных координат $\delta\beta_j(t)$ и $\delta Q_n(t)$.

Возможное перемещение любой точки твердого тела и жидкостей можно записать в виде

$$\delta\vec{r}^* = \delta\vec{r}_0 + \delta\vec{\theta} \times \vec{r} + \delta\vec{r}\,, \tag{1}$$

где $\delta\vec{r}_0$-возможное перемещение полюса O системы осей $Oxyz$, связанных с твердым телом; $\delta\theta$-вектор бесконечного малого поворота твердого тела; $\delta\vec{r}$ обозначает вариацию радиуса-вектора $\vec{r}$ при фиксированных ортах связанной с телом системы координат.

Элементарная работа сил, действующих на твердое тело, определяется как

$$\delta A = \vec{P} \cdot \delta\vec{r}_0 + \vec{M}^{\,0} \cdot \delta\theta\,. \tag{2}$$

На проекциях на оси связанной системы координат $Oxyz$

$$\delta A = P_1 \cdot \delta r_{01} + P_2 \cdot \delta r_{02} + P_3 \cdot \delta r_{03} + M_1^0 \cdot \delta\theta_1 + M_2^0 \cdot \delta\theta_2 + M_3^0 \cdot \delta\theta_3\,, \tag{3}$$

где δr_{0i} и $\delta\theta_i$-вариации квазикоординат, соответствующие квазискоростям V_{0i} и ω_i. Квазискорости ω_i, как известно, связаны с обобщенными скоростями формулами [21]

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi}\,, \\ \omega_2 &= \dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}\cos\varphi\,, \\ \omega_3 &= \dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi - \dot{\vartheta}\sin\varphi\,, \end{aligned} \tag{4}$$

где ψ, ϑ и φ - эйлеровы углы. В этом случае вариации квазикоординат определяться через вариации $\delta\psi, \delta\vartheta, \delta\varphi$ обобщенных координат соотношениями

$$\begin{aligned}
\delta\theta_1 &= \cos\vartheta\delta\psi + \delta\varphi, \\
\delta\theta_2 &= \sin\vartheta\sin\varphi\delta\psi + \cos\varphi\delta\vartheta, \qquad (5) \\
\delta\theta_3 &= \sin\vartheta\cos\varphi\delta\psi - \sin\varphi\delta\vartheta.
\end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следуют выражения [21],

$$\begin{aligned}
(\delta\theta_1)^{\cdot} - \delta\omega_1 &= \omega_3\delta\theta_2 - \omega_2\delta\theta_3, \\
(\delta\theta_2)^{\cdot} - \delta\omega_2 &= \omega_1\delta\theta_3 - \omega_3\delta\theta_1, \qquad (6) \\
(\delta\theta_3)^{\cdot} - \delta\omega_3 &= \omega_2\delta\theta_1 - \omega_1\delta\theta_2,
\end{aligned}$$

Аналогичные зависимости можно также получить для квазикоординат $\delta\vec{r}_0$, используя соответствующие выражения.

$$V_{0k} = \vec{V}_0 \cdot \vec{i}_k, \ \delta r_{0k} = \delta\vec{r}_{0k} \cdot \vec{i}_k, \ \delta\vec{i}_k = \delta\vec{\theta} \times \vec{i}_k, \qquad (7)$$

а также формулы дифференцирования единичных векторов

$$(\delta r_{1k})^{\cdot} - \delta V_{0k} = (\delta r_0 \times \omega_2 - V_0\delta\theta) \cdot \vec{i}_k, \qquad (8)$$

или

$$\begin{aligned}
(\delta r_{01})^{\cdot} - \delta V_{01} &= \omega_3\delta r_{02} - \omega_2\delta r_{03} + V_{03}\delta\theta_2 - V_{02}\delta\theta_3, \\
(\delta r_{02})^{\cdot} - \delta V_{02} &= \omega_1\delta r_{03} - \omega_3\delta r_{01} + V_{01}\delta\theta_3 - V_{03}\delta\theta_1, \qquad (9) \\
(\delta r_{03})^{\cdot} - \delta V_{03} &= \omega_2\delta r_{01} - \omega_1\delta r_{02} + V_{02}\delta\theta_1 - V_{01}\delta\theta_2.
\end{aligned}$$

Действительно, использование квазискоростей вместо обобщенных скоростей и уравнений Эйлера-Лагранжа для твёрдого тела вместо уравнений Лагранжа даёт значительные преимущества в динамике систем твердых тел. Уравнения Эйлера-Лагранжа принимают более простую форму, потому что кинетическая энергия выражается через квазискорости гораздо проще, чем через обобщенные скорости.

Для определения кинетической энергии твёрдого тела через квазискорости можно использовать выражение:

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \vec{V}_0^2 + m_0 \vec{V}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot J^0 \cdot \vec{\omega} =$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} m_0 (V_{01}^2 + V_{02}^2 + V_{03}^2) + 2 m_0 [(V_{01}\omega_3 - V_{03}\omega_2) x_c^0 + \\ +(V_{03}\omega_1 - V_{01}\omega_3) y_c^0 + (V_{01}\omega_2 - V_{02}\omega_1) z_c^0] + J_{11}^0 \omega_1^2 + J_{22}^0 \omega_2^2 + \\ + J_{33}^0 \omega_3^2 + 2 J_{12}^0 \omega_1 \omega_2 + 2 J_{23}^0 \omega_2 \omega_3 + 2 J_{31}^0 \omega_3 \omega_1 \end{matrix} \right\}, \qquad (10)$$

а выражение для потенциальной энергии твёрдого тела в поле силы тяжести может быть представлено в виде

$$\Pi_0 = -m_0 g \cdot r_c^*, \qquad (11)$$

где $r_c^* = r_0 + r_c^0 = r_0 + \frac{1}{m_0} \int\limits_{(m_0)} \vec{r} dm$.

Величины J_{ij}^0 в выражении (10) обозначает компоненты тензора инерции J^0 твердого тела в точке O. Они связаны с осевыми и центробежными моментами инерции тела следующими соотношениями:

$$J_{11}^0 = J_x^0, \; J_{22}^0 = J_y^0, \; J_{33}^0 = J_z^0, \qquad (12)$$

$$J_{12}^0 = J_{21}^0 = -J_{xy}^0, \; J_{23}^0 = J_{32}^0 = -J_{yz}^0, \; J_{13}^0 = J_{31}^0 = -J_{zx}^0. \qquad (13)$$

С учетом выражения (1)

$$\delta \Pi_0 = -m_0 \vec{g} \cdot \delta \vec{r}_0 - (m_0 \vec{r}_c^{\,0} \times \vec{g}) \cdot \delta \theta = -\vec{P}^C \cdot \delta \vec{r}_0 - M^C \cdot \delta \theta, \qquad (14)$$

Вариацию кинетического потенциала L_0 можно представить в форме

$$\delta L_0 = \frac{\partial T_0}{\partial V_{01}}\delta V_{01} + \frac{\partial T_0}{\partial V_{02}}\delta V_{02} + \frac{\partial T_0}{\partial V_{03}}\delta V_{03} + \frac{\partial T_0}{\partial \omega_1}\delta \omega_1 + \frac{\partial T_0}{\partial \omega_2}\delta \omega_2 + \frac{\partial T_0}{\partial \omega_3}\delta \omega_3 +$$
$$+P_1^C \delta r_{01} + P_2^C \delta r_{02} + P_3^C \delta r_{01} + M_1^C \cdot \delta\theta_1 + M_2^C \cdot \delta\theta_2 + M_3^C \cdot \delta\theta_3, \tag{15}$$

При изучении задач динамики механической системы, состоящей из твердого тела и жидких масс, будем использовать принцип Остроградского в следующем виде:

$$\delta W_0 + \delta W + \int_{t_1}^{t_2} \delta' A dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L_0 + \delta L + \delta' A) dt = 0, \tag{16}$$

где $L_0 = T_0 - \Pi_0$-кинетический потенциал твердого тела; L-функция Лагранжа в задачах динамики ограниченного объема двух жидкостей, совершающих заданное движение и определяемая выражениями [18], $\delta' A$- элементарная работа непотенциальных сил, приложенных к твердому телу, определяется как $\delta' A = \sum_{i=1}^{n} P_i \delta\theta_i$, $\delta\theta_i$-вариации квазикоординат. Обобщенные силы P_i войдут в правые части уравнений.

Уравнения движения относительно обобщенных координат $\beta_j(t)$ и $Q_n(t)$, характеризующих движение двухслойной жидкости, и квазискоростей V_{0i} и ω_i, которые характеризуют движение твердого тела, могут быть получены из (16), используя приведенные выше результаты. При определении δW по формуле [18] необходимо учитывать, что квазискорости также варьируются:

$$
\delta W = -\int_{t_1}^{t_2} \left[\begin{array}{l}
(l_{11} + l_{21})\delta V_{01} + (l_{12} + l_{22})\delta V_{02} + (l_{13} + l_{23})\delta V_{03} + (l_{11\omega} + l_{21\omega})\delta\dot{\omega}_1 + \\
+(l_{12\omega} + l_{22\omega})\delta\dot{\omega}_2 + (l_{13\omega} + l_{23\omega})\delta\dot{\omega}_3 + (l^*_{11\omega} + l^*_{21\omega})\delta\omega_1 + \\
+(l^*_{12\omega} + l^*_{22\omega})\delta\omega_2 + (l^*_{13\omega} + l^*_{23\omega})\delta\omega_3 - (J_{211} + J_{111})\omega_1\delta\omega_1 - \\
-(J_{222} + J_{122})\omega_2\delta\omega_2 - (J_{233} + J_{133})\omega_3\delta\omega_3 - (J_{212} + J_{112})\omega_2\delta\omega_1 - \\
-(J_{212} + J_{112})\omega_1\delta\omega_2 - (J_{213} + J_{113})\omega_1\delta\omega_3 - (J_{213} + J_{113})\omega_3\delta\omega_1 - \\
-(J_{223} + J_{123})\omega_2\delta\omega_3 - (J_{223} + J_{123})\omega_3\delta\omega_2 - m^*(V_{01}\delta V_{01} + V_{02}\delta V_{02} + \\
+V_{03}\delta V_{03}) + (l_{21} + l_{11})(\omega_2\delta V_{03} + V_{03}\delta\omega_2 - \omega_3\delta V_{02} - V_{02}\delta\omega_3) + \\
+(l_{22} + l_{12})(\omega_3\delta V_{01} + V_{01}\delta\omega_3 - \omega_1\delta V_{03} - V_{03}\delta\omega_1) + (l_{23} + l_{13})(\omega_1\delta V_{02} + \\
+V_{02}\delta\omega_1 - \omega_2\delta V_{01} - V_{01}\delta\omega_2) - m^*\vec{g} \cdot \delta r_0 - (m_1 r_{1c} \times \vec{g}) \cdot \delta\theta - \\
-(m_2 r_{2c} \times \vec{g}) \cdot \delta\theta
\end{array} \right] dt - \delta W^*
$$

, (17)

где выражение δW^* было приведено в работе [20].

Интегрируя по частям выражения

$$
\int_{t_1}^{t_2} l_{ki} V_{0i} dt\,,\ \int_{t_1}^{t_2} l_{ki\omega}\delta\omega_i dt\,,\ \int_{t_1}^{t_2} B_{kn}\delta\dot{Q}_n dt\,, \tag{18}
$$

и принимая во внимание условия ограничения на действительные движения и движения сравнения [20], из (17) получаем

$$
\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left[\begin{array}{l}
(\frac{d(l_{11}+l_{21})}{dt} + m^{*}V_{01} + (l_{23}+l_{13})\omega_2 - (l_{22}+l_{12})\omega_3)\delta V_{01} + (\frac{d(l_{22}+l_{12})}{dt} + \\
+ m^{*}V_{02} + (l_{11}+l_{21})\omega_3 - (l_{23}+l_{13})\omega_1)\delta V_{02} + (\frac{d(l_{23}+l_{13})}{dt} + m^{*}V_{03} + \\
+(l_{22}+l_{12})\omega_1 - (l_{11}+l_{21})\omega_2)\delta V_{03} + (\frac{d(l_{21\omega}+l_{11\omega})}{dt} + (J_{211}+J_{111})\omega_1 + \\
+(J_{212}+J_{112})\omega_2 + (J_{213}+J_{113})\omega_3 - (l^{*}_{21\omega}+l^{*}_{11\omega}) + (l_{22}+l_{12})V_{03} - \\
-(l_{23}+l_{13})V_{02})\delta\omega_1 + (\frac{d(l_{22\omega}+l_{12\omega})}{dt} + (J_{222}+J_{122})\omega_2 + (J_{223}+J_{123})\omega_3 + \\
+(J_{212}+J_{112})\omega_1 - (l^{*}_{22\omega}+l^{*}_{12\omega}) + (l_{23}+l_{13})V_{01} - (l_{11}+l_{21})V_{03})\delta\omega_2 + \\
+(\frac{d(l_{23\omega}+l_{13\omega})}{dt} + (J_{233}+J_{133})\omega_3 + (J_{213}+J_{113})\omega_1 + (J_{223}+J_{123})\omega_2 - \\
-(l^{*}_{23\omega}+l^{*}_{13\omega}) + (l_{11}+l_{21})V_{02} - (l_{22}+l_{12})V_{01})\delta\omega_3 + m^{*}\vec{g}\cdot\delta r_0 + \\
+(m_1 r_{1c}\times\vec{g})\cdot\delta\theta + (m_2 r_{2c}\times\vec{g})\cdot\delta\theta + \\
+\sum_n (B_{2n}+B_{1n})\delta\dot{Q}_n + \frac{1}{2}\sum_n\sum_m (B_{2nm}+B_{1nm})Q_m\delta Q_n + \\
+\sum_j \left(\begin{array}{l}
\sum_n \dot{Q}_n(\frac{\partial B_{2n}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial B_{1n}}{\partial\beta_j}) + \omega_1(\frac{\partial l^{*}_{21\omega}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial l^{*}_{11\omega}}{\partial\beta_j}) + \omega_2(\frac{\partial l^{*}_{22\omega}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial l^{*}_{12\omega}}{\partial\beta_j}) + \\
+\omega_3(\frac{\partial l^{*}_{23\omega}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial l^{*}_{13\omega}}{\partial\beta_j}) + \frac{1}{2}\sum_n\sum_m Q_m Q_n(\frac{\partial B_{2nm}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial B_{1nm}}{\partial\beta_j}) + \dot{\omega}_1(\frac{\partial l_{21\omega}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial l_{11\omega}}{\partial\beta_j}) \\
+\dot{\omega}_2(\frac{\partial l_{22\omega}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial l_{12\omega}}{\partial\beta_j}) + \dot{\omega}_3(\frac{\partial l_{23\omega}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial l_{13\omega}}{\partial\beta_j}) + (\dot{V}_{01} - g_1 + \omega_2 V_{03} - \omega_3 V_{02}) \\
(\frac{\partial l_{21}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial l_{11}}{\partial\beta_j}) + (\dot{V}_{02} - g_2 + \omega_3 V_{01} - \omega_1 V_{03})(\frac{\partial l_{22}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial l_{12}}{\partial\beta_j}) + (\dot{V}_{03} - g_3 + \omega_1 V_{02} \\
-\omega_2 V_{01})(\frac{\partial l_{23}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial l_{13}}{\partial\beta_j}) - \frac{1}{2}\omega_1^2(\frac{\partial J_{211}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial J_{111}}{\partial\beta_j}) - \frac{1}{2}\omega_2^2(\frac{\partial J_{222}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial J_{122}}{\partial\beta_j}) - \\
-\frac{1}{2}\omega_3^2(\frac{\partial J_{233}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial J_{133}}{\partial\beta_j}) - \omega_1\omega_2(\frac{\partial J_{212}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial J_{112}}{\partial\beta_j}) - \omega_1\omega_3(\frac{\partial J_{213}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial J_{113}}{\partial\beta_j}) - \\
-\omega_2\omega_3(\frac{\partial J_{223}}{\partial\beta_j} + \frac{\partial J_{123}}{\partial\beta_j}))\delta\beta_j + (\omega_1(\frac{\partial l^{*}_{21\omega}}{\partial\dot{\beta}_j} + \frac{\partial l^{*}_{11\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}) + \omega_2(\frac{\partial l^{*}_{22\omega}}{\partial\dot{\beta}_j} + \frac{\partial l^{*}_{12\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}) + \\
\omega_3(\frac{\partial l^{*}_{23\omega}}{\partial\dot{\beta}_j} + \frac{\partial l^{*}_{13\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}))\delta\dot{\beta}_j
\end{array} \right)
\end{array} \right] dt
$$

$$(19)$$

Где $$l_{k1} = \rho_k \int_{\tau_k} x d\tau_k \,,\; l_{k2} = \rho_k \int_{\tau_k} y d\tau_k \,,\; l_{k3} = \rho_k \int_{\tau_k} z d\tau_k \,, \tag{20}$$

$$m_k = \rho_k \int_{\tau_k} d\tau_k \,,\; l_{ki\omega} = \rho_k \int_{\tau_k} A_{ki} d\tau_k \,,\; l^*_{ki\omega} = \rho_k \int_{\tau_k} \frac{\partial A_{ki}}{\partial t} d\tau_k \,, \tag{21}$$

Остальные характеристики уравнения движения были приведены в работе [18].

Таким образом, подставим выражение (19) вместе с (14) в уравнение (16), затем заменим вариации квазискоростей вариациями квазикоординат согласно формулам (6) и (9).

Для того чтобы в подынтегральном выражении остались только вариации квазикоординат δr_{0i}, $\delta\theta_i$ и обобщенных координат δQ_n и $\delta\beta_i$, необходимо применить интегрирование по частям, учитывая, что вариации квазикоординат в начальный и конечный моменты времени равны нулю. Приравнивая к нулю члены в полученном подынтегральном выражении, которые выступают в качестве коэффициентов для вариаций квазикоординат и обобщенных координат Q_n и β_i, получаем, в дополнение к уравнениям [18], следующие уравнения движения в векторной форме:

$$\begin{aligned} &M[\dot{\vec{V}}_0 + \vec{\omega}\times\vec{V}_0 - \vec{g} + \dot{\vec{\omega}}\times r_c + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times r_c)] + 2m_1(\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{1c}) + \\ &+ m_1\ddot{\vec{r}}_{1c} + 2m_2(\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{2c}) + m_2\ddot{\vec{r}}_{2c} = \vec{P} \end{aligned}; \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\vec{J}\cdot\dot{\vec{\omega}} + (\dot{\vec{J}}_1 + \dot{\vec{J}}_2)\cdot\vec{\omega} + \vec{\omega}\times(\vec{J}\cdot\vec{\omega}) + M\vec{r}_c\times(\dot{\vec{V}}_0 + \vec{\omega}\times\vec{V}_0 - \vec{g}) + \vec{\omega}\times(\dot{\vec{l}}_{1\omega} + \dot{\vec{l}}_{2\omega}) + \\ &+(\ddot{\vec{l}}_{1\omega} + \ddot{\vec{l}}_{2\omega}) - (\dot{\vec{l}}^*_{1\omega} + \dot{\vec{l}}^*_{2\omega}) - \vec{\omega}\times(\vec{l}^*_{1\omega} + \vec{l}^*_{2\omega}) = \vec{M}^0, \end{aligned} \tag{23}$$

где $\vec{P}$ - главный вектор, а $\vec{M}^0$ - главный момент всех активных сил относительно полюса, $M = m_0 + m_1 + m_2$ - масса рассматриваемой механической системы;

$m^* = m_1 + m_2$, r_c^0, r_{1c}, r_{2c} и r_c- радиус-векторы относительно точки O центра масс твердого тела, каждой жидкости и всей системы, определяемые соотношениями

$$r_c{}^0 = \frac{1}{m_0}\int_{m_0} \vec{r}dm\,,\; r_{kc} = \frac{1}{m_k}\int_{m_k} \vec{r}dm, (k=1,2)\,,\; r_c = \frac{m_0 r_c^0 + m_1 r_{1c} + m_2 r_{2c}}{M}\,; \tag{24}$$

J - тензор инерции в точке O всей системы, которая включает в себя тензор инерции твердого тела

$$\vec{J}^{\,0} = \begin{pmatrix} J_{11}^0 & J_{12}^0 & J_{13}^0 \\ J_{21}^0 & J_{22}^0 & J_{23}^0 \\ J_{31}^0 & J_{32}^0 & J_{33}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{zx} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix} \tag{25}$$

и симметричные тензоры второго ранга каждой жидкости

$$\vec{J}_1 = \begin{pmatrix} J_{111} & J_{112} & J_{113} \\ J_{121} & J_{122} & J_{123} \\ J_{131} & J_{132} & J_{133} \end{pmatrix},\; \vec{J}_2 = \begin{pmatrix} J_{211} & J_{212} & J_{213} \\ J_{221} & J_{222} & J_{223} \\ J_{231} & J_{232} & J_{233} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

которые по аналогии можно назвать тензорами инерции в точке O двух жидкостей, полностью заполняющих полость тела и имеющих поверхность раздела.

Уравнения движения (22) и (23) должны рассматриваться совместно с системой дифференциальных уравнений движения двух жидкостей, которые были приведены в работе [20].

$$\frac{d}{dt}(B_{2n} + B_{1n}) - \sum_m Q_m (B_{2nm} + B_{1nm}) = 0\,,\; n = 1, 2, ...; \tag{27}$$

$$\sum_n \dot{Q}_n(B_{2n}+B_{1n})+\frac{1}{2}\sum_n\sum_m(\frac{\partial B_{2nm}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial B_{1nm}}{\partial\beta_j})Q_mQ_n+\dot{\vec{\omega}}[(\frac{\partial\vec{l}_{2\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial\vec{l}_{1\omega}}{\partial\beta_j})+$$
$$+(\frac{\partial l^*_{2\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}+\frac{\partial l^*_{1\omega}}{\partial\dot{\beta}_j})]+\vec{\omega}[(\frac{\partial\vec{l}^*_{2\omega}}{\partial\beta_j}+\frac{\partial\vec{l}^*_{1\omega}}{\partial\beta_j})-\frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{l}^*_{2\omega}}{\partial\dot{\beta}_j}+\frac{\partial\vec{l}^*_{1\omega}}{\partial\dot{\beta}_j})]+ \qquad (28)$$
$$+(\dot{\vec{V}}_0+\vec{\omega}\times\vec{V}_0-\vec{g})(\frac{\partial\vec{l}_2}{\partial\beta_j}+\frac{\partial\vec{l}_1}{\partial\beta_j})-\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\frac{\partial\vec{J}_2}{\partial\beta_j}+\frac{\partial\vec{J}_1}{\partial\beta_j})\cdot\vec{\omega}=0.$$

Система уравнений (22), (23), (27) и (28) представляет собой бесконечную систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести квазискоростей V_{0i} и ω_i и обобщенных координат Q_n и β_i. К ним необходимо ещё присоединить уравнения, связывающие обобщенные скорости, соответствующие обобщенным координатам твердого тела, с квазискоростями V_{0i} и ω_i.

Заметив, что

$$M\ddot{\vec{r}}_c=m_1\ddot{\vec{r}}_{1c}+m_2\ddot{\vec{r}}_{2c},\ M\dot{\vec{r}}_c=m_1\dot{\vec{r}}_{1c}+m_2\dot{\vec{r}}_{2c}, \qquad (29)$$

Уравнению (22) можно придать вид

$$M[\dot{\vec{V}}_0+\vec{\omega}\times\vec{V}_0-\vec{g}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_c+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_c)+2(\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{1c}+\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{2c})+(\ddot{\vec{r}}_{1c}+\ddot{\vec{r}}_{2c})]=\vec{P}. \qquad (30)$$

В такой форме это уравнение выражает теорему о движении центра масс системы и полностью совпадает с соответствующим уравнением динамики относительного движения механических систем. Выражение в квадратных скобках представляет собой абсолютное ускорение w_c центра масс системы.

В случае, когда сосуд заполнен целиком и жидкости разделены жёсткой невесомой крышкой, то перетекание жидкости по сосуду не изменяет положения центра масс системы, т.е. $\dot{\vec{r}}_c=0,\ \ddot{\vec{r}}_c=0$. Уравнение (30) в данном случае принимает вид

$$M[\dot{\vec{V}}_0 + \vec{\omega}\times\vec{V}_0 - \vec{g} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_c + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_c)] = \vec{P}\,. \tag{31}$$

По той же причине в уравнении моментов (23) исчезает второе, пятое, шестое, седьмое и восьмое слагаемые. После упрощения оно представляется в виде уравнения

$$\vec{J}\cdot\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(\vec{J}\cdot\vec{\omega}) + M\vec{r}_c\times(\dot{\vec{V}}_0 + \vec{\omega}\times\vec{V}_0 - \vec{g}) = \vec{M}^{\,0}, \tag{32}$$

которое по форме совпадает с уравнением движения твердого тела (преобразованного). Уравнения (31), (32) получены Н.Е. Жуковским в 1885 г. [14].

Заключение

Представляемая работа является завершающей в цикле работ, посвящённых формулировке с помощью вариационных принципов основных уравнений нелинейной динамики твердого тела с полостью, содержащей двухслойную или многослойную жидкости. Вывод полученной системы уравнений затруднён сочетанием системы с конечным числом степеней свободы с системой с распределёнными параметрами, использующей эйлерово описание, и приводящего к математическим трудностям. С другой стороны такой подход приводит к широким возможностям для разработки методов приближенного решения нелинейных задач о движении твердых тел с полостями, содержащими двухслойную и многослойную жидкости.

Список источников

1. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость // Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 27–36.

2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость // Механика твердого тела. 1987. № 2. С. 52–58.

3. Ганичев А.И., Качура В.П., Темнов А.Н. Малые колебания двух несмешивающихся жидкостей в подвижном цилиндрическом сосуде. В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. – Новосибирск: НЭТИ, 1974. С. 82-88.

4. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. - М.: Гостехиздат, 1948. - 143 с.

5. Микишев Г.Н, Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкость. - М.: Машиностроение, 1968. - 532 с.

6. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.

7. Моисеев Г.А. Движение твердого тела, имеющего полость, целиком заполненную двумя несмешивающимися жидкостями. В кн.: Математическая физика. - Киев: Наукова думка, выпуск. 13, - 1973.

8. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. - М.: Изд-во Наука, 1965. - 441 с.

9. Румянцев В.В. О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред // Прикладная математика и механика. Т. 37. 1973. С. 963-973.

10. Luke. J.C. A variational principle for a fluid with a free surface // Journal of Fluid Mechanics, 1967, no. 27, pp. 395-397. DOI: 10.1017/S0022112067000412

11. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=84412

12. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=159785. DOI: 34759/trd-2021-119-08

13. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=53486

14. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела полостями, содержащими жидкость. - Киев: Наукова думка, 1990. - 296 с.

15. Луковский И.А. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости. В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. - М.: Волна, 1976. С. 260-265.

16. Лимарченко О.С. Нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы. - Киев: Изд-во Адверта, 2017. - 130 с.

17. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Physics of Fluids, 2005, no. 17 (6), pp. 062101. DOI: 10.1063/1.1922887

18. Вин Ко Ко. Уравнения для обобщенных координат нелинейных движений поверхности раздела жидкостей // Труды МАИ. 2023. № 132. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=176847

19. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объёме // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8

20. Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Вариационная формулировка нелинейных краевых задач динамики двух жидкостей, совершающих заданное движение в пространстве // Труды МАИ. 2023. № 130. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=174607. DOI: 10.34759/trd-2023-130-11

21. Лурье А.И. Аналитическая механика. - М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

References

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V. *Mekhanika tverdogo tela*, 1986, no. 1, pp. 27–36.

2. Akulenko L.D., Nesterov S.V. *Mekhanika tverdogo tela*, 1987, no. 2, pp. 52–58.

3. Ganichev A.I., Kachura V.P., Temnov A.N. *Malye kolebaniya dvukh nesmeshivayushchikhsya zhidkostei v podvizhnom tsilindricheskom sosude. V kn.: Kolebaniya uprugikh konstruktsii s zhidkost'yu* (Small oscillations of two immiscible liquids

in a movable cylindrical vessel. In the book: Vibrations of elastic structures with liquid), Novosibirsk, NETI, 1974, pp. 82-88.

4. Zhukovskii N.E. *O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoi kapel'noi zhidkost'yu* (On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous droplet liquid), Moscow, Gostekhizdat, 1948, 143 p.

5. Mikishev G.N, Rabinovich B.I. *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost'* (Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with liquid), Moscow, Mashinostroenie, 1968, 532 p.

6. Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* (Rocket dynamics), Moscow, Mashinostroenie, 2003, 520 p.

7. Moiseev G.A. *Dvizhenie tverdogo tela, imeyushchego polost', tselikom zapolnennuyu dvumya nesmeshivayushchimisya zhidkostyami. V kn.: Matematicheskaya fizika*. (The motion of a rigid body having a cavity completely filled with two immiscible liquids, In the book: Mathematical Physics), Kiev: Naukova dumka, Issue 13. 1973.

8. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Dinamika tela s polostyami, soderzhashchimi zhidkost'* (Dynamics of a body with cavities containing fluid), Moscow, Izd-vo Nauka, 1965, 441 p.

9. Rumyantsev V.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 37, 1973, pp. 963-973.

10. Luke. J.C. A variational principle for a fluid with a free surface, *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, no. 27, pp. 395-397. DOI: 10.1017/S0022112067000412

11. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412

12. Pak Songi, Grigor'ev V.G. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159785. DOI: 34759/trd-2021-119-08

13. Blinkova A.Yu., Ivanov S.V., Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53486

14. Lukovskii I.A. *Vvedenie v nelineinuyu dinamiku tverdogo tela polostyami, soderzhashchimi zhidkost'* (Introduction to the nonlinear dynamics of a rigid body with cavities containing a liquid), Kiev, Naukova dumka, 1990, 296 p.

15. Lukovskii I.A. *Variatsionnyi metod v nelineinykh zadachakh dinamiki ogranichennogo ob"ema zhidkosti. V kn.: Kolebaniya uprugikh konstruktsii s zhidkost'yu* (Variational Method in Nonlinear Problems of the Dynamics of a Limited Fluid Volume. In the book: Oscillations of elastic structures with liquid), Moscow, Volna, 1976, pp. 260-265.

16. Limarchenko O.S. *Nelineinye zadachi dinamiki zhidkosti v rezervuarakh netsilindricheskoi formy* (Nonlinear problems of fluid dynamics in non-cylindrical tanks), Kiev, Izd-vo Adverta, 2017, 130 p.

17. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce, M.A. Boniforti. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface, *Physics of Fluids*, 2005, no. 17 (6), pp. 062101. DOI: 10.1063/1.1922887

18. Vin Ko Ko. *Trudy MAI*, 2023, no. 132. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=176847

19. Vin Ko Ko, Temnov A.N. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, 2021, no. 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8

20. Vin Ko Ko, Temnov A.N. *Trudy MAI*, 2023, no. 130. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=174607. DOI: 10.34759/trd-2023-130-11

21. Lur'e A.I. *Analiticheskaya mekhanika* (Analytical mechanics), Moscow, Fizmatgiz, 1961, 824 p.

Статья поступила в редакцию 10.11.2023
Одобрена после рецензирования 15.11.2023
Принята к публикации 25.12.2023
The article was submitted on 10.11.2023; approved after reviewing on 15.11.2023; accepted for publication on 25.12.2023