

**Разработка пространственной модели зубчатой передачи с
раздельным хранением накопленных и дополнительных поворотов
для решения нелинейных задач динамики авиационных трансмиссий**

Попов В.В.^{1*}, Сорокин Ф.Д.^{1}, Иванников В.В.^{2***}, Дегтярёв С.А.^{2****}**

¹*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, Москва, 105005, Россия*

²*Научно-технический центр по роторной динамике «Альфа-Транзит»,
ул. Ленинградская, 1, Химки, Московская обл., 141400, Россия*

**e-mail: vyvopov@bmstu.ru*

***e-mail: sorokinf@bmstu.ru*

****e-mail: vvivannikov@alfatran.com*

*****e-mail: degs@alfatran.com*

Статья поступила 08.05.2020

Аннотация

На этапе проектирования авиационных трансмиссий необходимо проводить анализ динамики на эксплуатационных режимах. В настоящей работе представлена трехмерная модель упругой зубчатой передачи с описанием больших поворотов с помощью вектора Эйлера и связанного с ним тензора поворота. Для предотвращения проблемы особых углов в работе используется раздельное хранение накопленного и дополнительного поворота. Модель позволяет описывать зубчатые передачи различных конфигураций (цилиндрические, конические, прямозубые, косозубые), а также сочетаться с моделями других элементов механизмов. В статье приводятся примеры решения задач с помощью разработанной

модели, при этом ее корректность подтверждается сопоставлением получаемых результатов с результатами, полученными другими методами расчета.

Ключевые слова: зубчатые передачи, вектор Эйлера, тензор поворота, тензор П.А. Жилина, большие перемещения, большие повороты.

Введение

Авиационные трансмиссии [1-3] обеспечивают передачу крутящего момента от ротора к винту или вентилятору и приводу коробки агрегатов в двигателях различного типа, от двигателя к валу несущего и рулевого винта в вертолетах и т.д. К используемым зубчатым передачам предъявляются высокие требования по надежности, ограничению массы и уменьшению размеров, снижению потерь на трение при высоконагруженных и высокоскоростных режимах работы. Вышеуказанные условия должны быть учтены на этапе проектирования, что требует проведения анализа динамики авиационных трансмиссий.

Задача анализа динамики зубчатых передач [4] стала актуальной во второй половине 19 века, когда в результате научно-технического прогресса в механизмах машин сильно возросли скорости вращений и передаваемые усилия. Первые шаги в этом направлении осуществлялись путём ввода эмпирического коэффициента динамичности [5], как отношение статической составляющей силы в зацеплении к максимальной, и его различные уточнения и обобщения, как, например, связь с линейной скоростью в точке зацепления. Однако любые приводимые в то время

оценки были крайне консервативными и обладали очень ограниченной областью применения.

В конце 40-х – начале 50-х 20 века для решения задачи динамики зубчатых передач стали использовать накопленный опыт теории механических колебаний [6]. Это позволило разработать большое количество математических моделей зубчатых передач и провести глубокий анализ первопричин изменения усилия в зацеплении в процессе эксплуатации механизмов (переменная жесткость зубчатого зацепление, влияние начальных несовершенств и модификация профиля зубьев, боковые зазоры), а также подтвердить полученные гипотезы экспериментально.

Несмотря на достигнутые результаты, разработанные модели не позволяли учесть влияние остальных элементов конструкций трансмиссий (валы, подшипники, корпуса и т.д.) на вибронегруженность зубчатых передач. В связи с этим в конце 60-х годов начали появляться подходы [7], в которых в качестве исходных параметров использовались эквивалентные упруго-демпферные свойства сопрягающихся с зубчатой передачей деталей.

В 80-х годах были предложены модели, способные проводить анализ не отдельных зубчатых передач, а сложных механизмов на их основе, таких как многоступенчатые, многопоточные и планетарные редуктора [8].

Большинство из указанных выше моделей с математической точки зрения, представляли собой систему дифференциальных уравнений (ДУ) второго порядка, а учёт новых элементов приводил к увеличению количества уравнений и сложности формирования самой системы ДУ. В связи с этим разработанные модели были

довольно простыми и не учитывали вариативность и нелинейность влияния элементов механизмов на зубчатые передачи.

В 1995 году Альберто Кардона предложил трехмерную модель зубчатой передачи [9]. На момент публикации Кардона уже был крупным специалистом в области динамики упругих многокомпонентных систем (*flexible multibody dynamics*) [10] и многие подходы, распространённые в этой области, были обобщены на модель зубчатой передачи, такие как использование неявного уравнения динамики, представление больших поворотов через вектор Эйлера, энергетический вывод выражений матриц касательных (*tangent*) жесткостей и т.д. Модель позволяет учесть разные по конфигурации зубчатые передачи, такие как цилиндрические и конические, прямозубые и конические и некоторые другие виды; обладает 18-тью степенями свободы и может сочетаться с пространственными моделями других компонентов роторной системы, например, валов и подшипников; позволяет проводить нестационарный анализ передачи. Модель стала очень популярной и была реализована в таких программных комплексах, как Samcef и Comsol. Несмотря на это, у модели Кардона есть ряд значительных допущений и недостатков, таких как, учет только постоянной жесткости зубчатой передачи, учет переменной ошибки передачи только по роторной частоте, наличие множителей Лагранжа, которые не только увеличивают размерность системы линейных уравнений, но лишают ее положительной определенности, что ограничивает набор методов ее решения.

С конца 90-х 20 века и до наших дней получили широкое распространение программные комплексы метода конечного элемента (МКЭ), такие ANSYS, Nastran,

ABAQUS, NX Nastran и др. Прямое моделирование динамики зубчатых передач в таких комплексах является трудоёмким процессом, зато они отлично справляются с задачей определения жесткостных характеристик элементов механизмов. Это позволяет, с использованием математических моделей прошлых лет, проводить анализ динамики зубчатых передач [11].

Помимо вышесказанного, стоит отметить работы [12-14] с различными подходами к решению задачи исследования динамики зубчатых механизмов.

В настоящей статье представлен авторский вариант пространственной модели зубчатой передачи, который отличается от модели Кардона меньшей размерностью за счёт отказа от множителей Лагранжа и является существенно более простым.

Вектор состояния зубчатой передачи

Рассмотрим зубчатую передачу в своей начальной конфигурации (Рис. 1). Исходное положение каждого из колес передачи описывается с помощью радиусов-векторов \mathbf{r}_{a0} и \mathbf{r}_{b0} до соответствующего геометрического центра и тройками взаимно перпендикулярных ортов $\mathbf{e}_{10}^a, \mathbf{e}_{20}^a, \mathbf{e}_{30}^a$ и $\mathbf{e}_{10}^b, \mathbf{e}_{20}^b, \mathbf{e}_{30}^b$, размещенных в этих центрах и направленных следующим образом: орт \mathbf{e}_{10} смотрит в центр другого колеса, орт \mathbf{e}_{30} перпендикулярен плоскости колеса и сонаправлен с осью колеса, орт \mathbf{e}_{20} дополняет $\mathbf{e}_{10}, \mathbf{e}_{20}, \mathbf{e}_{30}$ до правой тройки векторов.

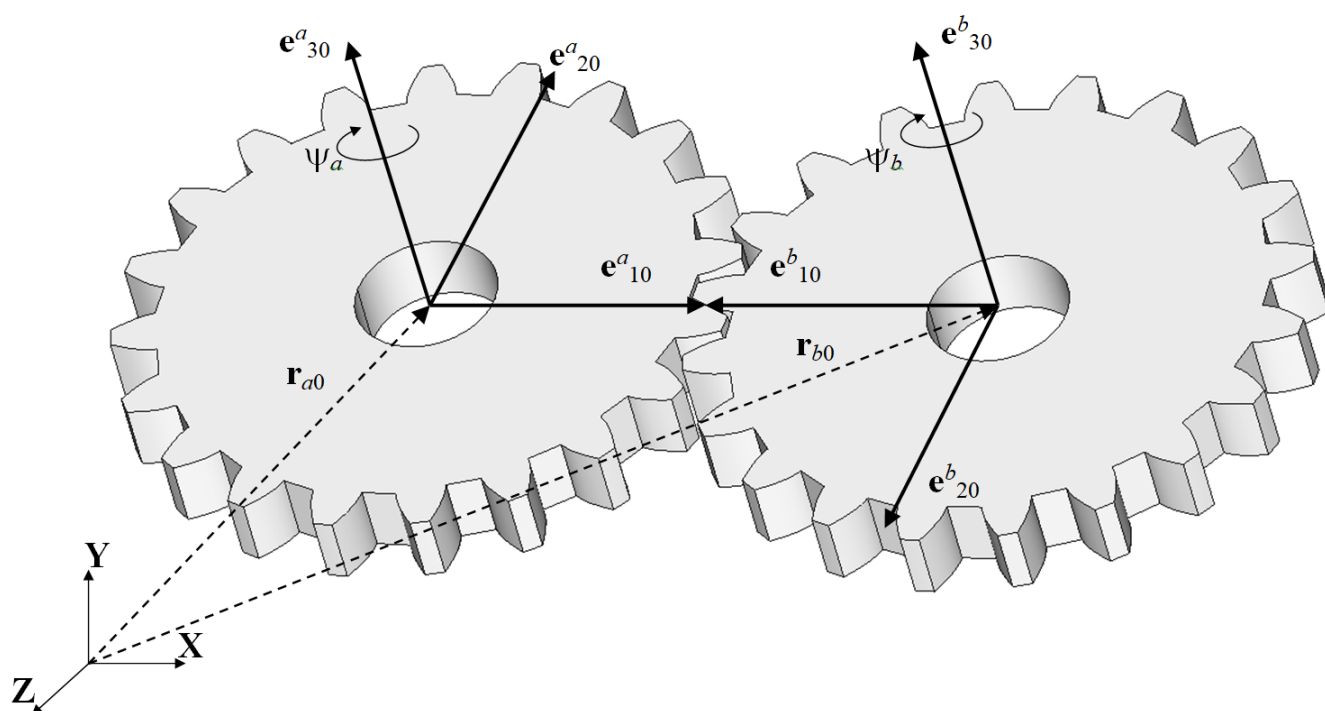


Рис. 1 Исходное положение зубчатой передачи

Кинематика передачи описывается с помощью векторов линейных перемещений центров каждого из колес \mathbf{u}_a и \mathbf{u}_b , тензоров больших поворотов \mathbf{R}_a и \mathbf{R}_b , которые не меняются на шаге интегрирования, и векторов Эйлера малых дополнительных поворотов \mathfrak{Q}_a и \mathfrak{Q}_b . Как уже обсуждалось в работах [15-17], использование вектора Эйлера в качестве способа описания больших поворотов неминуемо ведет к ограничению, обусловленному вырождением тензора, связывающего угловые скорости с производной вектора Эйлера (тензор П.А. Жилина). Для обхода этого ограничения в данной статье, как и в работе [15], используется инкрементальный способ описания вращения путем разделения полного поворота на большой накопленный и малый дополнительный повороты.

Вектор состояния передачи состоит из линейных перемещений и малых дополнительных поворотов каждого из колес, поэтому содержит 12 компонент

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathfrak{D}_a \\ \mathbf{u}_b \\ \mathfrak{D}_b \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Положение колёс в актуальном положении описывается через новые радиус-векторы \mathbf{r}_A и \mathbf{r}_B , а также орты $\mathbf{e}_{10}^A, \mathbf{e}_{20}^A, \mathbf{e}_{30}^A$ и $\mathbf{e}_{10}^B, \mathbf{e}_{20}^B, \mathbf{e}_{30}^B$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a &= \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a \\ \mathbf{r}_b &= \mathbf{r}_{b0} + \mathbf{u}_b \\ \mathbf{e}_i^a &= \mathbf{L}(\mathfrak{D}_a) \cdot \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{e}_{i0}^a, \quad (i = 1, 2, 3), \\ \mathbf{e}_i^b &= \mathbf{L}(\mathfrak{D}_b) \cdot \mathbf{R}_b \cdot \mathbf{e}_{i0}^b, \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{L}(\mathfrak{D})$ – тензорная функция, вычисляющая тензор поворота по заданному вектору Эйлера [18].

Уравнение движения зубчатой передачи

Для решения задач динамики зубчатой передачи воспользуемся линеаризованным уравнением динамики произвольной многокомпонентной системы

$$[\mathbf{M}_{tang}] \Delta \ddot{\mathbf{y}} + ([\mathbf{C}] + [\mathbf{G}]) \Delta \dot{\mathbf{y}} + [\mathbf{K}_{tang}] \Delta \mathbf{y} = -\mathbf{F}_{inner} - \mathbf{F}_{damp} - \mathbf{F}_{inerc} + \mathbf{F}_{fric} + \mathbf{F}_{ext} \quad (3)$$

где $[\mathbf{M}_{tang}]$ – матрица касательных (tangent) обобщенных масс, $[\mathbf{C}]$ – матрица демпфирования, $[\mathbf{G}]$ – гироскопическая матрица, $[\mathbf{K}_{tang}]$ – матрица касательных (tangent) жесткостей, \mathbf{F}_{inner} – вектор внутренних сил, \mathbf{F}_{inerc} – вектор инерционных сил, \mathbf{F}_{damp} – вектор сил диссипации, \mathbf{F}_{fric} – сила трения в зацеплении, \mathbf{F}_{ext} – вектор внешних сил, $\Delta \ddot{\mathbf{y}}, \Delta \dot{\mathbf{y}}, \Delta \mathbf{y}$ – векторы приращений обобщенных ускорений, скоростей и перемещений.

Выражения для $[\mathbf{M}_{tang}]$, $[\mathbf{G}]$, \mathbf{F}_{inerc} модели зубчатой передачи полностью аналогичны выражениям, полученным в работе [16], за исключением того, что в указанной работе вектор инерционных сил берется с обратным знаком и в качестве исходной матрицы масс необходимо использовать следующую

$$[\mathbf{M}_0] = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_x^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_y^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z^b \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где m_a и m_b – массы колёс a и b соответственно; I_x^a , I_y^a , I_z^a и I_x^b , I_y^b , I_z^b – моменты инерции колёс a и b относительно осей X , Y и Z соответственно.

Рассмотрим вывод остальных матриц и векторов, входящих в (3).

Упругая энергия деформации зубчатой передачи

После совершения движения, орты \mathbf{e}_{10}^a и \mathbf{e}_{10}^b , в общем случае, не направлены в точку контакта. Само положение точки контакта при упругом взаимодействии колёс не может быть строго определено в виду деформации контактирующих зубьев. В связи с этим определяется орт \mathbf{e}_{1ref} , указывающий в условную точку контакта – точку на делительной окружности бóльшего по диаметру колеса (пусть это будет

колесо a), которая является актуальной точкой контакта в случае жестких обоих колёс. Наиболее простой способ определения орта \mathbf{e}_{1ref}^a – проецирование вектора соединяющего центры колес на плоскость колеса a :

$$\mathbf{e}_{1ref}^a = \frac{\mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)}{|\mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a)|}, \quad (5)$$

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} - \mathbf{e}_3^a \mathbf{e}_3^a$$

где \mathbf{E}_0 – плоский единичный тензор, \mathbf{E} – единичный тензор, $\mathbf{e}_3^a \mathbf{e}_3^a$ – диадное произведение ортов \mathbf{e}_{30}^a . Выбор большего по диаметру колеса здесь является существенным, так как в случае внутреннего зацепления только такой выбор дает правильное направление орта \mathbf{e}_{1ref}^a .

Для совмещения орта \mathbf{e}_1^a и \mathbf{e}_{1ref}^a колесо необходимо развернуть на угол ψ_a , синус и косинус которого можно определить как

$$\cos \psi_a = \mathbf{e}_{1ref}^a \cdot \mathbf{e}_1^a, \quad (6)$$

$$\sin \psi_a = \mathbf{e}_{1ref}^a \cdot \mathbf{e}_2^a,$$

С помощью синуса и косинуса ψ_a не составляет труда определить величину самого угла. Повороту ψ_a ортов колеса a соответствует поворот ψ_b ортов колеса b

$$\psi_b = -\frac{\rho_a}{\rho_b} \psi_a, \quad (7a)$$

$$\psi_b = \frac{\rho_a}{\rho_b} \psi_a, \quad (7б)$$

где ρ_a и ρ_b – радиусы делительных окружностей колеса a и b соответственно.

Выражение (7a) используется во всех вариантах зубчатых передач, кроме передач с внутренним зацеплением – для них используется (7б). Важно отметить, что ψ_a и ψ_b

– это не истинные величины поворотов, а условные, демонстрирующие текущее положение колес относительно изначально заданного. Тем не менее, для того чтобы тождество (7) корректно обрабатывало реальную кинематику передачи необходимо восстанавливать значение угла ψ_a по (6) с учётом накопленного значения поворота, т. е. учитывать переходы через 2π .

По найденному углу ψ_b определяется положение орта, смотрящего в условную точку контакта на колесе b

$$\mathbf{e}_{1ref}^b = \mathbf{e}_1^b \cos \psi_b + \mathbf{e}_2^b \sin \psi_b. \quad (8)$$

Из-за упругости зацепления и перемещений центров колес орты \mathbf{e}_{1ref}^a и \mathbf{e}_{1ref}^b указывают в разные точки условного контакта. Данное расхождение описывается вектором упругого рассогласования

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{r}_{b0} + \mathbf{u}_b + \rho_b \mathbf{e}_{1ref}^b) - (\mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a + \rho_a \mathbf{e}_{1ref}^a). \quad (9)$$

Проекция вектора $\Delta \mathbf{u}$ на направление нормали к зубу дает величину относительного контактного смещения зубьев. В случае косозубых конических колёс для определения указанного нормального направления необходимы ещё дополнительные базисы, орты которых ориентированы вдоль осей зубьев (Рис. 2). Эти орты получаются путём двух последовательных поворотов – сначала вокруг окружного направления на угол конусности γ

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^{a*} &= \mathbf{e}_{1ref}^a \cos \gamma + \mathbf{e}_3^a \sin \gamma, \\ \mathbf{e}_2^{a*} &= \mathbf{e}_{2ref}^a = -\mathbf{e}_1^a \sin \psi_a + \mathbf{e}_2^a \cos \psi_a, \\ \mathbf{e}_3^{a*} &= -\mathbf{e}_{1ref}^a \sin \gamma + \mathbf{e}_3^a \cos \gamma, \end{aligned} \quad (10)$$

а затем вокруг радиуса на угол косоzubости β :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^{a^{**}} &= \mathbf{e}_1^{a^*}, \\ \mathbf{e}_2^{a^{**}} &= \mathbf{e}_2^{a^*} \cos\beta + \mathbf{e}_3^{a^*} \sin\beta, \\ \mathbf{e}_3^{a^{**}} &= -\mathbf{e}_2^{a^*} \sin\beta + \mathbf{e}_3^{a^*} \cos\beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Орт \mathbf{e}_{2ref}^A направлен так, чтобы орты \mathbf{e}_{1ref}^A , \mathbf{e}_{2ref}^A , \mathbf{e}_{30}^A образовывали правую тройку векторов.

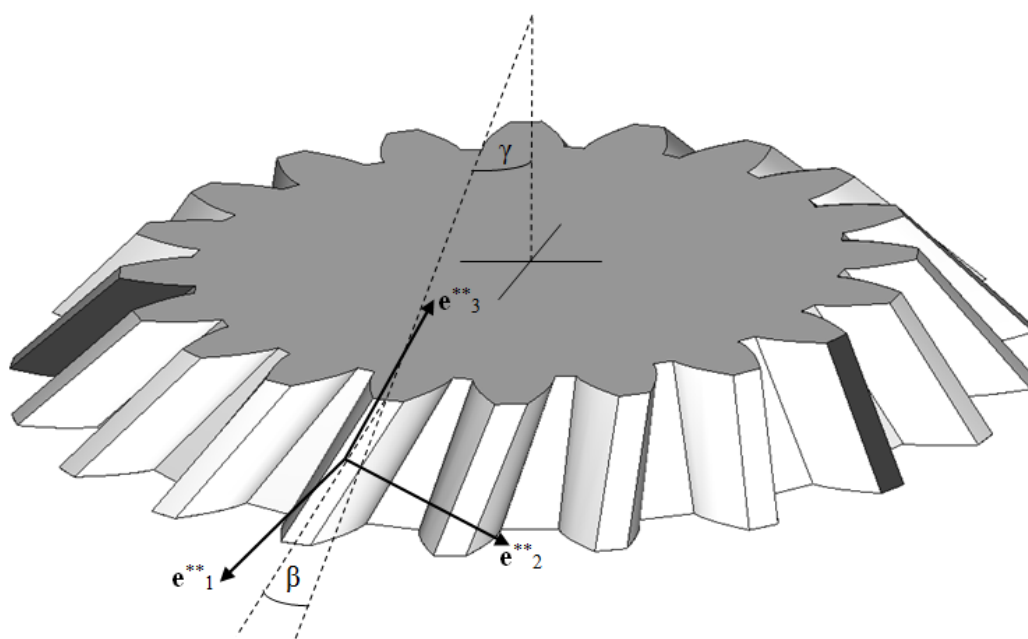


Рис. 2 Базис конического косоzubого колеса a (большого по диаметру), связанный с контактирующим зубом

Направление нормали к зубу колеса определяется углом зацепления α

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1^{A^{**}} \sin\alpha + \mathbf{e}_2^{A^{**}} \cos\alpha, \quad (11)$$

Выражение (11) целесообразно представить в виде

$$\mathbf{n} = f_1 \mathbf{e}_{1ref}^A + f_2 \mathbf{e}_{2ref}^A + f_3 \mathbf{e}_3^A, \quad (12)$$

где f_1 , f_2 , f_3 – константы, которые являются комбинациями тригонометрических функций углов α , β , γ . После алгебраических преобразований находятся следующие выражения

$$\begin{aligned} f_1 &= \cos\gamma \cdot \sin\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \\ f_2 &= \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ f_3 &= \cos\alpha \cdot \cos\gamma \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \sin\gamma \end{aligned} \quad (13)$$

С помощью найденной нормали к поверхности зуба определяется величина кинематической ошибки передачи

$$\Delta s = \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{u} + \Delta x_{error}, \quad (14)$$

где Δx_{error} – добавка к величине кинематической ошибки передачи, учитывающая допуски и несовершенства ее изготовления. На основе многочисленных исследований принято вычислять эту добавку как [9]

$$\Delta x_{error} = X \cdot (1 - \cos(z_a \psi_a)), \quad (15)$$

где z_a – количество зубьев на колесе a ; X – амплитуда погрешности изготовления, выбираемая в зависимости от точности зубчатых колес.

Нормальная сила в зацеплении может быть вычислена по линейному соотношению

$$F_n = k_m \Delta s, \quad (16)$$

где h – ширина зуба, k_m – коэффициент жесткости зубчатой передачи. Коэффициент жесткости зубчатой передачи в общем случае является переменной величиной и зависит от одного из углов поворота колес (ψ_a или ψ_b) и должен

учитывать различные особенности зубчатой передачи, такие как упругость и многопарность зацепления, наличие модификации профиля, макродефекты в колесах и т.д. В свою очередь корректное определение коэффициента жесткости зубчатой передачи является одной из главных задач на этапе определения входных данных.

Упругая энергия деформации определяется по следующему соотношению

$$U = \frac{k_m (\Delta s)^2}{2}. \quad (17)$$

При учете зазоров в передаче необходимо скорректировать выражения (16) и (17) по следующим правилам

$$F_n = \begin{cases} k_m (\Delta s - b/2), & \frac{b}{2} < \Delta s \\ 0, & -\frac{b}{2} < \Delta s < \frac{b}{2} \\ k_m (\Delta s + b/2), & -\frac{b}{2} > \Delta s \end{cases} \quad U = \begin{cases} \frac{k_m (\Delta s - b/2)^2}{2}, & \frac{b}{2} < \Delta s \\ 0, & -\frac{b}{2} < \Delta s < \frac{b}{2} \\ \frac{k_m (\Delta s + b/2)^2}{2}, & -\frac{b}{2} > \Delta s \end{cases} \quad (18)$$

где b – величина зазора.

Энергия диссипации зубчатой передачи

При анализе зубчатых передач с зазорами необходимо учитывать диссипацию энергии в момент контакта зубьев после выборки зазора. Рассмотрим линейные скорости колёс a и b в условной точке контакта:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ref}^a &= \mathbf{v}_a + \rho_a \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{e}_{1ref}^a \\ \mathbf{v}_{ref}^b &= \mathbf{v}_b + \rho_b \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{e}_{1ref}^b \end{aligned}, \quad (19)$$

где \mathbf{v}_a и \mathbf{v}_b – линейные скорости центров колёс a и b ; ω_a и ω_b – угловые скорости колёс a и b . Разница между скоростями в точке контакта является относительной скоростью скольжения колёс

$$\mathbf{v}_{slid} = \mathbf{v}_{ref}^a - \mathbf{v}_{ref}^b. \quad (20)$$

Проекция скорости скольжения на нормаль к поверхности зуба даёт выражение для величины скорости удара вдоль линии зацепления

$$\Delta v = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{slid}, \quad (21)$$

которая связана непосредственно с энергией диссипации зубчатой передачи

$$\Phi = \begin{cases} \frac{b_m \cdot \Delta v^2}{2}, & -\frac{b}{2} < \Delta s \\ 0, & \frac{b}{2} \geq \Delta s \geq -\frac{b}{2} \\ \frac{b_m \cdot \Delta v^2}{2}, & \frac{b}{2} > \Delta s \end{cases}, \quad (22)$$

где b_m – коэффициент демпфирования. Согласно работе [9], его принимают равным

$$b_m = 2\xi \sqrt{\frac{k_m \cdot I_z^a \cdot I_z^b}{I_z^a \rho_a^2 + I_z^b \rho_b^2}}, \quad (23)$$

где ξ – коэффициент пропорциональности. В случае переменной жесткости, k_m принимают равным среднему значению за цикл зацепления в передаче.

Матрицы жесткости и демпфирования, векторы внутренних, диссипативных сил и силы трения зубчатой передачи

Численно дифференцируя упругую энергию в зацеплении U по компонентам вектора состояний y , получаем выражение для компонент матрицы касательных жесткостей и вектора внутренних сил зубчатого зацепления:

$$\begin{aligned} F_{inner\ i} &= \frac{\partial U}{\partial y_i} \\ K_{tang\ ij} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j} \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично, численно дифференцируя энергию диссипации в зацеплении Φ по компонентам первых производных вектора состояний \dot{y} , получаем выражение для компонент матрицы демпфирования и вектора диссипативных сил зубчатого зацепления:

$$\begin{aligned} F_{inerc\ i} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}_i} \\ C_{ij} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \end{aligned} \quad (25)$$

Стоит отметить, что для выражений (24) и (25) можно получить и аналитическую форму (что авторами и было проделано), но конечные соотношения получаются слишком громоздкими и поэтому не были представлены в данной работе.

Сила трения в зацеплении определяется как взятая с обратным знаком ненулевая проекция орта вектора относительной скорости скольжения (20) на

плоскость перпендикулярной нормали к зубу колеса (12) и умноженная на величину силы в зацеплении (18) и коэффициент трения между зубьями μ_f :

$$\mathbf{F}_{fric} = -\mu_f F_n \frac{(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{v}_{slid}}{|(\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{v}_{slid}|}. \quad (26)$$

Верификация модели

Следуя методике работы [10] решение уравнения (3) проводилось с помощью метода Ньюмарка с поиском локального равновесия внутри каждого шага интегрирования методом Ньютона-Рафсона.

В первом тесте проводилась проверка выполнения моделью кинематики сложных зубчатых механизмов. Для этого рассматривалась трансмиссия (Рис.3), состоящая из конической передачи и планетарного редуктора.

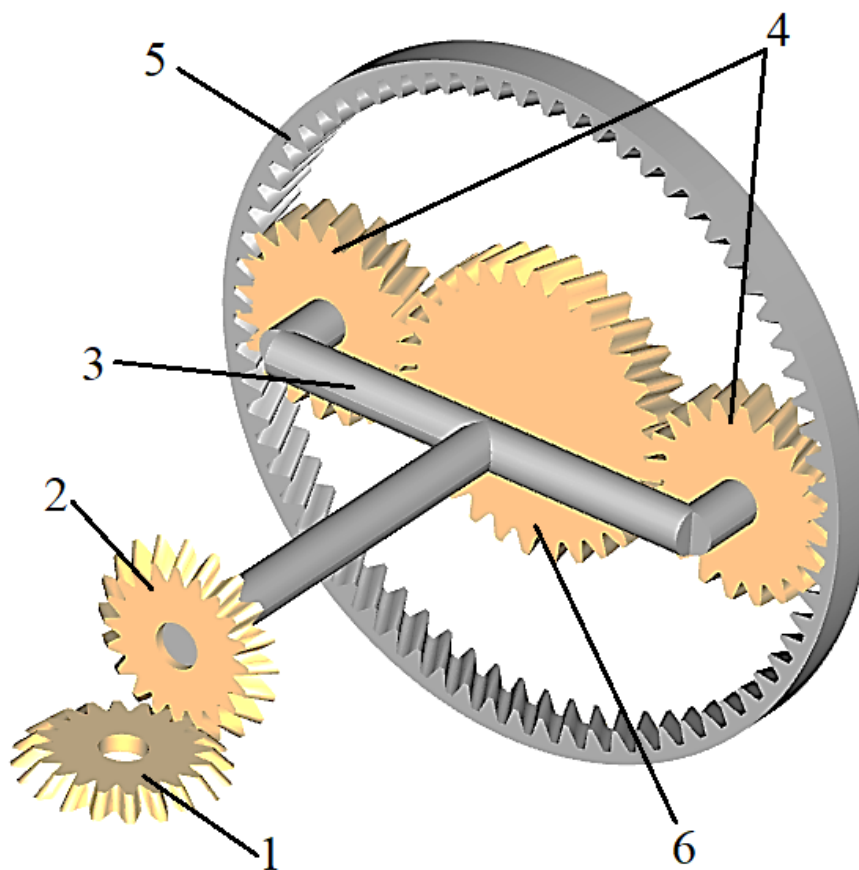


Рис. 3 Схема трансмиссии из первого теста:

1 – ведущее колесо конической передачи, 2 – ведомое колесо конической передачи, 3 – водило, 4 – сателлиты, 5 – коронная шестерня, 6 – солнечная шестерня

Колеса конической передачи и солнечной шестерни находятся в абсолютно жестких подшипниках, сателлиты соединены с водилом через абсолютно жесткие шарниры, коронная шестерня жестко заделана. Параметры конической передачи и редуктора представлены в табл.1.

Табл. 1 Параметры трансмиссии из первого теста

| Параметр | Величина | Размерность |
|--|---------------------|-------------------|
| Модуль зубьев, m | 1 | мм |
| Угол давления, α | 20 | градусы |
| Угол конусности конической передачи, γ | 45 | градусы |
| Угол косозубости конической передачи, β | 0 | градусы |
| Угол косозубости планетарной передачи, β | 5 | градусы |
| Количество зубьев у ведущего колеса конической передачи, z_1 | 20 | – |
| Количество зубьев у ведущего колеса конической передачи, z_2 | 20 | – |
| Количество зубьев сателлитов, z_4 | 20 | – |
| Количество зубьев коронной шестерни, z_5 | 70 | – |
| Количество зубьев солнечной шестерни, z_6 | 30 | – |
| Ширина колес, w | 5 | мм |
| Плотность колес, ρ | $7,8 \cdot 10^{-9}$ | т/мм ³ |

Жесткость всех передач принималась постоянной и равной $k_m = 1 \cdot 10^7 \frac{H}{мм}$.

Ошибку передачи, зазоры, трение и диссипацию энергии считали равными нулю. Водило в трансмиссии было смоделировано с помощью балочных элементов из работы [16] и считалось безмассовым. К конической шестерне 1 прикладывали крутящий момент 100. Система интегрировалась численно на интервале времени 0...10 сек с шагом интегрирования $1e-4$ сек. Начальные условия принимались нулевыми.

На рис. 4 и 5 представлены графики угловых и линейных скоростей каждой из шестерен. Контрольное решение было получено по обычным правилам теоретической механики путем интегрирования уравнений движения той же передачи, но с абсолютно жесткими колесами.

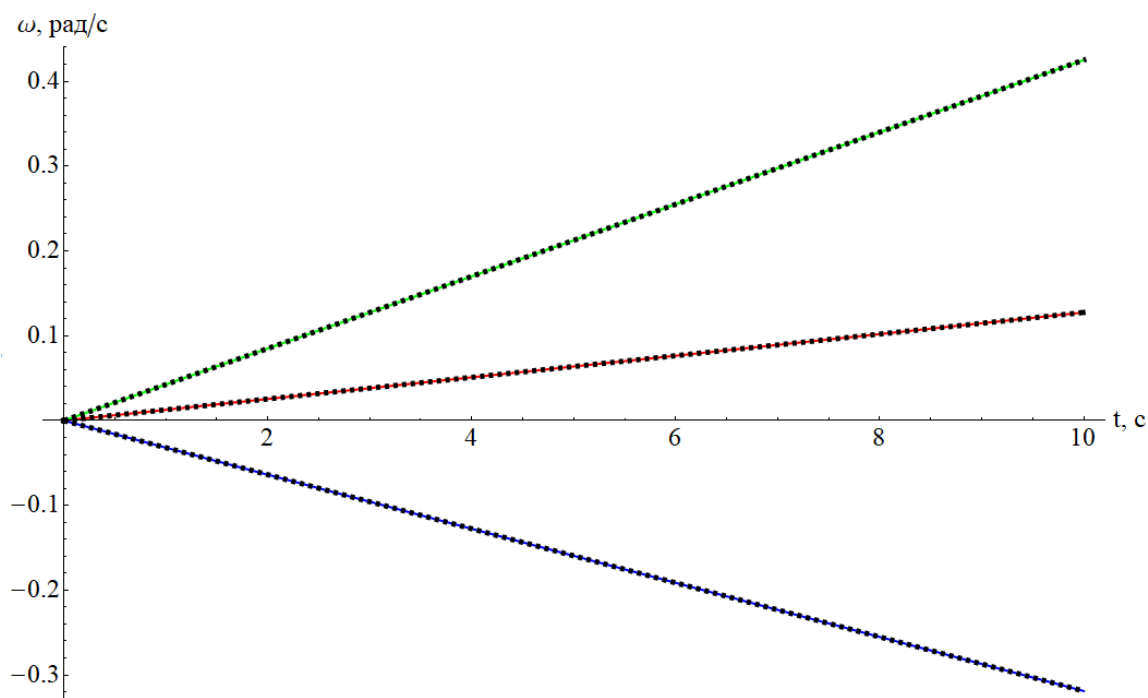


Рис. 4 Графики угловых скоростей конических шестеренок и водила (красный), сателлитов (синий), солнца (зеленый) и графики контрольных решений (пунктирные)

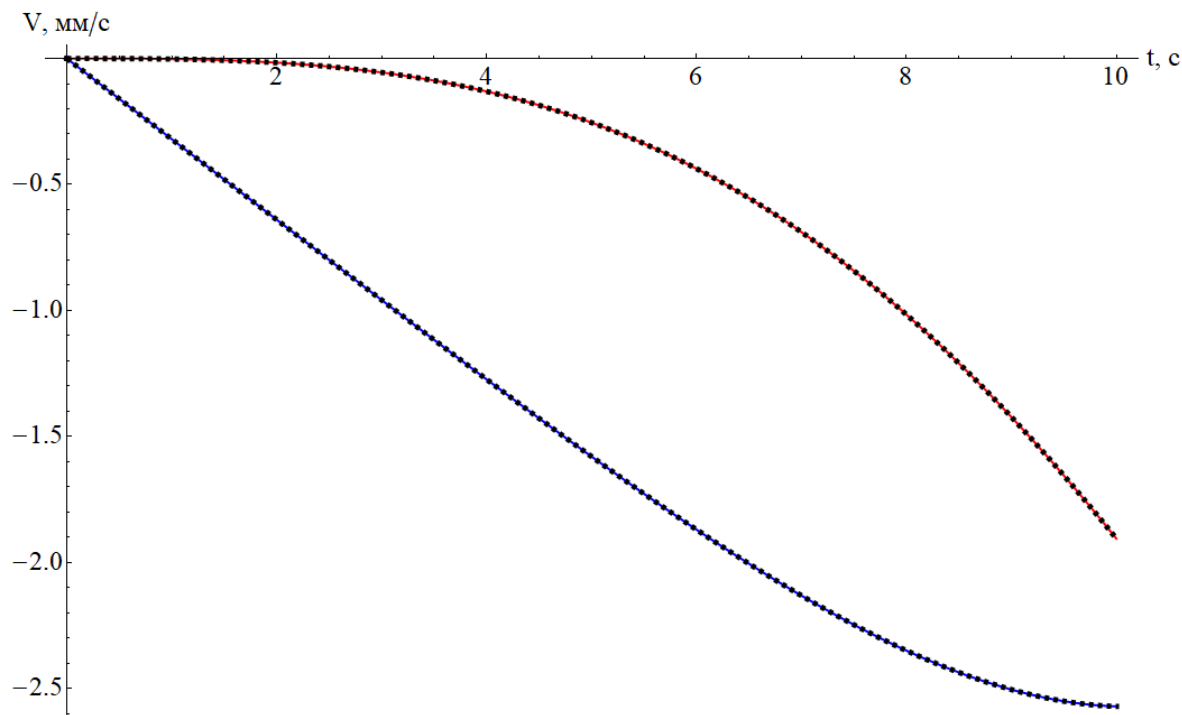


Рис. 5 Графики проекций линейных скоростей сателлитов на ось X (красный) и Y (синий) и графики контрольных решений (пунктирные)

Из рис. 4 и 5 видно, что кинематика отрабатывается абсолютно корректно. Стоит отметить, что высокая жесткость передачи и водила определяют малое влияние упругости системы на кинематику трансмиссии по сравнению с абсолютно жестким решением.

Во втором тесте был численно повторён эксперимент, проведенный Айзохом Кубо и опубликованный в работе [19]. В опыте проводился анализ коэффициента динамичности стальной прямозубой передачи в зависимости от угловой скорости. Характеристики передачи представлены в табл. 2.

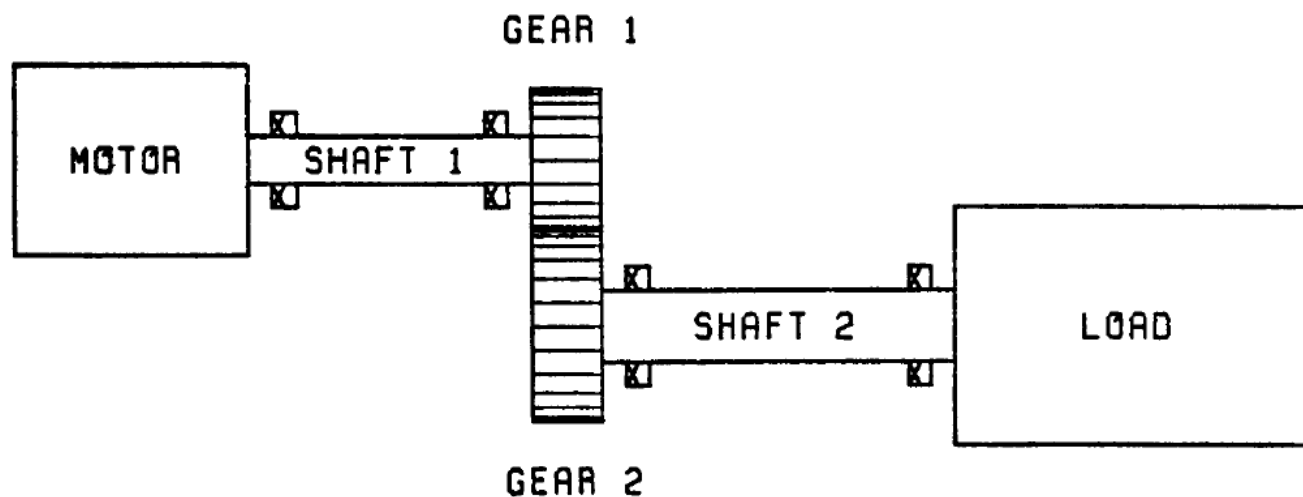


Рис.6 Схема установки из работы [19]

Табл. 2 Характеристики передачи во втором тесте

| Параметр | Значение | Размерность |
|--|----------|-------------|
| Модуль зубьев, m | 4 | мм |
| Угол давления, α | 20 | градусов |
| Количество зубьев ведущего колеса, z_1 | 25 | – |
| Количество зубьев ведомого колеса, z_2 | 25 | – |
| Коэффициент пропорциональности ξ | 0,3 | – |

Подшипники и остальные элементы передачи принимались абсолютно жесткими. Известно, что передача была выполнена с высокой точностью (JIS 0), поэтому добавка $\Delta X_{error} = 0$. Источником возбуждения вибраций в передаче являлось изменение жесткости передачи. Функция жесткости зубчатой передачи, представленная на рис. 7, была получена по алгоритму из работы [20].

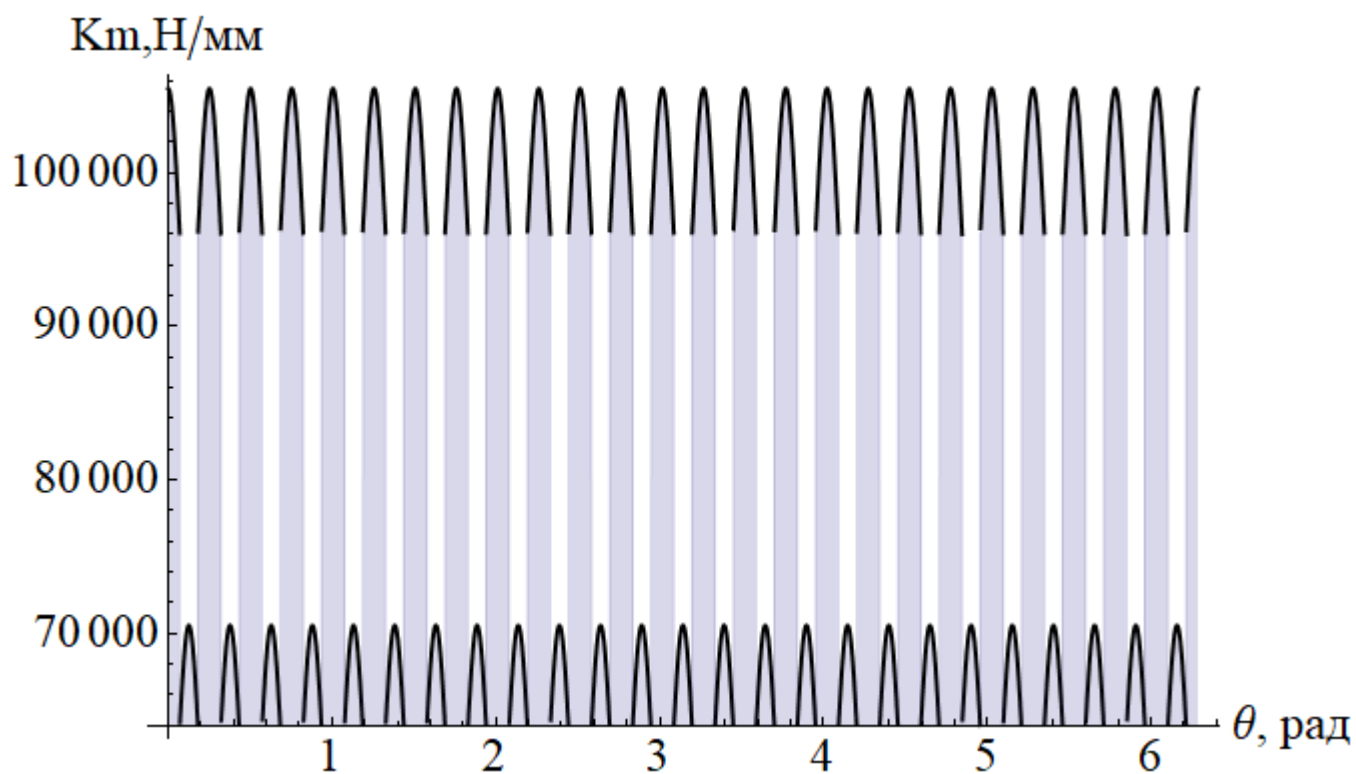


Рис. 7 Функция жесткости зубчатой передачи, используемая во втором тесте.

Передача раскручивалась постоянным моментом 1000 Н·мм до достижения скорости 20000 об/мин.

На рис. 8 представлены графики коэффициентов динамичности из работы [19] и полученные с помощью предложенной модели.

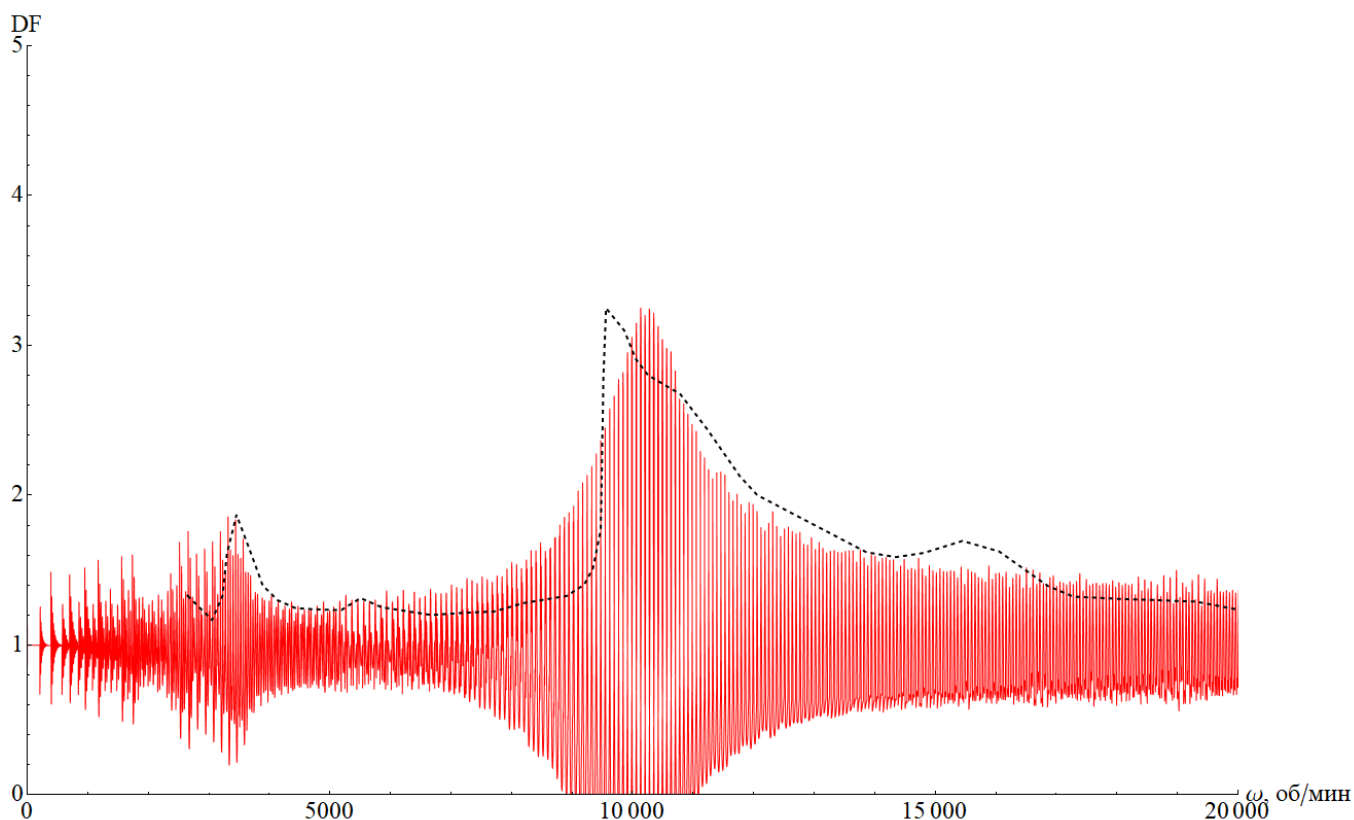


Рис. 8 Графики коэффициента динамичности зубчатой передачи, полученный с помощью авторской модели (красный) и из работы [19] (черный)

Графики коэффициентов динамичности повторяют друг друга с хорошей точностью, а отклонения объясняются отсутствием учёта различных особенностей постановки эксперимента, информация о которых не представлена в работе [19].

В качестве третьего теста рассматривается пример, приведенный в работе [9]. Схема трансмиссии и её характеристики представлены на рис. 9 и в табл. 3. Стоит отметить, что в исходной статье у всех величин отсутствует размерность.

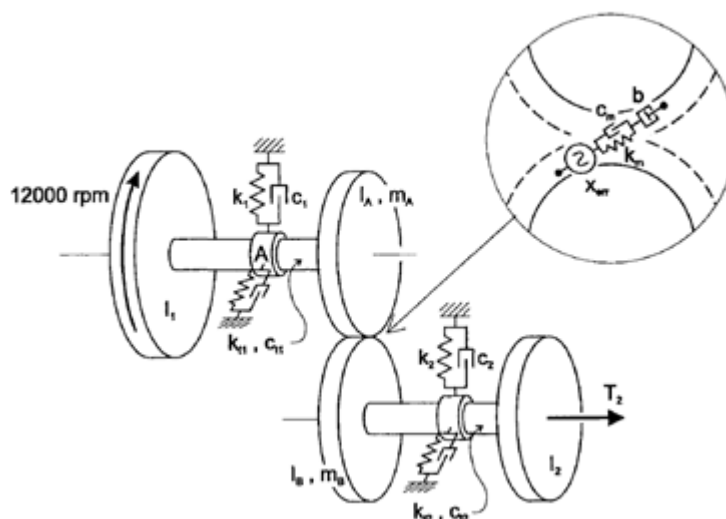


Рис. 9 Схема трансмиссии из третьего теста.

Табл. 3 Характеристики трансмиссии из третьего теста

| Параметр | Значение |
|--|----------------------------------|
| Модуль зубьев, m | 0,15748 |
| Угол давления, α | 20 |
| Количество зубьев ведущего колеса, z_1 | 25 |
| Количество зубьев ведомого колеса, z_2 | 25 |
| Коэффициент пропорциональности ξ | 0,1 |
| Жесткость передачи k_m | $1,477 \cdot 10^7$ |
| Добавка в ошибку передачи Δx_{error} | $0,0003937(1 - \cos z_1 \psi_a)$ |
| Момент инерции $I_a = I_b = I_2$ | 0,0102 |
| Момент инерции I_1 | 0,051 |
| Крутильная жесткость вала k_1 | $1,7 \cdot 10^7$ |
| Крутильная жесткость вала k_2 | $3,0 \cdot 10^7$ |
| Крутильное демпфирование вала c_1 | 0,076026 |
| Крутильное демпфирование вала c_2 | 0,12369 |
| Момент, передающийся передачей T_2 | 945,6 |

В работе рассматривались 4 случая:

- 1) зубчатая пара без зазора и жесткие опоры;
- 2) зубчатая пара с зазором $b = 0,001968$ и жесткие опоры;

3) как 1), но упругие опоры;

4) как 2), но упругие опоры.

В данной статье рассмотрены только случаи 1) и 2), так как учет упругости опор не оказывает влияния на результат.

На рис. 10 представлены графики сил в зацеплении из работы [9] и полученные с помощью разработанной модели для случая 1).

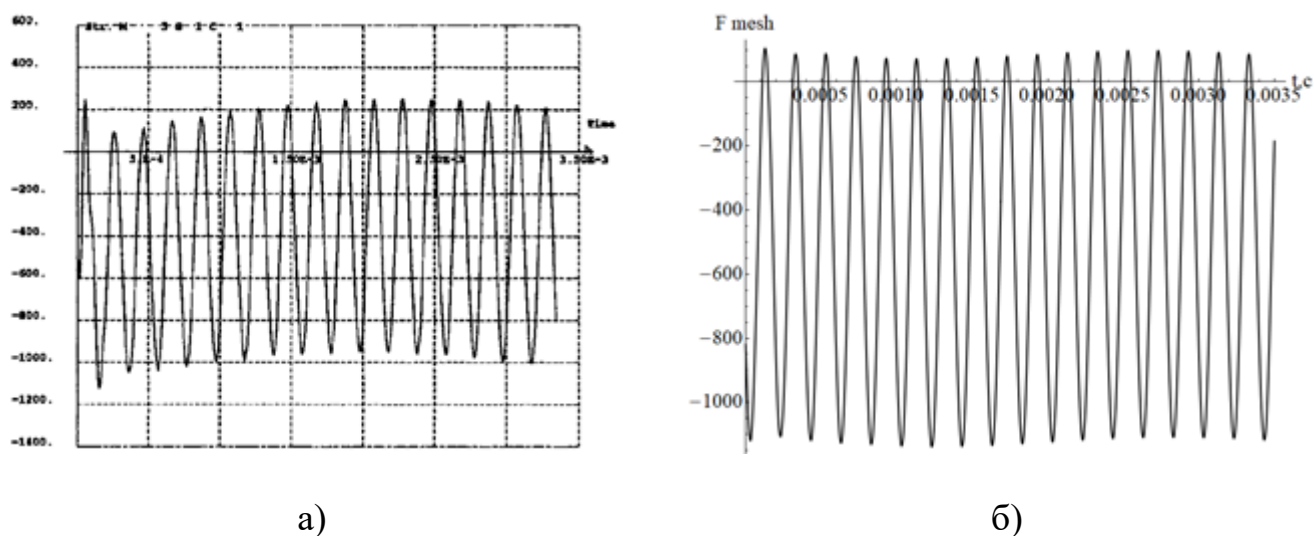
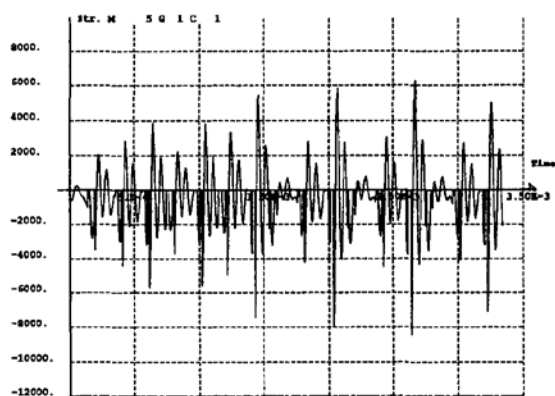


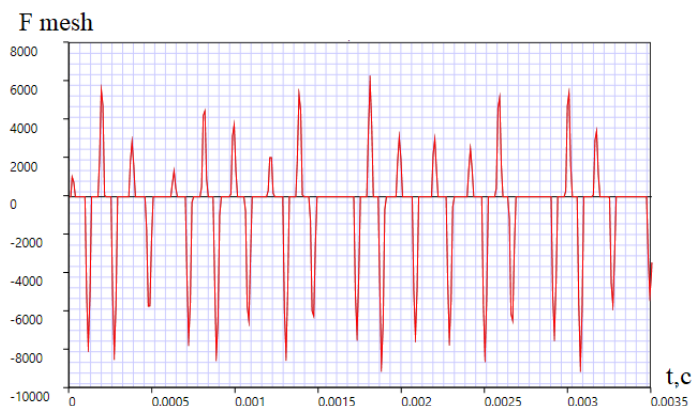
Рис. 10 Графики сил в зацеплении в зависимости от времени для случая 1): а) из работы [9]; б) полученные с помощью разработанной модели.

Видно, что оба решения сходятся с достаточно высокой точностью.

На рис. 11 представлены графики сил в зацеплении для случая 2).



а)



б)

Рис. 11 Графики сил в зацеплении в зависимости от времени для случая 2): а) из работы [9]; б) полученные с помощью разработанной модели.

Очевидно, что результаты качественно близки, но при этом не идеально коррелируют между собой. Для контроля данная задача была решена с помощью системы дифференциальных уравнений (ДУ) движения, составленных по правилам теоретической механики

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_1 (\theta_1 - \theta_2) = T_2 \\ I_a \ddot{\theta}_2 - c_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + b_m (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) - k_1 (\theta_1 - \theta_2) + k_m H[R_a \theta_2 - R_a \theta_2 + x_{error}] R_a = 0 \\ I_b \ddot{\theta}_3 + c_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) - b_m (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) + k_2 (\theta_3 - \theta_4) - k_m H[R_a \theta_2 - R_a \theta_2 + x_{error}] R_b = 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_4 - c_2 (\dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_4) - k_2 (\theta_3 - \theta_4) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$H[z] = \begin{cases} z - b/2, z > b/2 \\ 0, -b/2 < z < b/2 \\ z + b/2, z < -b/2 \end{cases}$$

Решение системы (27) представлено на рис. 12.

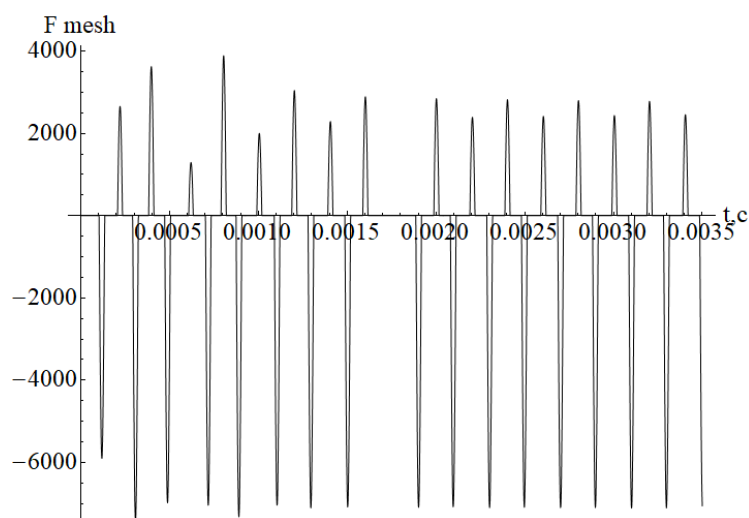


Рис. 12 График сил в зацеплении в зависимости от времени, полученный из решения системы ДУ (27)

Сопоставление рис. 11б и рис. 12 показывает, что решение, найденное интегрированием системы ДУ, весьма близко к решению, полученному на основе разработанной авторами модели. В связи с этим можно утверждать, что либо решение, приведенное в работе [9], для случая 2) (и, вполне вероятно, для случая 4) является некорректным, либо сама работа содержит неполные или неточные исходные данные по этому тесту, что ограничивает его применимость для верификации моделей зубчатых передач.

Заключение

В статье представлена пространственная нелинейная модель зубчатой пары с 12-ю степенями свободы, предназначенная для моделирования сложных механизмов. Модель может сочетаться с нелинейными моделями других элементов, таких как валы, подшипники, корпуса и др., что позволяет проводить анализ не только самой зубчатой передачи, но и взаимного влияния компонентов роторной системы друг на друга. Верификация модели проводилась на трех тестовых

примерах, которые показали её адекватность. На основании вышесказанного, данную модель можно рекомендовать для решения задач нелинейной динамики авиационных трансмиссий.

Библиографический список

1. Вулгаков Э.Б. Авиационные зубчатые передачи и редукторы: Справочник. - М.: Машиностроение, 1981. - 374 с.
2. Гуськов А.А., Спириин А.А., Норинская И.В. Имитационная модель электромеханического рулевого привода малогабаритного высокоманевренного летательного аппарата // Труды МАИ. 2020. № 111. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=115157>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-14](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-14)
3. Баранов М.В., Борисов М.В., Корчагин О.А., Крылов Н.В., Самсонович С.Л., Степанов В.С. О выборе скорости электродвигателя и передаточного числа редуктора привода руля направления транспортного самолёта // Труды МАИ. 2012. № 62. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35536>
4. Özgüvent H.N., Houser D.R. Mathematical models used in gear dynamics – a review // Journal of Sound and Vibration, 1988, vol. 121, no. 3, pp. 383 – 411.
5. Fisher A. Factors in calculating the load-carrying capacity of helical gears // Machinery, 1961, vol. 98, pp. 545 – 552.
6. Tuplin W.A. Dynamic loads on gear teeth // Machine Design, 1953, no. 25, pp. 203 - 211.

7. Kohler H.K., Pratt A., Thomson A.M. Dynamics and noise of axis parallel axis gearing // Proceedings of Institution of Mechanical Engineers, 1970, no. 184, pp. 111 – 121.
8. Slavik J. Dynamics of torsional driving systems of heavy mills // Proceedings of International Federation on Theory of Machines and Mechanisms Sixth World Congress, New Delhi, 1970, pp. 1327 – 1330.
9. Cardona A. Flexible three gear modelling // Revue Européenne des Éléments, 1995, vol. 4, no. 5 – 6, pp. 663 – 691.
10. Geradin M., Cardona A. Flexible Multibody Dynamics – A Finite Element Approach, Wiley, New York, 2000, 327 p.
11. Калинин Д.В. Динамический анализ зубчатой передачи // Известия МГТУ «МАМИ». Естественные науки. 2015. Т 4. № 3 (25). С. 84 - 93.
12. Spitas C., Spitas V. Coupled multi-DOF dynamic contact analysis model for the simulation of intermittent gear tooth contacts, impacts and rattling considering backlash and variable torque // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2016, vol. 230, no. 7 - 8. pp. 1022 - 1047. DOI: [10.1177/0954406215596696](https://doi.org/10.1177/0954406215596696)
13. Qiu X., Han Q., Chu F. Dynamic modeling and analysis of the planetary gear under pitching base motion // International Journal of Mechanical Sciences, 2018, vol. 141, C. 31 - 45. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2018.03.037](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.03.037)
14. Margielewicz J., Gąska D., Litak G. Modelling of the gear backlash // Nonlinear Dynamics, 2019, vol. 97, no. 1, pp. 355 - 368. DOI: [10.1007/s11071-019-04973-z](https://doi.org/10.1007/s11071-019-04973-z)

15. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832>
16. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Конечный элемент гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для задач нелинейной динамики конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2018. № 99. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=91790>
17. Низаметдинов Ф.Р., Сорокин Ф.Д. Особенности применения вектора Эйлера для описания больших поворотов при моделировании элементов конструкций летательных аппаратов на примере стержневого конечного элемента // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98753>
18. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. - СПб.: Нестор, 2001. - 276 с.
19. Kubo A., Yamada K., Aida T., Sato S. Reseach on Ultra Speed Gear Devices (Reports 1-3) // Transactions of the Japanese Society of Mechanical Engineers, 1972, no. 38, pp. 2692 – 2715.
20. Попов В.В., Сорокин Ф.Д. Определение жесткостной функции эвольвентой прямозубой зубчатой передачи для моделирования движения зубчатых механизмов // XXVII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых

ученых и студентов «МИКМУС»: тезисы докладов. – М.: ИМАШ, 2015. С. 117 – 120.

Developing a spatial model of a gear transmission with separate storage of the accumulated and extra turns for solving non-linear problems of aviation transmissions dynamics

Popov V.V.^{1*}, Sorokin F.D.^{1}, Ivannikov V.V.^{2***}, Degtyarev S.A.^{2****}**

¹*Bauman Moscow State Technical University, MSTU, 5, bldg. 1, 2-nd Baumanskaya str.,
Moscow, 105005, Russia*

²*Scientific and technical centre of rotor dynamic «Alfa-Tranzit», 1, Leningradskaya str.,
Khimky, Moscow region, 141400, Russia*

**e-mail: vypopov@bmstu.ru*

***e-mail: sorokinf@bmstu.ru*

****e-mail: vvivannikov@alfatran.com*

*****e-mail: degs@alfatran.com*

Abstract

Aviation transmissions ensure the torque transfer from the rotor to propeller or fan, and accessory box drive in the engines of various types, from the engine to the shaft of the main and tail rotors of the helicopter etc. [1-3]. Aviation transmissions should ensure high strength properties at small size. The dynamics analysis performing seems to be the best tool for these requirements compliance ensuring.

Many scientific papers deal with the gear transmission dynamics. The most meaningful and interesting gear transmission models are represented in the works of Cardona [9], Spitas [12], Qiu [13], Margielewicz [14], and Kubo [19]. Nevertheless, most of them do not account for the linear wheels movement, variable stiffness, interaction between gears and other machine elements, and unfit for the non-stationary dynamics studies.

The article presents a spatial model of the gear transmission capable of accounting for the aforementioned limitations and applicable for the non-stationary dynamics problem solving. The model is based on the Cardona's model [9].

The model employs Euler vector and the rotation tensor associated with it as rotations description. The final rotation is being decomposed into the accumulated rotation and a small incremental one. This technique allows avoiding the problems associated with achieving exceptional points near the 2π angle [15-17].

The presented model can be employed for performing analysis of the wide spectrum of gear transmissions, such as spur gears, helical gears, conical gears and internal gears. The model allows accounting for the gear mesh stiffness, gear mesh damping, kinematic error of the transmission and backlashes. The gear transmission model can conjoin with the models of other machine elements such as shafts, bearings, cases etc.

The proposed model was verified by several well-known tests.

Keywords: gear transmissions, Euler vector, rotation tensor, tangent tensor, large displacements, large rotations.

References

1. Vulgakov E.B. *Aviatsionnye zubchatye peredachi i reduktory: spravochnik* (Aircraft Gear Transmissions and Gearboxes: A Guide), Moscow, Mashinostroenie, 1981, 374 p.

2. Gus'kov A.A., Spirin A.A., Norinskaya I.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 111, available at: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115157>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-14](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-14)
3. Baranov M.V., Borisov M.V., Korchagin O.A., Krylov N.V., Samsonovich S.L., Stepanov V.S. *Trudy MAI*, 2012, no. 62. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35536>
4. Özgüvent H.N., Houser D.R. Mathematical models used in gear dynamics – a review, *Journal of Sound and Vibration*, 1988, vol. 121, no. 3, pp. 383 – 411.
5. Fisher A. Factors in calculating the load-carrying capacity of helical gears, *Machinery*, 1961, vol. 98, pp. 545 – 552.
6. Tuplin W.A. Dynamic loads on gear teeth, *Machine Design*, 1953, no. 25, pp. 203 - 211.
7. Kohler H.K., Pratt A., Thomson A.M. Dynamics and noise of axis parallel axis gearing, *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, 1970, no. 184, pp. 111 – 121.
8. Slavik J. Dynamics of torsional driving systems of heavy mills, *Proceedings of International Federation on Theory of Machines and Mechanisms Sixth World Congress*, New Delhi, 1970, pp. 1327 – 1330.
9. Cardona A. Flexible three gear modelling, *Revue Européenne des Éléments*, 1995, vol. 4, no. 5 – 6, pp. 663 – 691.
10. Geradin M., Cardona A. *Flexible Multibody Dynamics – A Finite Element Approach*, Wiley, New York, 2000, 327 p.
11. Kalinin D.V. *Izvestiya MGTU «MAMI». Estestvennyye nauki*, 2015, no. 4, no. 3 (25), pp. 84 - 93.

12. Spitas C., Spitas V. Coupled multi-DOF dynamic contact analysis model for the simulation of intermittent gear tooth contacts, impacts and rattling considering backlash and variable torque, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2016, vol. 230, no. 7 - 8. pp. 1022 - 1047.
13. Qiu X., Han Q., Chu F. Dynamic modeling and analysis of the planetary gear under pitching base motion, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, vol. 141, pp. 31 - 45. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2018.03.037](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.03.037)
14. Margielewicz J., Gaska D., Litak G. Modelling of the gear backlash, *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, no. 1, pp. 355 - 368.
15. Popov V.V., Sorokin F.D., Ivannikov V.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 92, available at: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76832>
16. Popov V.V., Sorokin F.D., Ivannikov V.V. *Trudy MAI*, 2018, no 99, available at: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=91790>
17. Nizametdinov F.R., Sorokin F.D. *Trudy MAI*, 2018, no. 102, available at: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98753>
18. Zhilin P.A. *Vektory i tenzory vtorogo ranga v trekhmernom prostranstve* (Vectors and tensors of the second rank in the three-dimensional space), St. Petersburg, Nestor, 2001, 276 p.
19. Kubo A., Yamada K., Aida T., Sato S. Reseach on Ultra Speed Gear Devices (Reports 1-3), *Transactions of the Japanese Society of Mechanical Engineers*, 1972, no. 38, pp. 2692 - 2715.

20. Popov V.V., Sorokin F.D. *XXVII Mezhdunarodnaya innovatsionno-orientirovannaya konferentsiya molodykh uchenykh i studentov "MIKMUS": tezisyy dokladov*, Moscow, IMASh, 2015, pp. 117 – 120.