Труды МАИ. 2023. № 128
Trudy MAI, 2023, no. 128

Научная статья
УДК 531.38
DOI: 10.34759/trd-2023-128-06

ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ НАПОЛНЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Александр НиколаевичТемнов[1], Ян Наинг У[2]

[1,2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

[1]antt45@mail.ru

[2]yno64528@gmail.com

Аннотация. В данной работе получены и исследованы уравнения сферического движения твёрдого тела с вращающейся неоднородной несжимаемой жидкостью, заполняющей полностью эллипсоидальную полость. Рассмотрена устойчивость вращения твёрдого тела с неоднородной жидкостью, обладающей линейным распределением плотности. Полученные уравнения движения позволяют исследовать устойчивость стационарных движений рассматриваемой системы с целью оценки влияние расслоения жидкости на динамику тела.

Ключевые слова: неоднородная жидкость, твёрдое тело, эллипсоидальная полость, однородное вихревое движение, устойчивость

Для цитирования: Темнов А.Н., Ян Наинг У. Вращение вокруг неподвижной точки твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, полностью наполненной неоднородной жидкостью // Труды МАИ. 2023. № 128. DOI: 10.34759/trd-2023-128-06

Original article

ROTATION AROUND A FIXED POINT OF A SOLID BODY WITH AN ELLIPSOIDAL CAVITY COMPLETELY FILLED WITH AN INHOMOGENEOUS FLUID

Alexander N. Temnov[1], Yan Naing Oo[2]

[1,2]Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

[1]antt45@mail.ru

[2]yno64528@gmail.com

Abstract. In this paper, the equations of spherical motion of a solid body with a rotating inhomogeneous incompressible fluid filling a completely ellipsoidal cavity are obtained and investigated. The stability of rotation of a solid with an inhomogeneous fluid having a linear density distribution is considered. The purpose of this article is to study the effect of an inhomogeneous fluid on the stability of rotation of a solid with a fluid around the axis of dynamic symmetry. In the formulation of the problem, a solid body with an ellipsoidal cavity rotates at an angular velocity around a fixed point that coincides with the geometric center of the cavity, and an inhomogeneous ideal fluid completely filling this cavity performs a homogeneous vortex motion in it with the angular velocity of the fluid. To derive the equation of motion of the system under consideration, we use the Euler-Lagrange equations, which, under the action of potential forces. To solve the problem of the stability of the system's motion, we use the second Lyapunov method, and construct the Lyapunov function using the Chetaev method. Sufficient conditions for the stability of the rotation of a solid body with a fluid around the vertical axis of dynamic symmetry are derived. The condition is obtained in the form of inequalities of the roots of quadratic forms corresponding to the perturbed motion of a body with a fluid. The obtained equations of motion make it possible to study the stability of stationary motions of the system in question in order to assess the effect of fluid stratification on the dynamics of the body.

Keywords: inhomogeneous liquid, solid body, ellipsoidal cavity, uniform vortex motion, stability

For citation: Temnov A.N., Yan Naing Oo. Rotation around a fixed point of a solid body with an ellipsoidal cavity completely filled with an inhomogeneous fluid. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. DOI: 10.34759/trd-2023-128-06

Введение

Задачи о движении твёрдых тел с полостями, заполненными однородной идеальной или вязкой жидкостью, являются достаточно изученными. Однако развитие современной техники и потребности практики в настоящее время ставят перед исследователями ряд новых вопросов динамики твёрдых тел, имеющих полости с жидкостью. Одной из таких проблем, требующей изучения, является задача о движении твёрдых тел с полостями, заполненными неоднородной жидкостью.

Движение твёрдого тела, имеющего полость, полностью заполненную жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, исследовали многие ученые: Уильям Томсон (лорд Кельвин), Гораций Лэмб, Н.Е. Жуковский [1], Ф.А. Слудский [2], С.С. Хаф [3], А. Пуанкаре [4]. Интерес к этой проблеме не пропал и в настоящее время, о чем свидетельствуют работы [5–8]. Особенностью, объединяющей эти исследования, является предположение об однородности жидкости, заполняющей полость твёрдого тела.

В статьях [9–11] рассматривались движения твёрдого тела с эллипсоидальной и цилиндрической полостями, заполняющей с жидкостью, и представлены области неустойчивости этих рассматриваемых случаев.

В работах [12–16] показано, что подобное движение неоднородной жидкости описывается уравнениями, формально совпадающими с уравнениями движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки.

Целью данной статьи является исследование влияние неоднородной жидкости на устойчивость вращения твердого тела с жидкостью вокруг оси динамической симметрии.

Постановка задачи

Пусть твёрдое тело с эллипсоидальной полостью вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ вокруг неподвижной точки О, а неоднородная идеальная жидкость, полностью заполняющая эту полость, совершает в ней однородное вихревое движение с угловой скоростью $\vec{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ (рис. 1).

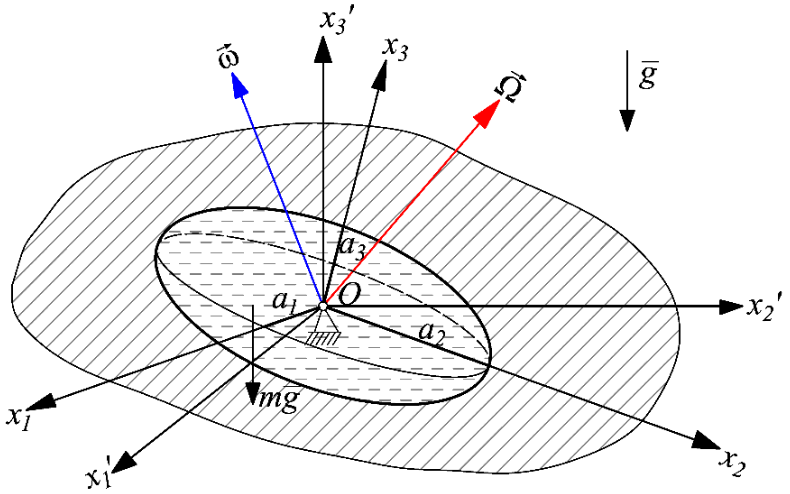

Рис. 1. Расчётная схема

Рассмотрим случай, когда центр масс твёрдого тела совпадает с неподвижной точкой, являющейся одновременно геометрическим центром эллипсоидальной полости. Введем неподвижную систему координат $Ox_1'x_2'x_3'$ и подвижную $Ox_1x_2x_3$, связанную с твёрдым телом. Положение твёрдого тела относительно системы координат $Ox_1'x_2'x_3'$ будет характеризоваться углами Эйлера ψ,φ,ϑ. Положение частиц жидкости в эллипсоидальной полости относительно системы координат, связанной с твёрдым телом – носителем, также охарактеризуем углами Эйлера $\psi_1,\varphi_1,\vartheta_1$. Предположим, что оси x_1,x_2,x_3 совпадают с полуосями эллипсоидальной полости a_1,a_2,a_3 и являются главными центральными осями инерции твёрдого тела с диагональной матрицей инерции Θ^T, $\Theta^T=\{A_0,B_0,C_0\}$. Однородным вихревым движением неоднородной жидкости назовем такое движение, при котором не только скорости частиц жидкости, но и плотность, являются линейными функциями пространственных координат с коэффициентами, зависящими от времени: [17]

$$u_1 = \frac{a_1}{a_3}\Omega_2 x_3 - \frac{a_1}{a_2}\Omega_3 x_2, \ (1,2,3), \tag{1}$$

$$v_1 = \frac{a_1}{a_3}\Omega_2 x_3 - \frac{a_1}{a_2}\Omega_3 x_2 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \quad (1,2,3), \tag{2}$$

где u_i – проекция относительной скорости жидкости на ось Ox_i, v_i – абсолютная скорость движения жидкости в переменных Эйлера;

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3, \tag{3}$$

$\rho(x,t)$ – плотность неоднородной жидкости, $\rho_i(t)$ $(i=1,2,3)$ – неизвестные функции времени.

Сферическое движение твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение

Для вывода уравнения движения рассматриваемой системы воспользуемся уравнениями Эйлера-Лагранжа [18], которые при действии потенциальных сил могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \hat{\omega}_s} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\gamma_{ts}^{r}\,\frac{\partial T}{\partial \hat{\omega}_r}\hat{\omega}_t - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_s}, \tag{4}$$

где γ_{ts}^{r} – трёхиндексные символы Больцмана; $\hat{\omega}_s$ – квазискорость, равная проекции угловой скорости твёрдого тела или жидкости на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3; π_s – квазикоордината, соответствующая $\hat{\omega}_s$ квазискорости. Квазикоордината π_s вводится при помощи обозначения [18]

$$\frac{d\pi_s}{dt} = \hat{\omega}_s \tag{5}$$

Кинетическую энергию T системы определим по формуле

$$2T = \vec{\omega} \cdot \Theta \cdot \vec{\omega} + \Omega \cdot \Theta \cdot \Omega + 2\vec{\omega} \cdot \Theta \cdot \Omega . \tag{6}$$

где $\Theta^{\Sigma} = \{A, B, C\}$ – сумма диагональных тензоров инерции твёрдого тела $\Theta^{T} = \{A_0, B_0, C_0\}$ и затвердевшей жидкости $\Theta^{з.ж} = \{A_1, B_1, C_1\}$; $\Theta^{*} = \{F, G, H\}$ – диагональный тензор моментов инерции, учитывающий подвижность жидкости.

Проведя интегрирование по объёму, занимаемому жидкостью, получим выражение для кинетической энергии:

$$\begin{aligned} 2T = A\omega_1{}^2 + B\omega_2{}^2 + C\omega_3{}^2 + A_1\Omega_1{}^2 + B_1\Omega_2{}^2 + C_1\Omega_3{}^2 + \\ + 2F\omega_1\Omega_1 + 2G\omega_2\Omega_2 + 2H\omega_3\Omega_3 , \end{aligned} \tag{7}$$

где $A = A_0 + A_1$; $B = B_0 + B_1$; $C = C_0 + C_1$ – моменты инерции твёрдого тела и «затвердевшей» жидкости.

Здесь

$$\begin{aligned} &A_1 = m\frac{a_2{}^2 + a_3{}^2}{5}; \quad B_1 = m\frac{a_1{}^2 + a_3{}^2}{5}; \quad C_1 = m\frac{a_1{}^2 + a_2{}^2}{5}; \\ &F = \frac{2}{5}ma_2a_3; \qquad G = \frac{2}{5}ma_1a_3; \qquad H = \frac{2}{5}ma_1a_2 \end{aligned} \tag{8}$$

$m = \dfrac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 \rho_0$ – масса неоднородной жидкости.

Для вычисления трёхиндексных символов введем обозначения:

$$\begin{aligned} &\hat{\omega}_1 = \omega_1, \qquad \hat{\omega}_2 = \omega_2 , \qquad \hat{\omega}_3 = \omega_3 , \\ &\hat{\omega}_4 = \Omega_1 , \qquad \hat{\omega}_5 = \Omega_2 , \qquad \hat{\omega}_6 = \Omega_3 . \end{aligned}$$

Тогда дифференциалы и вариации квазикоординат можно выразить соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&d\pi_1 = \sin\vartheta \sin\varphi\, d\psi + \cos\varphi\, d\vartheta; && \delta\pi_1 = \sin\vartheta \sin\varphi\, \delta\psi + \cos\varphi\, \delta\vartheta;\\
&d\pi_2 = \sin\vartheta \cos\varphi\, d\psi - \sin\varphi\, d\vartheta; && \delta\pi_2 = \sin\vartheta \cos\varphi\, \delta\psi - \sin\varphi\, \delta\vartheta;\\
&d\pi_3 = \cos\vartheta\, d\psi + d\varphi; && \delta\pi_3 = \cos\vartheta\, \delta\psi + \delta\varphi;\\
&d\pi_4 = -\sin\vartheta_1 \sin\varphi_1\, d\psi_1 - \cos\varphi_1\, d\vartheta_1; && \delta\pi_4 = -\sin\vartheta_1 \sin\varphi_1\, \delta\psi_1 - \cos\varphi_1\, \delta\vartheta_1;\\
&d\pi_5 = -\sin\vartheta_1 \cos\varphi_1\, d\psi_1 + \sin\varphi_1\, d\vartheta_1; && \delta\pi_5 = -\sin\vartheta_1 \cos\varphi_1\, \delta\psi_1 + \sin\varphi_1\, \delta\vartheta_1;\\
&d\pi_6 = -\cos\vartheta_1\, d\psi_1 - d\varphi_1; && \delta\pi_6 = -\cos\vartheta_1\, \delta\psi_1 - \delta\varphi_1.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Используя выражения (9), найдем символы Больцмана, для чего воспользуемся перестановочными соотношениями [18]:

$$
d(\delta\pi_s) - \delta(d\pi_s) = \sum_{t=1}^{n}\sum_{n=1}^{n} \gamma_{tm}^{s}\, d\pi_t\, \delta\pi_m . \tag{10}
$$

Выражения билинейных форм, стоящих слева в равенстве (10), в рассматриваемом случае приводятся к формуле

$$
d(\delta\pi_s) - \delta(d\pi_s) = d\pi_t\, \delta\pi_m - d\pi_m\, \delta\pi_t
$$

и следовательно

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{32}^{1} = -\gamma_{23}^{1} = 1; \quad \gamma_{13}^{2} = -\gamma_{31}^{2} = 1; \quad \gamma_{21}^{3} = -\gamma_{12}^{3} = 1;\\
&\gamma_{56}^{4} = -\gamma_{65}^{4} = 1; \quad \gamma_{64}^{5} = -\gamma_{46}^{5} = 1; \quad \gamma_{45}^{6} = -\gamma_{54}^{6} = 1.
\end{aligned}
$$

Остальные γ_{ts}^{r} равны нулю.

Вычислим теперь потенциальную энергию П системы тело-жидкость. Так как центр масс твёрдого тела в рассматриваемом случае неподвижен, то потенциальная энергия системы будет слагаться только из потенциальной энергии жидкости:

$$
\Pi = mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3), \tag{11}
$$

где c_i – координаты центра масс неоднородной жидкости, определяемые по формуле

$$c_i = \int\limits_{\tau} \frac{\rho_i(x_i,t)x_i(t)}{m} d\tau = \frac{\rho_i}{5\rho_0} a_i^{\,2}, \quad (i=1,2,3), \tag{12}$$

γ_i – направляющие косинусы, определяющие ориентацию твёрдого тела в пространстве относительно направления однородного поля массовых сил.

Производные $\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_s}$ определим по формуле [11]

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_s} = \sum_{r=1}^{n} b_{rs} \frac{\partial \Pi}{\partial q_r}, \tag{13}$$

где коэффициенты b_{rs} есть элементы матрицы b такой, что

$$b\,a = a\,b = E \tag{14}$$

E – единичная матрица; a – невырожденная матрица коэффициентов $a_{s\kappa}$ форм $d\pi_s$ (9).

Используя равенства (11) и (13), придем к следующим выражениям для правой части уравнений (4):

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_1} &= mg(\gamma_2 c_3 - \gamma_3 c_2); & -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_4} &= mg(\gamma_2 c_3 \frac{a_2}{a_3} - \gamma_3 c_2 \frac{a_3}{a_2}); \\
-\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_2} &= mg(\gamma_3 c_1 - \gamma_1 c_3); & -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_5} &= mg(\gamma_3 c_1 \frac{a_3}{a_1} - \gamma_1 c_3 \frac{a_1}{a_3}); \\
-\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_3} &= mg(\gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1); & -\frac{\partial \Pi}{\partial \pi_6} &= mg(\gamma_1 c_2 \frac{a_1}{a_2} - \gamma_2 c_1 \frac{a_2}{a_1}).
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставив значения кинетической энергии (7), (15) в уравнение Эйлера-Лагранжа и принимая во внимание значение γ_{ts}^{r} и соотношение (15), получим уравнения движения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение:

$$\frac{d}{dt}(\vec{M} + \vec{M}) + \vec{\omega} \times (M + M) = mg[\vec{\gamma} \times \vec{c}\,]; \qquad (16)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{M} + \vec{M}) + (\vec{M} + \vec{M}) \times \vec{\Omega} = mg[\vec{\gamma} \times \vec{c}\,]; \qquad (17)$$

которым следует присоединить уравнения, определяющие положение центра масс жидкости в полости и положение твёрдого тела в пространстве:

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = [\vec{\Omega} \times \vec{c}\,]; \qquad (18)$$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = [\vec{\gamma} \times \vec{\omega}], \qquad (19)$$

где $\bar{c}_i = \dfrac{c_i}{a_i}$, $\quad \bar{\gamma}_i = \gamma_i a_i$, $\quad (i = 1, 2, 3)$,

В уравнениях (16), (17) приняты обозначения:

$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\omega}$ – сумма кинетических моментов твёрдого тела $(\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\omega})$ и «затвердевшей» жидкости $(M^{з.ж} = \Theta^{з.ж} \cdot \vec{\omega})$,

$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\Omega}$ – гиростатический момент жидкости,

$\vec{M}^{ж} = \Theta^{з.ж} \cdot \vec{\Omega}$ – кинетический момент жидкости при движении с угловой скоростью затвердевшей жидкости $\Theta_{11}^{з.ж} = A_1$; $\Theta_{22}^{з.ж} = B_1$; $\Theta_{33}^{з.ж} = C_1$;

$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\omega}$ – кинетический момент жидкости при движении с угловой скоростью твёрдого тела $\Theta_{11}^{*} = F$; $\Theta_{22}^{*} = G$; $\Theta_{33}^{*} = H$;

Отметим, что уравнение (16) одинаково с уравнением движения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с кинетическим моментом $\vec{M}$, к которому присоединено вращающееся носимое твёрдое тело с кинетическим моментом $\vec{M}$.

Однако вращение присоединенного твёрдого тела происходит так, что центр масс носимого тела меняет своё положение относительно несущего, а моменты инерции носимого тела остаются постоянными.

Следовательно, рассматриваемая механическая система, вследствие переменности положения центра масс носимого тела в системе координат, связанной с несущим телом, не является гиростатом и представляет собой более общую механическую систему.

Пусть твёрдое тело удерживается неподвижным. Тогда уравнение одной жидкости описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\frac{d\vec{M}^{\text{ж}}}{dt}+\vec{M}^{\text{ж}}\times\Omega=mg\left(\vec{\bar{\gamma}}\times\vec{\bar{c}}\right),\\ \frac{d\vec{c}}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{c},\end{gathered}\tag{20}$$

которые после замены $\vec{\omega}$ на $-\vec{\omega}$ совпадают с уравнениями Эйлера-Пуассона движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки [14, 15]. Следовательно, можно утверждать, что во всех интегрируемых случаях движения тяжелого твёрдого тела могут быть записаны решения задачи (20) о движении неоднородной жидкости в эллипсоидальной полости.

В проекциях на подвижные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 уравнения (16), (17) запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A\omega_1 + F\Omega_1) + \omega_2\omega_3(C - B) + H\omega_2\Omega_3 - G\omega_3\Omega_2 = mg(\gamma_2 c_3 - \gamma_3 c_2),\\
&\frac{d}{dt}(B\omega_2 + G\Omega_2) + \omega_1\omega_3(A - C) + F\omega_3\Omega_1 - H\omega_1\Omega_3 = mg(\gamma_3 c_1 - \gamma_1 c_3),\\
&\frac{d}{dt}(C\omega_3 + H\Omega_3) + \omega_1\omega_2(B - A) + G\omega_1\Omega_2 - F\omega_2\Omega_1 = mg(\gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A_1\Omega_1 + F\omega_1) + \Omega_2\Omega_3(B_1 - C_1) + G\omega_2\Omega_3 - H\omega_3\Omega_2 = mg(\overline{\gamma_2}\,\overline{c_3} - \overline{\gamma_2}\,\overline{c_3}),\\
&\frac{d}{dt}(B_1\Omega_2 + G\omega_2) + \Omega_1\Omega_3(C_1 - A_1) + H\omega_3\Omega_1 - F\omega_1\Omega_3 = mg(\overline{\gamma_3}\,\overline{c_1} - \overline{\gamma_1}\,\overline{c_3}),\\
&\frac{d}{dt}(C_1\Omega_3 + H\omega_3) + \Omega_1\Omega_2(A_1 - B_1) + F\omega_1\Omega_2 - G\omega_2\Omega_1 = mg(\overline{\gamma_1}\,\overline{c_2} - \overline{\gamma_2}\,\overline{c_1}).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Уравнения (18), (19) запишутся в виде

$$
\frac{1}{a_1}\frac{dc_1}{dt} = \frac{c_3}{a_3}\Omega_2 - \frac{c_2}{a_2}\Omega_3\,, \quad \frac{1}{a_2}\frac{dc_2}{dt} = \frac{c_1}{a_1}\Omega_3 - \frac{c_3}{a_3}\Omega_1\,, \quad \frac{1}{a_3}\frac{dc_3}{dt} = \frac{c_2}{a_2}\Omega_1 - \frac{c_1}{a_1}\Omega_2\,, \tag{23}
$$

$$
\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2\,, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3\,, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1\,. \tag{24}
$$

Об устойчивости вращения твёрдого тела с неоднородной жидкостью

Уравнения движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью допускают ряд первых интегралов. Помножим уравнения (21) на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно и сложим, в результате с учетом уравнения (24) получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A\omega_1^{\,2} + B\omega_2^{\,2} + C\omega_3^{\,2}) + 2F\omega_1\frac{d\Omega_1}{dt} + 2G\omega_2\frac{d\Omega_2}{dt} + 2H\omega_3\frac{d\Omega_3}{dt} =\\
&\qquad\qquad = -2mg\left(c_1\frac{d\gamma_1}{dt} + c_2\frac{d\gamma_2}{dt} + c_3\frac{d\gamma_3}{dt}\right).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Помножим уравнения (22) на $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и сложим, учитывая равенство (23), придем к выражению

$$\frac{d}{dt}(A_1\Omega_1{}^2 + B_1\Omega_2{}^2 + C_1\Omega_3{}^2) + 2F\Omega_1\frac{d\omega_1}{dt} + 2G\Omega_2\frac{d\omega_2}{dt} + 2H\Omega_3\frac{d\omega_3}{dt} = \\ = -2mg\left(\gamma_1\frac{dc_1}{dt} + \gamma_2\frac{dc_2}{dt} + \gamma_3\frac{dc_3}{dt}\right). \qquad (26)$$

Суммируя равенства (25) и (26), получим интеграл энергии

$$A\omega_1{}^2 + B\omega_2{}^2 + C\omega_3{}^2 + 2F\omega_1\Omega_1 + 2G\omega_2\Omega_2 + 2H\omega_3\Omega_3 + \\ + 2mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3) = V_1.$$

Умножим далее уравнения (21) на $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответственно и сложим их. Принимая во внимание уравнение (24), получим интеграл площадей

$$\gamma_1(A\omega_1 + F\Omega_1) + \gamma_2(B\omega_2 + G\Omega_2) + \gamma_3(C\omega_3 + H\Omega_3) = V_2.$$

Уравнения (23), (24) допускают, очевидно, геометрические интегралы для твёрдого тела и жидкости соответственно:

$$\gamma_1{}^2 + \gamma_2{}^2 + \gamma_3{}^2 = V_3.$$

$$a_2{}^2a_3{}^2c_1{}^2 + a_1{}^2a_3{}^2c_2{}^2 + a_1{}^2a_2{}^2c_3{}^2 = V_4.$$

Предварительно умножив уравнения (22) на $\frac{c_1}{a_1}$, $\frac{c_2}{a_2}$, $\frac{c_3}{a_3}$ поочередно и сложив результаты, придем к интегралу площадей для жидкости

$$(A_1\Omega_1 + F\omega_1)\frac{c_1}{a_1} + (B_1\Omega_2 + G\omega_2)\frac{c_2}{a_2} + (C_1\Omega_3 + H\omega_3)\frac{c_3}{a_3} = V_5.$$

Исследуем устойчивости движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное движение по отношению к изменению переменных:

$\Omega_i^*, \omega_i, \gamma_i, c_i (i = 1,2,3)$,

где

$$\Omega_1^* = \omega_1 + \frac{a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}{2a_2 a_3}\Omega_1\,, \;\; \Omega_2^* = \omega_2 + \frac{a_1^{\,2} + a_3^{\,2}}{2a_1 a_3}\Omega_2\,, \;\; \Omega_3^* = \omega_3 + \frac{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}{2a_1 a_2}\Omega_3\,. \tag{27}$$

Используя (27), преобразуем уравнения (16), (22) и (23) к виду

$$\Theta_* \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \Theta^{(2)} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\omega} \times (\Theta_* \cdot \vec{\omega} + \Theta^{(2)} \cdot \vec{\Omega}\,) = mg(\vec{\gamma} \times \vec{c}\,), \tag{28}$$

$$\begin{gathered} \frac{2}{5} a_2 a_3 \frac{d\Omega_1^*}{dt} + \frac{4}{5} \frac{(a_3^{\,2} - a_2^{\,2}) a_1^{\,2} a_2 a_3}{(a_3^{\,2} + a_2^{\,2})(a_1^{\,2} + a_2^{\,2})} \Omega_2^* \Omega_3^* + \\ + \frac{4}{5} a_1^{\,2} a_2 a_3 \left(\frac{\omega_2 \Omega_3^*}{a_1^{\,2} + a_3^{\,2}} - \frac{\omega_3 \Omega_2^*}{a_1^{\,2} + a_3^{\,2}} \right) = g \left(\gamma_2 c_3 \frac{a_2}{a_3} - \gamma_3 c_2 \frac{a_1}{a_3} \right), \end{gathered} \tag{29}$$

$$\frac{1}{a_1^{\,2}} \frac{dc_1}{dt} = \frac{2c_3}{a_1^{\,2} + a_3^{\,2}} (\Omega_2^* - \omega_2) - \frac{2c_2}{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}} (\Omega_3^* - \omega_3)\,, \qquad (1,2,3), \tag{30}$$

где $\Theta_* = \Theta^T + \Theta^Э$, $\Theta^Э = \{A_Э, B_Э, C_Э\}$ – тензор инерции эквивалентного тела с компонентами

$$\Theta_{11}^Э = A_Э = \frac{m}{5} \frac{(a_2^{\,2} - a_3^{\,2})^2}{a_2^{\,2} + a_3^{\,2}} \;\; ; \quad (A_Э, B_Э, C_Э;\; 1,2,3),$$

$\Theta^{(2)} = \{A_2, B_2, C_2\}$ – тензор, равный разности между тензором инерции «затвердевшей» жидкости и эквивалентного тела и определенный компонентами

$$\Theta_{11}^{(2)} = A_2 = A_1 - A_Э = \frac{4}{5} m \frac{a_2^{\,2} a_3^{\,2}}{a_2^{\,2} + a_3^{\,2}} \;\; ; \quad (A_2, B_2, C_2;\; 1,2,3).$$

Здесь и далее $A = A_0 + A_Э$, $\quad B = B_0 + B_Э$, $\quad C = C_0 + C_Э$.

Преобразованные уравнения также допускают первые интегралы. Интеграл энергии

$$A\omega_1^{\,2} + B\omega_2^{\,2} + C\omega_3^{\,2} + A_2 \Omega_1^{*2} + B_2 \Omega_2^{*2} + C_2 \Omega_3^{*2} + 2mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3) = V_1\,,$$

и интеграл площадей для твердого тела с жидкостью

$$A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 + A_2\Omega_1^*\gamma_1 + B_2\Omega_2^*\gamma_2 + C_2\Omega_3^*\omega_3 = V_2 .$$

Интеграл площадей для жидкости при использовании переменных $\Omega_1^*, \Omega_2^*, \Omega_3^*$ имеет вид:

$$a_2{}^2 a_3{}^2 \Omega_1^* c_1 + a_1{}^2 a_2{}^2 \Omega_2^* c_2 + a_1{}^2 a_2{}^2 \Omega_3^* c_3 = V_5 .$$

Уравнения движения системы (28) – (30), (24) допускают следующее частное решение:

$$\begin{array}{llll} \omega_1 = \omega_2 = 0, & \omega_3 = \omega_0; & \Omega_1^* = \Omega_2^* = 0, & \Omega_3^* = \Omega_0, \\ c_1 = c_2 = 0, & c_3 = z_0; & \gamma_1 = \gamma_2 = 0, & \gamma_3 = 1, \end{array} \tag{31}$$

которому соответствует равномерное вращение твёрдого тела вокруг оси, параллельной вектору $\vec{g}$ и установившемуся движению с угловой скоростью Ω_0 неоднородной жидкости, плотность которой в установившемся вращении изменяется по закону:

$$\rho = \rho_0 + \rho_3 x_3 ,$$

Движение системы, описываемое частным решением (31), примем за невозмущённое движение твёрдого тела и жидкости в его полости, и исследуем устойчивость вращательных движений твёрдого тела и жидкости. Отметим, что твёрдое тело с жидкостью является системой, обладающей бесконечным числом степеней свободы. Переменные $c_i (i = 1, 2, 3)$ однако позволяют описать движение системы тело-жидкость конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае под устойчивостью движения системы, как и при исследовании устойчивости движения одной жидкости, следует понимать не устойчивость по отношению ко всем переменным, характеризующим движение, а устойчивость по отношению к части переменных [19].

Такая постановка задачи является наиболее правомерной в прикладных задачах, изучающих главным образом вопрос об устойчивости движения твёрдого тела. Это обстоятельство позволяет рассматривать задачу об устойчивости системы «тело-жидкость» как задачу об устойчивости системы с конечным числом переменных. Для решения вопроса об устойчивости движения системы воспользуемся вторым методом Ляпунова, распространенным на подобные системы в работе [19].

Уравнения возмущённого движения получим из уравнений (28) – (30), (24), положив в возмущенном движении

$$\omega_3 = \omega_0 + y_1, \qquad \Omega_3^* = \Omega_0 + y_2, \qquad \gamma_3 = 1 + y_3, \qquad c_3 = z_0 + y_4. \tag{32}$$

и сохраняя прежние обозначения для других переменных. Уравнения возмущённого движения обладают следующими первыми интегралами в общем случае:

$$V_1 = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C(y_1^2 + 2\omega_0 y_1) + A_2\Omega_1^{*2} + B_2\Omega_2^{*2} + C_2(y_2^2 + 2\Omega_0 y_0) + \\ + 2mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + z_0 y_3 + y_4 + y_3 y_4),$$

$$V_2 = A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C(y_1 + y_1 y_3 + \omega_0 y_3) + A_2\gamma_1\Omega_1^* + B_2\gamma_2\Omega_2^* + \\ + C_2(y_2 + y_2 y_3 + \Omega_0 y_3),$$

$$V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2y_3 + y_3^2,$$

$$V_4 = a_2^2 a_3^2 c_1^2 + a_1^2 a_3^2 c_2^2 + a_1^2 a_2^2 (y_4^2 + 2z_0 y_4),$$

$$V_5 = a_2^2 a_3^2 \Omega_1^* c_1 + a_1^2 a_2^2 \Omega_2^* c_2 + a_1^2 a_2^2 (y_2 y_4 + y_2 z_0 + \Omega_0 y_4).$$

Для построения функции Ляпунова воспользуемся методом Четаева [20]. Составим связку первых интегралов

$$V = V_1 - 2\omega_0 V_2 + T_1 V_4 - 2T_2 V_5 + \mu V_3 + \frac{1}{4}\chi V_3^2,$$

где $$T_1 = \frac{(\Omega_0 - \omega_0)C_2\Omega_0}{z_0^2 a_1^2 a_2^2} - \frac{mg}{z_0 a_1^2 a_2^2} = T_2\frac{\Omega_0}{z_0} - \frac{mg}{z_0 a_1^2 a_2^2},$$

$$T_2 = \frac{(\Omega_0 - \omega_0)C_2}{z_0 a_1^2 a_2^2}, \qquad \mu = (C\omega_0 + C_2\Omega_0)\omega_0 - mgz_0.$$

После небольших преобразований функцию V приведем к виду:

$$\begin{aligned} V = {} & A\omega_1^2 - 2\omega_0 A\omega_1\gamma_1 - 2\omega_0 A_2\Omega_1^*\gamma_1 + \mu\gamma_1^2 + A_2\Omega_1^{*2} - 2T_2 a_2^2 a_3^2\Omega_1^* c_1 + \\ & + T_1 a_2^2 a_3^2 c_1^2 + 2mgc_1\gamma_1 + \\ & + B\omega_2^2 - 2\omega_0 B\omega_2\gamma_2 - 2\omega_0 B_2\Omega_2^*\gamma_2 + \mu\gamma_2^2 + B_2\Omega_2^{*2} - 2T_2 a_1^2 a_3^2\Omega_2^* c_2 + \\ & + T_1 a_1^2 a_3^2 c_2^2 + 2mgc_2\gamma_2 + \\ & + Cy_1^2 - 2\omega_0 Cy_1 y_3 - 2\omega_0 C_2 y_2 y_3 + \mu y_3^2 + C_2 y_2^2 - 2T_2 a_1^2 a_2^2 y_2 y_4 + \\ & + T_1 a_1^2 a_2^2 y_4^2 + 2mgy_3 y_4 + \chi y_3^2 + \ldots \end{aligned}$$

Многоточие означает незаписанные члены выше 2-го порядка малости, а коэффициент χ остается пока произвольным. Функцию V можно рассматривать как сумму трех квадратичных форм, каждая из которых зависит от четырех переменных

$$V = V^{(1)}(\omega_1, \gamma_1, \Omega_1^*, c_1) + V^{(2)}(\omega_2, \gamma_2, \Omega_2^*, c_2) + V^{(3)}(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Согласно критерию Сильвестра для положительной знакоопределенности первых двух форм необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\Delta_3^{*A} = (C - A^*)\omega_0^2 + C_2\Omega_0\omega_0 - mgz_0 > 0,$$

$$\Delta_4^{*A} = \Delta_3^{*A}\frac{a_3^2}{a_1^2}\left\{(\Omega_0-\omega_0)\Omega_0 A_2 C_2 - (\Omega_0-\omega_0)^2 C_2^2\frac{a_3^2}{a_1^2} - A_2 mgz_0\right\} -$$
$$- A_2\left\{(\Omega_0-\omega_0)C_2\omega_0\frac{a_3^2}{a_1^2} - mgz_0\right\}^2 > 0\ , \qquad (33)$$

$$\Delta_3^{*B} = (C - B^*)\omega_0^2 + C_2\Omega_0\omega_0 - mgz_0 > 0,$$

$$\Delta_4^{*B} = \Delta_3^{*B}\frac{a_3^2}{a_2^2}\left\{(\Omega_0-\omega_0)\Omega_0 B_2 C_2 - (\Omega_0-\omega_0)^2 C_2^2\frac{a_3^2}{a_2^2} - B_2 mgz_0\right\} -$$
$$- B_2\left\{(\Omega_0-\omega_0)C_2\omega_0\frac{a_3^2}{a_2^2} - mgz_0\right\}^2 > 0\ . \qquad (34)$$

Для положительной определенности последней квадратичной формы достаточно выбрать постоянную χ, равной

$$\chi = \omega_0 C_2(\Omega_0 - \omega_0) - mgz_0\,.$$

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости, неравенства (33), (34) будут достаточными условиями устойчивости невозмущённого движения (32), по отношению к переменным $\omega_i, \Omega_i^*, c_i, \gamma_i$. Практически интересными являются случаи, когда Ω_0 очень мало и случай $\Omega_0 = \omega_0$, когда жидкость и тело, благодаря наличию вязкости, вращаются как одно твёрдое тело.

Рассмотрим сначала случай $\Omega_0 = \omega_0$.

Пусть $z_0 = 0$. Тогда неравенства (33), (34) принимают вид условий

$$C^* - A^* > 0, \qquad C^* - B^* > 0,$$

которые совпадают с достаточными условиями устойчивости невозмущённого движения по инерции твёрдого тела с однородной жидкостью, вращающегося вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс системы, обладающей суммарными моментами инерции

$$A^* = A_0 + A_Э + A_2\,, \qquad B^* = B_0 + B_Э + B_2\,, \qquad C^* = C_0 + C_Э + C_2\,.$$

Если $z_0 \neq 0$, то для динамически симметричного относительно оси Ox_3 твёрдого тела $(A_0 = B_0)$ с эллипсоидальной полостью вращения $(a_1 = a_2)$ неравенства (33), (34) принимают вид:

$$\begin{gathered}(C^* - A^*)\omega_0^{\,2} - mgz_0 > 0, \\ A_2 mgz_0 \frac{a_3^{\,2}}{a_1^{\,2}}\left\{(A^* - C^*)\omega_0^{\,2} + mgz_0 \frac{a_3^{\,2} - a_1^{\,2}}{a_3^{\,2}}\right\} > 0.\end{gathered} \tag{35}$$

При $z_0 > 0$ неравенства (35) являются не совместными, и достаточные условия устойчивости решения в этом случае указаны быть не могут. При $z_0 < 0$ невозмущённое движение системы будет устойчиво, если выполняются неравенства:

$$(C_0 - A_0)\omega_0^{\,2} + (C_1 - A_1)\omega_0^{\,2} + mgz_0 > 0,$$

$$(A_0 - C_0)\omega_0^{\,2} + (A_1 - C_1)\omega_0^{\,2} + mgz_0 \frac{a_3^{\,2} - a_1^{\,2}}{a_3^{\,2}} < 0,$$

Откуда следует, что для динамически симметричного твёрдого тела с шаровой полостью достаточным условием устойчивости невозмущённого движения (32) будет являться неравенство $C_0 > A_0$ совпадающее с одним из условий устойчивости переменных вращений одного твёрдого тела.

Рассмотрим теперь случай, когда Ω_0 достаточно мало, $\Omega_0 \approx 0$. Это имеет место в начальные моменты времени раскрутки, когда основная масса неоднородной жидкости либо покоится, либо совершает движение, близкое к потенциальному. Выражения (33), (34) в этом случае имеют вид:

$$(C - A^*)\omega_0^{\,2} - mgz_0 > 0, \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\left[(C - A^*)\omega_0^{\,2} - mgz_0\right]\frac{a_3^{\,2}}{a_1^{\,2}}\left(\omega_0^{\,2} C_2^{\,2}\frac{a_3^{\,2}}{a_1^{\,2}} + A_2 mgz_0\right) + \\ + A_2\left(\omega_0^{\,2} C_2\frac{a_3^{\,2}}{a_1^{\,2}} + mgz_0\right)^2 < 0.\end{gathered} \tag{37}$$

При $z_0 \geq 0$ неравенства (36), (37) несовместны, и условия знакоопределенности функции V, а следовательно, и достаточные условия устойчивости, указаны быть не могут. При $z_0 < 0$ из неравенства (37) следует неравенство

$$A_1\omega_0^{\,2} + mgz_0 < 0, \tag{38}$$

которое, совместно с неравенством (36) и будут достаточными условиями невозмущённого движения. Для твёрдого тела, представляющего собой тонкую оболочку, моментами инерции которой можно пренебречь по сравнению с жидкостью, достаточным условием устойчивости в рассматриваемом случае при $z_0 < 0$ может служить одно неравенство (38). Отметим, что из неравенства (38) следует физически правильный результат: незакрученная жидкость может быть устойчивой только при $z_0 < 0$ т. е. когда плотность жидкости в невозмущённом состоянии увеличивается в направлении однородного силового поля.

Полученные достаточные условия устойчивости движения могут и не охватывать всей области устойчивости системы. Соответствие достаточных условий, получаемых при помощи 2-го метода Ляпунова, необходимым и достаточным условиям во многом зависит от удачного построения функции Ляпунова. В связи с этим укажем иные достаточные условия устойчивости системы, когда ось Ox_3 является осью симметрии полости и осью динамической симметрии твёрдого тела. В этом случае уравнения возмущённого движения системы «тело-жидкость» допускают ещё один первый интеграл

$$V_6 = y_1 .$$

Составим связку интегралов: $V_i \, (i = 1 \div 6)$

$$V = V_1 + 2\lambda V_2 - 2\frac{\Phi_2}{a_1^4}V_5 - (mgz_0 + C\omega_0\lambda + C_2\Omega_0\lambda)V_3 -$$
$$-\frac{\Phi_1}{a_1^4}V_4 - 2C(\omega_0 + \lambda)V_6 + \frac{C(C-A)}{A}V_6^2 + \chi_1 V_4^2 + \chi_2 V_5^2$$

$$\begin{aligned} V = {} & A\omega_1^2 + 2\lambda A\omega_1\gamma_1 - \mu_1\gamma_1^2 + B\omega_2^2 + 2\lambda A\omega_2\gamma_2 - \mu_1\gamma_2^2 + \frac{C^2}{A}y_1^2 + 2C\lambda y_1 y_3 - \eta_1 y_3^2 + \\ & + A_2\Omega_1^{*2} + 2\lambda A_2\Omega_1^*\gamma_1 - C_2\Omega_0\lambda\gamma_1^2 - \Phi_1\frac{a_3^2}{a_1^2}c_1^2 + 2mgc_1\gamma_1 - 2\Phi_2\frac{a_3^2}{a_1^2}\Omega_1^* c_1 + \\ & + B_2\Omega_2^{*2} + 2\lambda A_2\Omega_2^*\gamma_2 - C_2\Omega_0\lambda\gamma_2^2 - \Phi_1\frac{a_3^2}{a_1^2}c_2^2 + 2mgc_2\gamma_2 - 2\Phi_2\frac{a_3^2}{a_1^2}\Omega_2^* c_2 + \\ & + C_2 y_2^2 + 2\lambda C_2 y_2 y_3 - C_2\Omega_0\lambda y_3^2 - \Phi_1 y_4^2 + 2mgy_3 y_4 - 2\Phi_2 y_3 y_4 + \\ & + \chi_2 a_1^8(y_2^2 z_0^2 + 2y_2 y_4\Omega_0 z_0 + \Omega_0^2 y_4^2) + 4\chi_1 a_1^8 z_0^2 y_4^2 + \ldots \end{aligned} \tag{39}$$

В выражении (39) введены обозначения:

$$\Phi_1 = \frac{mg}{z_0} - \frac{C_2(\Omega_0^2 - \Omega_0\lambda)}{z_0^2}, \quad \Phi_2 = \frac{C_2(\Omega_0 + \lambda)}{z_0}, \quad \mu_1 = mgz_0 + C\omega_0\lambda.$$

λ, χ – некоторые постоянные.

Функцию V будем рассматривать как сумму трех квадратичных форм относительно двух переменных и трех квадратичных форм относительно трех переменных.

$$V = V^{(1)}(\omega_1, \gamma_1) + V^{(2)}(\omega_2, \gamma_2) + V^{(3)}(y_1, y_3) + \\ + V^{(4)}(\Omega_1^*, \gamma_1, c_1) + V^{(5)}(\Omega_2^*, \gamma_2, c_2) + V^{(6)}(y_2, y_3, y_4).$$

Первые три квадратичные формы относительно двух переменных представляют собой функцию Ляпунова для твёрдого тела с затвердевшей жидкостью. Эта функция будет определенно положительна при выполнении неравенства

$$f_0(\lambda) = A\lambda^2 + C\omega_0\lambda + mgz_0 < 0, \tag{40}$$

которое при равенстве нулю имеет действительные корни при $z_0 > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-C\omega_0 \pm \sqrt{C^2\omega_0^2 - 4Amgz_0}}{2A},$$

если выполняется условие

$$C^2\omega_0^2 - 4Amgz_0 > 0,$$

совпадающее с условием Маевского; четвертая и пятая квадратичные формы относительно трёх переменных будут определенно положительны при выполнении неравенств, получающихся согласно критерию Сильвестра

$$\Delta_2(\lambda) = -\lambda A_2(\lambda A_2 + C_2\Omega_0) > 0, \tag{41}$$

$$\Delta_3(\lambda)=\lambda^3\frac{2}{5}\Omega_0 a_3^2\frac{(a_3^2-a_1^2)^2}{a_3^2+a_1^2}-\lambda^2\left[\frac{4}{25}\Omega_0^2 a_3^4\frac{a_1^2-a_3^2}{a_1^2+a_3^2}+\frac{4}{5}gz_0\frac{a_1^2a_3^2}{a_1^2+a_3^2}\right]+$$
$$-\lambda\left[\frac{2}{25}\Omega_0^3 a_3^2(a_1^2-a_3^2)+\frac{2}{5}\Omega_0 g z_0 a_3^2\right]-g^2z_0^2>0, \qquad (42)$$

Неравенство (41) для отрицательных λ выполняется при условии

$$\lambda>\lambda_3=-\frac{C_2}{A_2}\Omega_0,$$

Выражение (42) можно записать также в виде

$$\Delta_3(\lambda)=\frac{2}{5}\lambda\Omega_0 a_3^2\frac{(a_3^2-a_1^2)^2}{a_3^2+a_1^2}f_1(\lambda)+f_2(\lambda)>0, \qquad (43)$$

где

$$f_1(\lambda)=(\lambda+\Omega_0)(\lambda+\frac{C_2}{A_2-C_2}\Omega_0),$$
$$f_2(\lambda)=-\frac{gz_0}{m}(\lambda^2A_2+\lambda C_2\Omega_0\frac{a_3^2}{a_1^2}+mgz_0). \qquad (44)$$

Последняя, шестая квадратичная форма всегда может быть сведена к определенно-положительной форме при помощи выбора неопределенных параметров χ_1 и χ_2, и следовательно, условия знакоопределенности этой формы могут быть проигнорированы.

Для обеспечения положительной знакоопределённости функции Ляпунова выясним условия совместности неравенств (40) – (42) в некоторых конкретных случаях. Условия совместности неравенств обеспечат наличие функции V, удовлетворяющей всем требованиям теоремы [19] об устойчивости по части переменных, и следовательно, будут достаточным условиями устойчивости решения.

Заметим, что поведение функции $f_1(\lambda)$ зависит только от геометрии полости, а функции $f_2(\lambda)$ – от знака z_0 и размеров полости. Пусть $z_0 > 0$ и $a_1 > a_3$, Ω_0 и ω_0 – конечные величины. Функции $f_0(\lambda)$, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ для этого случая представлены на рис. 2.

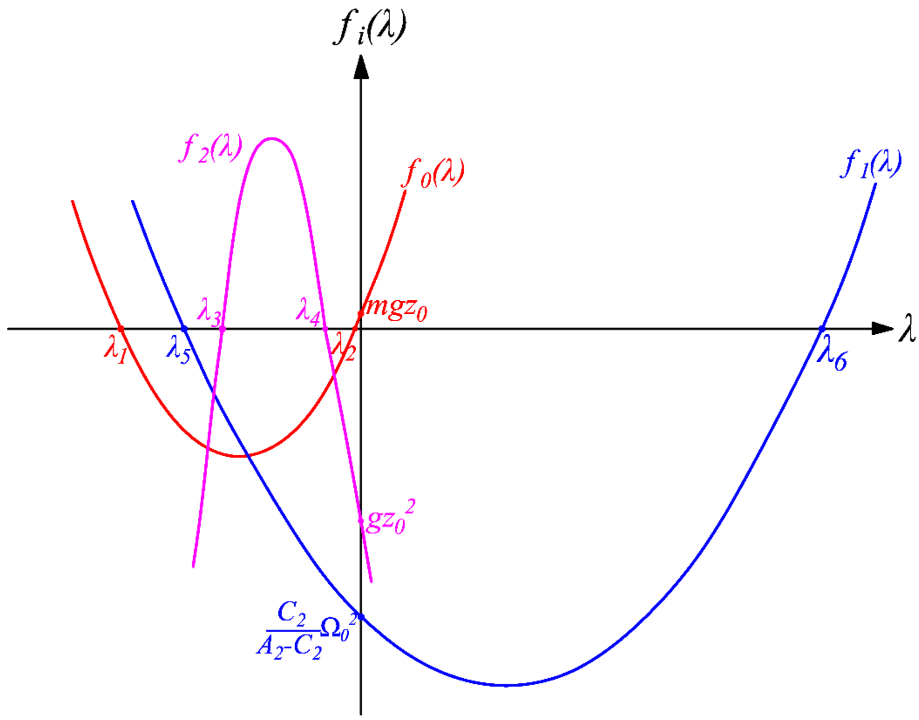

Рис. 2. Графики квадратичных форм для случая $z_0 > 0$ и $a_1 > a_3$.

Для выполнения положительной знакоопределённости функции $f_2(\lambda)$ в рассматриваемом случае достаточно потребовать выполнение условия

$$C_2^2\Omega_0^2\frac{a_3^4}{a_1^4} - 4A_2mgz_0 > 0. \tag{45}$$

Так как $\lambda_3 > \Omega_0$, и $\Delta_3(-\Omega_0) < 0$, $f_2(-\Omega_0) < 0$, то при $a_1 > a_3$ из рис.2 следует, что неравенства (40), (41), (42) будут совместны, если значение λ будет выбрано из интервала $\lambda_3 < \lambda < \lambda_4$, где λ_3, λ_4 – корни уравнения $f_2(\lambda) = 0.$

Последнее неравенство будет особенно, если

$$\lambda_4 < \lambda_2, \quad \lambda_5 < \lambda_3, \tag{46}$$

или должны быть выполнены условия

$$\begin{gathered}
\frac{-C_2\Omega_0 \dfrac{a_3{}^2}{a_1{}^2} + \sqrt{C_2{}^2\Omega_0{}^2 \dfrac{a_3{}^2}{a_1{}^2} - 4A_2 mgz_0}}{2A_2} < \frac{-C\omega_0 + \sqrt{C^2\omega_0{}^2 - 4mgz_0 A}}{2A}, \\
\frac{-C_2\Omega_0 \dfrac{a_3{}^2}{a_1{}^2} - \sqrt{C_2{}^2\Omega_0{}^2 \dfrac{a_3{}^2}{a_1{}^2} - 4A_2 mgz_0}}{2A_2} > \frac{-\dfrac{A_2}{A_2 - C_2}\Omega_0 - \sqrt{\dfrac{A_2{}^2}{(A_2 - C_2)^2}\Omega_0{}^2 - 4\dfrac{C_2}{A_2 - C_2}\Omega_0{}^2}}{2}
\end{gathered} \tag{47}$$

Таким образом, при выполнении неравенств (45) – (47) в рассматриваемом случае невозмущённое движение будет устойчиво по отношению к величинам $\omega_i, \Omega_i, c_i, \gamma_i \ (i = 1,2,3)$.

Отметим интересный момент неравенства (47) можно рассматривать как условия, при которых кривые $f_0(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ имеют своими нулями корни, расположенные левее оси ординат. Необходимым условием для этого может служить неравенство

$$\omega_0\Omega_0 > 0, \tag{48}$$

означающее, что жидкость и твёрдое тело в установившемся движении должны вращаться в одну сторону.

Заключение

В данной статье получены и проанализированы уравнения сферического движения твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью наполненной неоднородной идеальной жидкостью. Выведены достаточные условия устойчивости вращения твердого тела с жидкостью вокруг вертикальной оси динамической симметрии. Полученное условие имеет вид неравенств корней квадратичных форм, отвечающих возмущенному движению тела с жидкостью.

Список источников

1. Жуковский Н.Е. О движения твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 137 с.

2. Th. Sloudsky. De la rotation de la terre supposee fluide a son interieur // Bulletin de la Societe Imperiale des naturalistes de Moscou, 1895, vol. IX, pp. 285–318.

3. Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A, 1895, vol. 186, part 1, pp. 469–506.

4. Poincare H. Sur la precession des corps deformables // Bulletin astronomique, 1910, vol. 27, pp. 321–356.

5. Суденков С.Н. Канонические уравнения движения твёрдого тела с вихревым заполнением. – Донецк: Институт прикладной математики и механики АН УССР, 1977. С. 67–71.

6. Савченко А.Я., Игнатов А.Л. Исследование устойчивости равномерных вращений симметричного волчка с жидким заполнением // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 10. № 8. С. 107-111.

7. Игнатьев А.О. К достаточным условиям устойчивости осесимметричного волчка с жидким заполнением // Механика твердого тела. 1977. № 9. С. 82–86.

8. Позднякович Е.В. Равномерные вращения твёрдого тела с жидким заполнителем // Механика твердого тела. 1978. № 10. С. 49-54.

9. Ай Мин Вин, Темнов А.Н. Вращение твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=55633

10. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=84412

11. Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках // Труды МАИ. 2021. № 119. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=159785. DOI: 34759/trd-2021-119-08

12. Должанский Ф.В. О гидродинамической интерпретации уравнений движения тяжелого волчка // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1977. № 2. С. 201-203.

13. Темнов А.Н. Однородное вихревое движение неоднородной жидкости // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1979. № 293. С. 50–57.

14. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Механический аналог движений неоднородной жидкости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2022. № 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2022-7-2192

15. Темнов А.Н. Устойчивость стационарных вращений неоднородной жидкости в эллипсоидальной полости // Известия вузов. Машиностроение. 1979. № 7. С. 149–151.

16. Ян Наинг У. Движение твердого тела с жидкостью, совершающей однородное вихревое движение // III межвузовская конференция аспирантов, соискателей и молодых ученых «Наука, технологии и бизнес» (Москва, 27–28 апреля 2021): сборник трудов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. С. 209–222.

17. Мельхиор П. Земные приливы. – М.: Мир, 1968. - 482 с.

18. Лурье А.И. Аналитическая механика. - М.: Физматгиз, 1961. - 824 с.

19. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. - 439 с.

20. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. - М.: Наука, 1976. - 320 с.

References

1. Zhukovskii N.E. *O dvizheniya tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoi kapel'noi zhidkost'yu* (Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with liquid), Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2017, 137 p.

2. Th. Sloudsky. De la rotation de la terre supposee fluide a son interieur, *Bulletin de la Societe Imperiale des naturalistes de Moscou*, 1895, vol. IX, pp. 285–318.

3. Hough S.S. The oscillations of a rota ting ellipsoidal shell containing fluid, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* A, 1895, vol. 186, part 1, pp. 469–506.

4. Poincare H. Sur la precession des corps deformables, *Bulletin astronomique,* 1910, vol. 27, pp. 321–356.

5. Sudenkov S.N. *Kanonicheskie uravneniya dvizheniya tverdogo tela s vikhrevym zapolneniem* (Canonical equations of motion of a rigid body with vortex filling), Donetsk, Institut prikladnoi matematiki i mekhaniki AN USSR, 1977, pp. 67–71.

6. Savchenko A.Ya., Ignatov A.L. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1974, vol. 10, no. 8, pp. 107-111.

7. Ignat'ev A.O. *Mekhanika tverdogo tela,* 1977, no. 9, pp. 82–86.

8. Pozdnyakovich E.V. *Mekhanika tverdogo tela,* 1978, no. 10, pp. 49-54.

9. Ai Min Vin, Temnov A.N. *Trudy MAI,* 2015, no. 79. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=55633

10. Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Trudy MAI,* 2017, no. 95. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=84412

11. Pak Songi, Grigor'ev V.G. *Trudy MAI,* 2021, no. 119. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=159785. DOI: 34759/trd-2021-119-08

12. Dolzhanskii F.V. *Izvestiya AN SSSR. Fizika atmosfery i okeana*, 1977, no. 2, pp. 201-203.

13. Temnov A.N. *Trudy MVTU im. N.E. Baumana*, 1979, vol. 293, pp. 50–57.

14. Temnov A.N., Yan Naing Oo. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, 2022, no. 7, DOI: 10.18698/2308-6033-2022-7-2192

15. Temnov A.N. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*, 1979, no. 7, pp. 149–151.

16. Yan Naing Oo. *III mezhvuzovskaya konferentsiya aspirantov, soiskatelei i molodykh uchenykh «Nauka, tekhnologii i biznes»*: sbornik trudov, Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2021, pp. 209–222.

17. Mel'khior P. *Zemnye prilivy* (Earth Tides), Moscow, Mir, 1968, 482 p.

18. Lur'e A.I. *Analiticheskaya mekhanika* (Analytical mechanics), Moscow, Fizmatgiz, 1961, 824 p.

19. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Dinamika tela s polostyami, soderzhashchimi zhidkost'* (Dynamics of a body with cavities containing liquid Moscow), Nauka, 1965, 439 p.

20. Merkin D.R. *Vvedenie v teoriyu ustoichivosti dvizheniya* (Introduction to the theory of motion stability), Moscow, Nauka, 1976, 320 p.

Статья поступила в редакцию 16.12.2022

Одобрена после рецензирования 27.12.2022

Принята к публикации 27.02.2023

The article was submitted on 16.12.2022; approved after reviewing on 27.12.2022; accepted for publication on 27.02.2023