

Труды МАИ. 2023. № 129  
Trudy MAI, 2023, no. 129

Научная статья  
УДК 579.3  
DOI: [10.34759/trd-2023-129-08](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-08)

## **ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ СО СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ**

**Тант Зин Хейн**

Технологическая академия оборонных служб,  
шоссе Мандалай-Лашио, Область Мандалай, город Пьин Оо Лвин, Мьянма  
[thantzinhein3646@gmail.com](mailto:thantzinhein3646@gmail.com)

*Аннотация.* В работе рассматривается нестационарная задача о воздействии плоской волны давления на сферическую оболочку в упругой среде. Для построения аналитического решения нестационарной задачи дифракции плоской волны давления на сферической полости в упругой среде, подкреплённой тонкой оболочкой, искомые и заданные функции представлены в виде рядов по полиномам Лежандра и Гегенбауэра. Метод решения основан на разложении в ряды по системе собственных функций и применении интегрального преобразования Лапласа по времени. В результате построены аналитические выражения для всех искомым функций, что позволяет исследовать нестационарное напряженно-деформированное состояние и перемещения как на оболочке, так и в любой точке упругой среды.

Проблемы дифракции упругих волн на различного типа неоднородностях относятся к числу наиболее сложных и актуальных задач динамики деформируемых

тел. В прикладном отношении это объясняется тем обстоятельством, что информация о динамическом напряженно-деформированном состоянии в окрестности этих неоднородностей представляет большой интерес для различных целей. Кроме того, наличие неоднородности (включения, полости, выреза, локального изменения свойств и т.д.) является неперенным условием, возникающих в различных областях современной техники. К таким задачам относятся: создание новых конструкций, работающих при динамических нагрузках, разработка новых композитных материалов и внедрение их при создании инженерных сооружений, современные задачи геофизики и сейсмологии, а также ряд других задач научно-технического характера.

**Ключевые слова:** задачи дифракции упругих волн, метод решения собственных функций, сферическая оболочка в упругой среде, динамическое напряженно-деформированное состояние

**Для цитирования:** Тант Зин Хейн. Взаимодействие плоской волны давления со сферической оболочкой в упругой среде // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-08](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-08)

Original article

## **INTERACTION OF A PLANE PRESSURE WAVE WITH A SPHERICAL SHELL IN AN ELASTIC MEDIUM**

**Thant Zin Hein**

Defense Services Technological Academy (DSTA),

Mandalay-Lashio Highway, Mandalay Division, Pyin Oo Lwin, Myanmar

**Abstract.** This article considers the nonstationary problem of a plane pressure wave impact on a spherical shell in an elastic medium. Both desired and prescribed functions are represented in the form of series by the Lejandre and Hegenbauer polynomials to obtain the analytical solution of the non-stationary diffraction problem of the flat pressure wave on the spherical surface in an elastic medium supported by the thin shell. The solution method is based on the expansion into series on the system of eigenfunctions and application of the Laplace integral transformation in time. As the result, analytical expressions were obtained for all desired functions, which allows studying non-stationary strain-stress state and displacements both on the shell and at any point of the elastic medium.

The problems of elastic waves diffraction on various types of heterogeneities relate to the most difficult and up-to-date problems in the dynamics of deformable bodies. In the applied terms, it is explained by the circumstance that the information on the stress-strain state near these irregularities is of great interest for various purposes. Besides, the presence of heterogeneities (inclusions, cavities, notches, local changes in properties, etc.) is an indispensable condition arising in various fields of modern engineering. Such tasks include the following: creation of new structures, working at dynamic loads, development of new composite materials and their introduction at creation of engineering constructions, modern tasks of geophysics and seismology, and also a number of other tasks of scientific and technical character.

**Keywords:** elastic wave diffraction problems, method for solving eigenfunctions, spherical shell in an elastic medium, dynamic stress-strain state

**For citation:** Thant Zin Hein. Interaction of a plane pressure wave with a spherical shell in an elastic medium. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-08](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-08)

## 1. Введение

Задачи дифракций упругих волн на неоднородностях входят в состав классических фундаментальных задач динамики деформируемых тел, а их решение требует привлечения сложного математического аппарата [1–4].

Добавление наполнителей довольно часто применяется для влияния на механические и тепловые характеристики материалов [5–6]. Подобные наполнители добавляются как в изотропные материалы резина, так и в анизотропные композиционные материалы [6–8]. В зависимости от задачи используют металлические частицы [9–11] и не металлические: стеклянные [12–13], каучуковые [15–**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] и других материалов [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**–**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Включение твердых частиц является перспективной технологией проектирования для повышения вязкости разрушения полимерных материалов. Количественная оценка эффекта упрочнения частиц имеет решающее значение для тщательного изучения НДС подобного материала. Существующие работы показали, что увеличение объемной доли частиц и межфазной прочности частиц-матриц может эффективно повысить вязкость разрушения полимерных материалов. Для усиленного полимера с размером с микрон частицами, твердость трещиноватости увеличивает с увеличенным размером частицы. На данный момент существует достаточное

количество численных решений для оценки влияния частиц на статические физико-механические свойства, однако аналитические исследования в области нестационарных задач дифракции в упругой среде чрезвычайно редки.

## 2. Формулировка задачи

В начальный момент времени  $t = 0$  на тонкую упругую сферическую оболочку, погруженную в линейную однородную изотропную упругую среду, падает плоская волна давления  $p_0$ . Фронт волны в начальный момент времени касается поверхности оболочки. До начала взаимодействия оболочка находится в недеформированном состоянии. Геометрия оболочки характеризуется её радиусом  $R$  и толщиной  $h$ .

Для математической постановки задачи используются следующие системы координат: сферическая система координат  $O r \alpha \beta$ , связанная с центром оболочки, и прямоугольная декартова система координат  $O x_1 x_2 x_3$  (рис. 1).

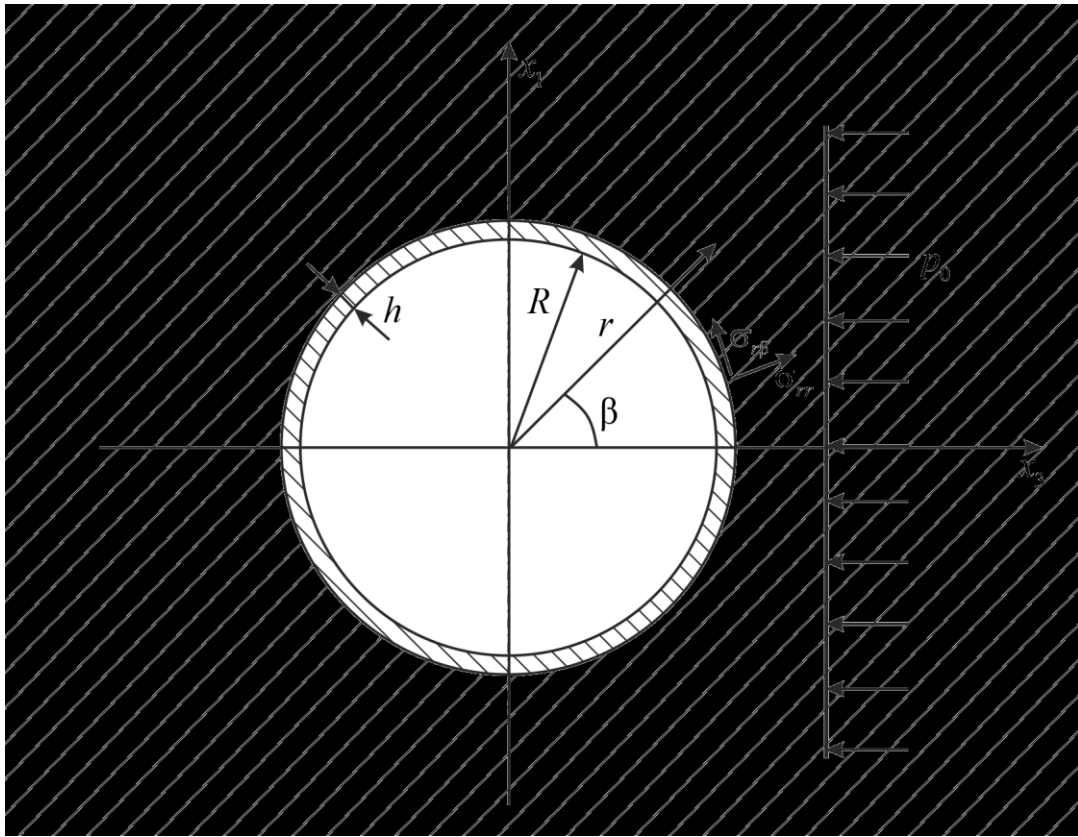


Рис. 1. Постановка задачи.

Далее используем систему безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры)

$$r = \frac{r'}{R}, \varphi = \frac{\varphi'}{R^2}, \psi = \frac{\psi'}{R^2}, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}'}{R}, \tau = \frac{c_* t}{R}, \lambda = \frac{\lambda'}{\lambda_* + 2\mu_*}, \mu = \frac{\mu'}{\lambda_* + 2\mu_*}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\lambda_* + 2\mu_*}, \kappa_1 = \frac{c_1}{c_*}, \kappa_2 = \frac{c_2}{c_*}, d = \frac{d'}{R},$$

где  $c_*$  – характерная скорость,  $\lambda_*$ ,  $\mu_*$  – характерные постоянные Ламе;  $\tau$  – безразмерное время,  $\varphi$  и  $\psi$  – скалярный и ненулевая компонента векторного потенциала упругих смещений,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости упругих волн растяжения-сжатия и сдвига,  $\lambda$ ,  $\mu$  – упругие постоянные Ламе,  $\rho$  – плотность. При этом безразмерный радиус оболочки равен 1.

## Модель движения упругой среды

*Осесимметричное движение в сферической системе координат*

$(\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\beta \mathbf{e}_\beta)$  описывается следующими уравнениями и соотношениями:

– уравнения движения в потенциалах

$$\begin{aligned} \kappa_1^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}, \quad \kappa_2^2 \left( \Delta \psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \beta} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \text{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

– связи перемещений с потенциалами

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \psi \text{ctg} \beta \right), \quad u_\beta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \psi \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad (3)$$

– соотношения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} (u_\beta \text{ctg} \beta + u_r), \\ \varepsilon_{r\beta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_\beta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \beta} - u_\beta \right) \right], \quad \varepsilon_{r\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{\beta\alpha} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

– закон Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\beta\beta} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{\beta\beta}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_{\alpha\alpha}, \\ \sigma_{r\beta} = 2\mu \varepsilon_{r\beta}, \quad \sigma_{r\alpha} = 0, \quad \sigma_{\beta\alpha} = 0, \\ \theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

## Модель осесимметричного движения оболочки

Оболочка радиуса  $R$ , толщиной  $h$ .

*Осесимметричное движение сферической оболочки Тимошенко.*

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \mathbf{w} + \mathbf{p} = \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \tau^2}, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{3 \times 3}, \\ \mathbf{w} = (u, w, \chi)^T, \quad \mathbf{p} = (q, p, 0)^T, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \eta_1^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \eta_2^2 (2 - k^2) - \frac{\eta_1^2}{\sin^2 \beta}, \\
L_{12} &= \left[ 2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2 \right] \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_{13} = -\gamma^2 \eta_1^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \eta_2^2 k^2, \\
L_{21} &= -\left[ 2(\eta_1^2 - \eta_2^2) + \eta_2^2 k^2 \right] \left( \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ctg} \beta \right), \quad L_{22} = \eta_2^2 k^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - 4(\eta_1^2 - \eta_2^2), \\
L_{23} &= \eta_2^2 k^2 \left( \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ctg} \beta \right), \quad L_{31} = \gamma^{-2} L_{13}, \quad L_{32} = -\eta_2^2 k^2 \gamma^{-2} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_{33} = -\gamma^{-2} L_{13}.
\end{aligned}$$

Здесь и далее дополнительно к (1) использованы безразмерные величины ( $c_*$  имеет тот же смысл, что и ранее, штрихом обозначены размерные величины):

$$\begin{aligned}
u &= \frac{u'}{R}, \quad w = \frac{w'}{R}, \quad \eta_1 = \frac{c_{10}}{c_*}, \quad \eta_2 = \frac{c_{20}}{c_*}, \quad c_{10} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}, \\
c_{20} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \quad \gamma^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0 h}, \quad \tilde{p} = \frac{p'}{\lambda_* + 2\mu_*}, \\
q &= \frac{q' \rho R}{\rho_0 h (\lambda_* + 2\mu_*)}, \quad k^2 = \frac{5}{6},
\end{aligned} \tag{7}$$

где  $u$ ,  $w$  и  $\chi$  – тангенциальное, нормальное перемещения оболочки и угол поворота нормального к её срединной поверхности сечения за счёт сдвиговых деформаций,  $c_{10}$ ,  $c_{20}$  – скорости продольных и сдвиговых волн в материале оболочки,  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\rho_0$  – упругие постоянные Ламе и плотность материала оболочки,  $q, p$  – касательная и нормальная составляющие вектора внешней нагрузки.

### Условия контакта оболочки и упругой среды

Условия контакта запишем в обобщенной форме с использованием параметра  $k_c$ . Предельное значение  $k_c = 0$  соответствует условию свободного проскальзывания, а  $k_c = \infty$  – условию жесткого сцепления. Таким образом такая обобщённая запись



позволяет одновременно рассмотреть два случая контакта окружающей среды и оболочки. Случай конечного значения  $k_c$  соответствует «упругому» контакту типа «винклеровского» основания [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_{r=1} + \sigma_{rrs}|_{r=1} &= p, \\ u_r|_{r=1} + u_{rs}|_{r=1} &= w, \\ \sigma_{r\beta}|_{r=1} + \sigma_{r\beta s}|_{r=1} &= q = k_c (u_\beta|_{r=1} + u_{\beta s}|_{r=1} - u_+), \quad u_+ = u - \frac{h}{2}\chi, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $u_+$  – тангенциальное перемещение оболочки на внешней поверхности,  $\sigma_{rrs}$ ,  $\sigma_{r\beta s}$  – нормальные и тангенциальные напряжения в набегающей волне,  $u_{rs}$ ,  $u_{\beta s}$  – нормальные и тангенциальные перемещения в набегающей волне.

На бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) возмущения в упругой среде отсутствуют.

До начала взаимодействия рассматриваемая механическая система находится в покое, что соответствует нулевым начальным условиям

$$\begin{aligned} u|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \chi|_{\tau=0} = \phi|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} &= 0, \\ \dot{u}|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \dot{\chi}|_{\tau=0} = \dot{\phi}|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

Выражения для потенциала в случае плоской волны давления имеет вид [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]:

$$\varphi_s = f(\tau + x_3 - 1)H(\tau + x_3 - 1), \quad x_3 = r \cos \beta, \quad \psi_s = 0, \quad (10)$$

где  $f(\tau)$  – произвольная функция, задающая закон изменения потенциала во времени, например,  $f(\tau) = \tau$  задаёт падающую плоскую ступенчатую волну давления.

Потенциал  $\varphi_s$  в (10) описывает падающую плоскую волну давления, которая движется в отрицательном направлении оси  $Ox_3$  и достигает точки  $x_3 = 1$  в момент времени  $\tau = 0$  (рис. 1).

### Метод решения задачи

Для построения аналитического решения задачи искомые и заданные функции представим в виде рядов по полиномам Лежандра  $P_n(\cos\beta)$  и Гегенбауэра  $C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)$

$$\begin{aligned}
u^L &= -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} u_n^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \quad w^L = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^L(s) P_n(\cos\beta), \\
\chi^L &= -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \quad \varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^L(r, s) P_n(\cos\beta), \\
\psi^L &= -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \quad u_r^L = \sum_{n=0}^{\infty} u_{rn}^L(r, s) P_n(\cos\beta), \\
u_{rs}^L &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{rsn}^L(r, s) P_n(\cos\beta), \quad u_{\beta s}^L = -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} u_{\beta sn}^L(r, s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \\
u_{\beta}^L &= -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} u_{\beta n}^L(r, s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \quad \sigma_{rr}^L = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rrn}^L(r, s) P_n(\cos\beta), \\
\sigma_{rrs}^L &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rrsn}^L(r, s) P_n(\cos\beta), \quad \sigma_{r\beta}^L = -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{r\beta n}^L(r, s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \\
\sigma_{r\beta s}^L &= -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{r\beta sn}^L(r, s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \quad p^L = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^L(s) P_n(\cos\beta), \\
q^L &= -\sin\beta \sum_{n=1}^{\infty} q_n^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta), \quad P_n'(x) = C_{n-1}^{3/2}(x).
\end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (2)-(10) и применяя к полученным соотношениям в коэффициентах интегральное преобразование Лапласа по времени, после некоторых преобразований находим изображения по Лапласу коэффициентов рядов для перемещений и напряжений в упругой среде (знак « $L$ » у функции означает её изображение по Лапласу,  $s$  – параметр интегрального преобразования Лапласа):

$$\begin{aligned}
u_{rn}^L &= u_{rn1}^L e^{-sk_1(r)} + u_{rn2}^L e^{-s[k_1(r)+2]} + u_{rn3}^L e^{-sk_2(r)} + u_{rn4}^L e^{-s[k_2(r)+2]}, \\
u_{\beta n}^L &= u_{\beta n1}^L e^{-sk_1(r)} + u_{\beta n2}^L e^{-s[k_1(r)+2]} + u_{\beta n3}^L e^{-sk_2(r)} + u_{\beta n4}^L e^{-s[k_2(r)+2]}, \\
\sigma_{rrn}^L &= \sigma_{rrn1}^L e^{-sk_1(r)} + \sigma_{rrn2}^L e^{-s[k_1(r)+2]} + \sigma_{rrn3}^L e^{-sk_2(r)} + \sigma_{rrn4}^L e^{-s[k_2(r)+2]}, \\
\sigma_{r\beta n}^L &= \sigma_{r\beta n1}^L e^{-sk_1(r)} + \sigma_{r\beta n2}^L e^{-s[k_1(r)+2]} + \sigma_{r\beta n3}^L e^{-sk_2(r)} + \sigma_{r\beta n4}^L e^{-s[k_2(r)+2]}, \\
k_1(r) &= \kappa_1^{-1}(r-1) > 0, \quad k_2(r) = \kappa_2^{-1}(r-1) > 0, \quad r > 1, \quad \kappa_1^{-1} > 0, \quad \kappa_2^{-1} > 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
u_{rn1}^L &= -\Phi_{1n} \frac{R_{n1}(rs/\kappa_1)}{r^{n+2}}, \quad u_{rn2}^L = -\Phi_{2n} \frac{R_{n1}(rs/\kappa_1)}{r^{n+2}}, \\
u_{rn3}^L &= -n(n+1)\Phi_{3n} \frac{R_{n0}(rs/\kappa_2)}{r^{n+2}}, \quad u_{rn4}^L = -n(n+1)\Phi_{4n} \frac{R_{n0}(rs/\kappa_2)}{r^{n+2}},
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
u_{\beta n1}^L &= \Phi_{1n} \frac{R_{n0}(rs/\kappa_1)}{r^{n+2}}, \quad u_{\beta n2}^L = \Phi_{2n} \frac{R_{n0}(rs/\kappa_1)}{r^{n+2}}, \\
u_{\beta n3}^L &= \Phi_{3n} \frac{R_{n5}(rs/\kappa_2)}{r^{n+2}}, \quad u_{\beta n4}^L = \Phi_{4n} \frac{R_{n5}(rs/\kappa_2)}{r^{n+2}},
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rrn1}^L &= (\lambda + 2\mu)\Phi_{1n} \frac{R_{n3}(rs/\kappa_1)}{r^{n+3}}, \quad \sigma_{rrn2}^L = (\lambda + 2\mu)\Phi_{2n} \frac{R_{n3}(rs/\kappa_1)}{r^{n+3}}, \\
\sigma_{rrn3}^L &= \frac{1-\eta}{2}(\lambda + 2\mu)n(n+1)\Phi_{3n} \frac{R_{n4}(rs/\kappa_2)}{r^{n+3}}, \\
\sigma_{rrn4}^L &= \frac{1-\eta}{2}(\lambda + 2\mu)n(n+1)\Phi_{4n} \frac{R_{n4}(rs/\kappa_2)}{r^{n+3}},
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\beta n1}^L &= -\mu\Phi_{1n} \frac{R_{n4}(rs/\kappa_1)}{r^{n+3}}, \quad \sigma_{r\beta n2}^L = -\mu\Phi_{2n} \frac{R_{n4}(rs/\kappa_1)}{r^{n+3}}, \\
\sigma_{r\beta n3}^L &= -\mu\Phi_{3n} \frac{R_{n2}(rs/\kappa_2) + (n+2)(n-1)R_{n0}(rs/\kappa_2)}{r^{n+3}}, \\
\sigma_{r\beta n4}^L &= -\mu\Phi_{4n} \frac{R_{n2}(rs/\kappa_2) + (n+2)(n-1)R_{n0}(rs/\kappa_2)}{r^{n+3}},
\end{aligned} \tag{16}$$

$$R_{n0}(s) = \sum_{k=0}^n A_{nk} s^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{2^k k!(n-k)!},$$

$$R_{n1}(s) = R_{n+1,0}(s) - nR_{n0}(s),$$

$$R_{n2}(s) = R_{n+2,0}(s) - (2n+1)R_{n+1,0}(s) + n(n-1)R_{n0}(s),$$

$$\begin{aligned}
R_{n3}(s) &= R_{n2}(s) - 2\eta R_{n1}(s) - \eta n(n+1)R_{n0}(s), \\
R_{n4}(s) &= R_{n+1,0}(s) + R_{n1}(s) - (n-2)R_{n0}(s) = 2[R_{n1}(s) + R_{n0}(s)], \\
R_{n5}(s) &= R_{n1}(s) - R_{n0}(s) = R_{n+1,0}(s) - (n+1)R_{n0}(s), \\
\Phi_{1n} &= \frac{b_{11n}a_{22n} - b_{21n}a_{12n}}{a_{11n}a_{22n} - a_{12n}a_{21n}}, \quad \Phi_{2n} = \frac{b_{12n}a_{22n} - b_{22n}a_{12n}}{a_{11n}a_{22n} - a_{12n}a_{21n}}, \\
\Phi_{3n} &= \frac{b_{21n}a_{11n} - b_{11n}a_{21n}}{a_{11n}a_{22n} - a_{12n}a_{21n}}, \quad \Phi_{4n} = \frac{b_{22n}a_{11n} - b_{12n}a_{21n}}{a_{11n}a_{22n} - a_{12n}a_{21n}}.
\end{aligned}$$

### Построение оригиналов и анализ результатов

Отметим, что с учётом теоремы запаздывания для преобразования Лапласа для нахождения оригиналов слагаемых в правых частях выражений (12) достаточно найти оригиналы функций (13)-(16). Все эти функции являются рациональными, степень знаменателя у которых выше степени числителя. Поэтому их оригиналы вычисляются аналитически с помощью вычетов.

В качестве примера рассмотрим задачу о распространении плоской ступенчатой волны давления с потенциалом вида (10) при  $f(\tau) = \tau$ . Материал полупространства – сталь, а оболочки – медь. В качестве характерных упругих постоянных приняты упругие параметры Ламе материала полупространства. Соответствующие безразмерные параметры имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= 1, \quad \kappa_2 = 0.53, \quad \lambda = 0.43, \quad \mu = 0.29, \quad k = 0.91, \\
\gamma &= 2 \cdot 10^{-4}, \quad \eta_1 = 0.8, \quad \eta_2 = 0.73, \quad h = 0.05.
\end{aligned}$$

На рис. 2 изображены зависимости от времени радиальных напряжений  $\sigma_{rr}(r, \beta, \tau)$  и радиальных перемещений  $u_r(r, \beta, \tau)$  в точке с координатами  $r=1, \beta=0$ . Сплошная кривая соответствует напряжениям, штриховая – перемещениям.

Зависимости от времени меридиональных напряжений  $\sigma_{r\beta}(r, \beta, \tau)$  и перемещений  $u_\beta(r, \beta, \tau)$  в точке с координатами  $r=1, \beta = \pi/2$  представлены на рис. 3.

Сплошная кривая соответствует напряжениям, штриховая – перемещениям.

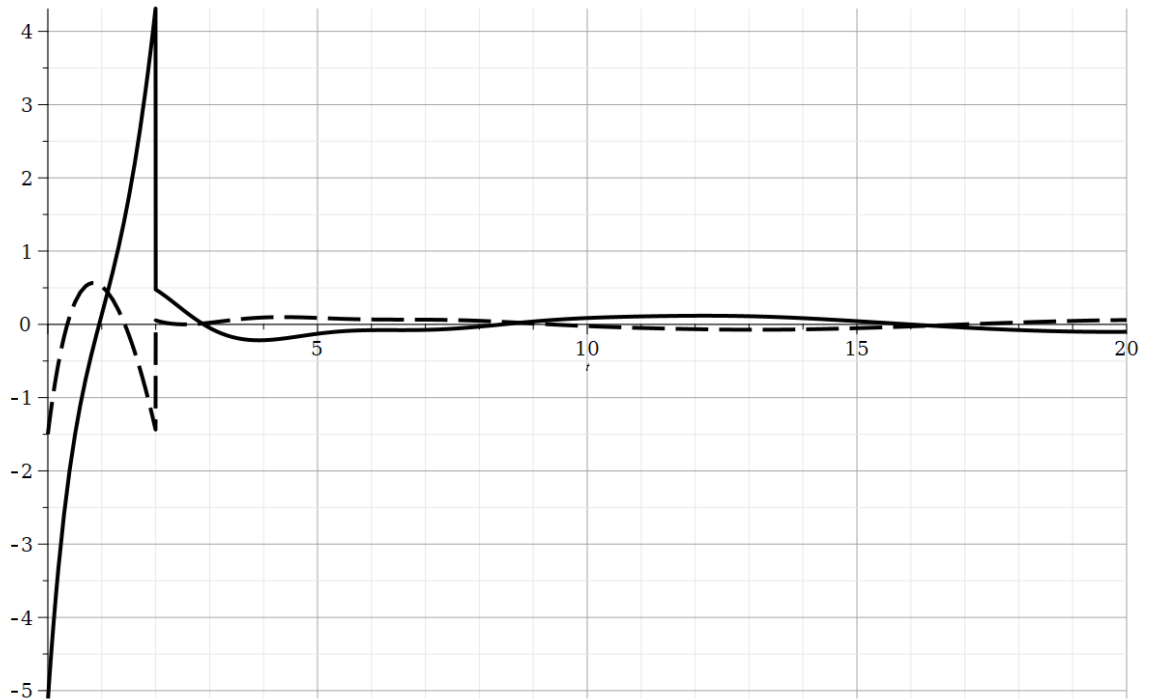


Рис. 2. Зависимости от времени радиальных напряжений  $\sigma_{rr}(r, \beta, \tau)$  и радиальных перемещений  $u_r(r, \beta, \tau)$  в точке с координатами  $r=1, \beta = 0$ .

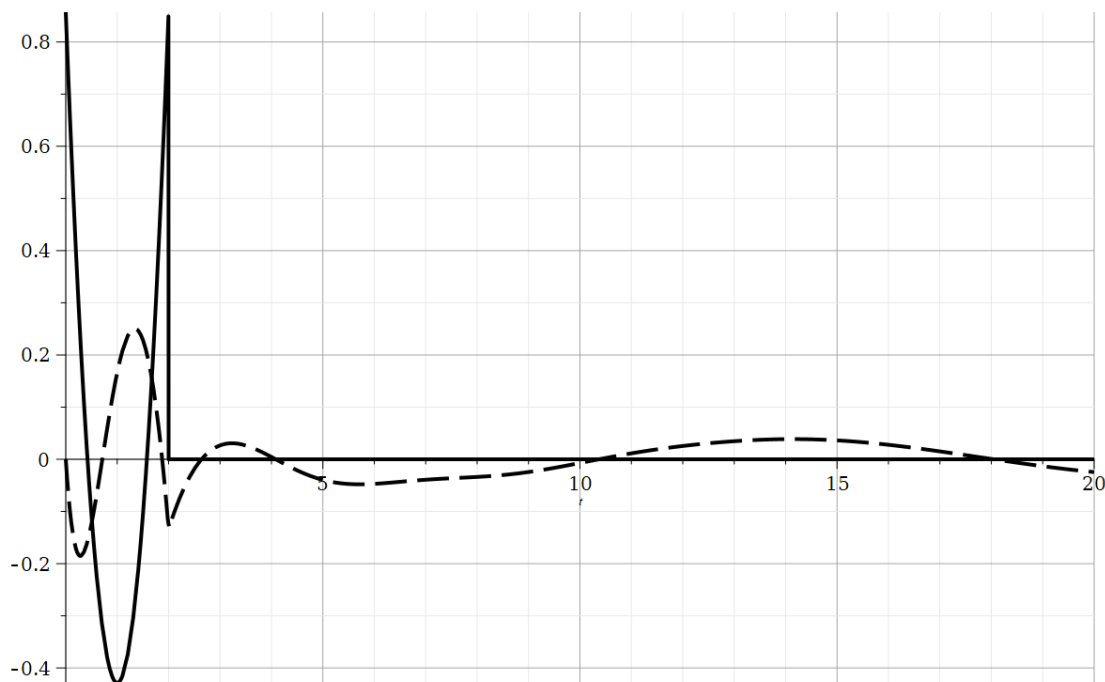


Рис. 3. Зависимости от времени меридиональных напряжений  $\sigma_{r\beta}(r, \beta, \tau)$  и перемещений  $u_{\beta}(r, \beta, \tau)$  в точке с координатами  $r=1, \beta = \pi/2$ .

### Заключение

Приведена математическая постановка и получено аналитическое решение нестационарной задачи дифракции плоской волны давления на сферической полости в упругой среде, подкреплённой тонкой оболочкой. Метод решения основан на разложении в ряды по системе собственных функций и применении интегрального преобразования по времени. В результате построены аналитические выражения для всех искомых функций, что позволяет исследовать нестационарное напряженно-деформированное состояние и перемещения как на оболочке, так и в любой точке упругой среды.

## Список источников

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990. – 260 с.
2. Макаревский Д.И., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. Волны в анизотропной пластине Тимошенко большой протяженности // Механика композиционных материалов и конструкций. 2023. Т. 29. № 1. С. 54-68
3. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д., Федотенков Г.В., Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161423>. DOI:10.34759/trd-2021-120-09.
4. Фирсанов В.В., Фам В.Т., Чан Н.Д. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118893>. DOI:10.34759/trd-2020-114-07
5. Fiedler T., Löffler R., Bernthaler T., Winkler R., Belova I.V., Murch Graeme. Numerical analyses of the thermal conductivity of random hollow sphere structures // Materials Letters, 2009, vol. 63, pp. 1125-1127. DOI:10.1016/j.matlet.2008.10.030.1
6. Zhu B.L., Zheng H., Wang J., Ma Jeffery, Wu Jun, Wu Rongguang. Tailoring of thermal and dielectric properties of LDPE-matrix composites by the volume fraction, density, and surface modification of hollow glass microsphere filler // Composites Part B: Engineering, 2014, vol. 58, pp. 91–102. DOI:10.1016/j.compositesb.2013.10.029

7. Аристова Е.Ю., Денисова В.А., Дрожжин В.С., Куваев М.Д. и др. Композиционные материалы с использованием полых микросфер // Авиационные материалы и технологии. 2018. № 1 (50). С. 52-57. DOI:10.18577/2071-9140-2018-0-1-52-57
8. Кривень Г.И. Оценка демпфирующих свойств композитов // Труды МАИ. 2022. № 127. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=170333>. DOI:10.34759/trd-2022-127-05
9. Garnier Bertrand, Boudenne Abderrahim. Use of hollow metallic particles for the thermal conductivity enhancement and lightening of filled polymer // Polymer Degradation and Stability, 2016, vol. 127, pp. 113-118. DOI:10.1016/j.polymdegradstab.2015.11.026
10. Seyed Mohammad Hossein Hosseini, Markus Merkel, Andreas Öchsner. Influence of the joint shape on the uniaxial mechanical properties of non-homogeneous bonded perforated hollow sphere structures. Computational Materials Science, 2012, vol. 58, pp. 183-187. DOI:58.183-187. 10.1016/j.commatsci.2012.01.024.
11. Andreas Öchsner, Thomas Fiedler, Christian Augustin. Metallic hollow spherical structures multifunctional materials for lightweight applications: types, properties and case studies, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009. DOI:10.1007/978-3-642-00491-9
12. Bhagyashekar M S, Rao R.M.V.G.K. Characterization of Mechanical Behavior of Metallic and Non-metallic Particulate Filled Epoxy Matrix Composites // Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2010, vol. 29, pp. 30-42. DOI:10.1177/0731684408095034.
13. Bhagyashekar M.S., Rao Kavaitha, Rao R.M.V.G.K. Studies on Rheological and Physical Properties of Metallic and Non-metallic Particulate Filled Epoxy Composites //



- Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2009, vol. 28. pp. 2869-2878.  
DOI:10.1177/0731684408093976
14. Georgarakis Konstantinos, Dudina Dina, Kvashnin Vyacheslav. Metallic Glass-Reinforced Metal Matrix Composites: Design, Interfaces and Properties // Materials, 2022, vol. 15, pp. 8278. DOI:10.3390/ma15238278
  15. Hu Yan, Mei Riguo, An Zhenguo, Zhang Jingjie. Silicon rubber/hollow glass microsphere composites: Influence of broken hollow glass microsphere on mechanical and thermal insulation property // Composites Science and Technology, 2013, vol. 79, pp. 64–69. DOI:10.1016/j.compscitech.2013.02.015
  16. Chen Shuisheng, Qin Yan, Song Jiuqiang, Wang Bo. The effect of hollow glass microspheres on the properties of high silica glass fiber fabric/liquid silicone rubber composite sheet // Polimery, 2018, vol. 63, pp. 178-184. DOI: 10.14314/polimery.2018.3.2
  17. Yuan Y., Diao S., Zhao C. et al. Preparation of Hollow Glass Microsphere/Organic Silicone Resin Composite Material with Low Dielectric Constant by In-Situ Polymerization // Silicon, 2020, vol. 12, pp. 1417–1423. URL: <https://doi.org/10.1007/s12633-019-00234-1>.
  18. Sanusi Olawale, Oyinlola Adeyinka, Akindapo Jacob. Influence of Wood Ash on the Mechanical Properties of Polymer Matrix Composite Developed from Fibre Glass and Epoxy Resin // International Journal of Engineering Research & Technology, 2013, vol. 2. pp. 344-352. URL: <https://doi.org/10.1007/s12633-019-00234-1>
  19. Sanusi Olawale, Komolafe Olufemi, Ogundana Tunde, Olaleke Mesach, Sanni Yunusa. Development of Wood-Ash/Resin Polymer Matrix Composite for Body Armour

- Application // FUOYE Journal of Engineering and Technology, 2016, vol.1, no. 1, pp. 10-14. URL: <https://doi.org/10.46792/fuoyejt.v1i1.4>
20. Dehrooyeh Saman, Vaseghi Majid, Sohrabian Majid, Sameezadeh Mahmood. Glass fiber/Carbon nanotube/Epoxy hybrid composites: Achieving superior mechanical properties // *Mechanics of Materials*, 2021, vol. 161, pp. 104025. DOI:10.1016/j.mechmat.2021.104025.

## References

1. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. *Nestatsionarnaya aerogidrouprugost' tel sfericheskoi formy* (Unsteady aero-hydroelasticity of spherical bodies), Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1990, 260 p.
2. Makarevskii D.I., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 54-68.
3. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D., Fedotenkov G.V., *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161423>. DOI:10.34759/trd-2021-120-09.
4. Firsanov V.V., Fam V.T., Chan N.D. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118893>. DOI:10.34759/trd-2020-114-07
5. Fiedler T., Löffler R., Bernthaler T., Winkler R., Belova I.V., Murch Graeme. Numerical analyses of the thermal conductivity of random hollow sphere structures, *Materials Letters*, 2009, vol. 63, pp. 1125-1127. DOI:10.1016/j.matlet.2008.10.030.1
6. Zhu B.L., Zheng H., Wang J., Ma Jeffery, Wu Jun, Wu Rongguang. Tailoring of thermal and dielectric properties of LDPE-matrix composites by the volume fraction, density, and

- surface modification of hollow glass microsphere filler, *Composites Part B: Engineering*, 2014, vol. 58, pp. 91–102. DOI:10.1016/j.compositesb.2013.10.029
7. Aristova E.Yu., Denisova V.A., Drozhzhin V.S., Kuvaev M.D. et al. *Aviatsionnye materialy i tekhnologii*, 2018, no. 1 (50), pp. 52-57. DOI:10.18577/2071-9140-2018-0-1-52-57
8. Kriven' G.I. *Trudy MAI*, 2022, no. 127. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=170333>. DOI:10.34759/trd-2022-127-05
9. Garnier Bertrand, Boudenne Abderrahim. Use of hollow metallic particles for the thermal conductivity enhancement and lightening of filled polymer, *Polymer Degradation and Stability*, 2016, vol. 127, pp. 113-118. DOI:10.1016/j.polymdegradstab.2015.11.026
10. Seyed Mohammad Hossein Hosseini, Markus Merkel, Andreas Öchsner. Influence of the joint shape on the uniaxial mechanical properties of non-homogeneous bonded perforated hollow sphere structures, *Computational Materials Science*, 2012, vol. 58, pp. 183-187. DOI:58.183-187. 10.1016/j.commatsci.2012.01.024
11. Andreas Öchsner, Thomas Fiedler, Christian Augustin. *Metallic hollow spherical structures multifunctional materials for lightweight applications: types, properties and case studies*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009. DOI:10.1007/978-3-642-00491-9
12. Bhagyashekar M S, Rao R.M.V.G.K. Characterization of Mechanical Behavior of Metallic and Non-metallic Particulate Filled Epoxy Matrix Composites, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2010, vol. 29, pp. 30-42. DOI:10.1177/0731684408095034
13. Bhagyashekar M.S, Rao Kavaitha, Rao R.M.V.G.K. Studies on Rheological and Physical Properties of Metallic and Non-metallic Particulate Filled Epoxy Composites,

- Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2009, vol. 28, pp. 2869-2878.  
DOI:10.1177/0731684408093976
14. Georgarakis Konstantinos, Dudina Dina, Kvashnin Vyacheslav. Metallic Glass-Reinforced Metal Matrix Composites: Design, Interfaces and Properties, *Materials*, 2022, vol. 15, pp. 8278. DOI:10.3390/ma15238278
15. Hu Yan, Mei Riguo, An Zhenguo, Zhang Jingjie. Silicon rubber/hollow glass microsphere composites: Influence of broken hollow glass microsphere on mechanical and thermal insulation property, *Composites Science and Technology*, 2013, vol.79, pp. 64–69. DOI:10.1016/j.compscitech.2013.02.015
16. Chen Shuisheng, Qin Yan, Song Jiuqiang, Wang Bo. The effect of hollow glass microspheres on the properties of high silica glass fiber fabric/liquid silicone rubber composite sheet, *Polimery*, 2018, vol. 63, pp.178-184. DOI: 10.14314/polimery.2018.3.2
17. Yuan Y., Diao S., Zhao C. et al. Preparation of Hollow Glass Microsphere/Organic Silicone Resin Composite Material with Low Dielectric Constant by In-Situ Polymerization, *Silicon*, 2020, vol. 12, pp. 1417–1423. URL: <https://doi.org/10.1007/s12633-019-00234-1>
18. Sanusi Olawale, Oyinlola Adeyinka, Akindapo Jacob. Influence of Wood Ash on the Mechanical Properties of Polymer Matrix Composite Developed from Fibre Glass and Epoxy Resin, *International Journal of Engineering Research & Technology*, 2013, vol. 2. pp. 344-352. URL: <https://doi.org/10.1007/s12633-019-00234-1>
19. Sanusi Olawale, Komolafe Olufemi, Ogundana Tunde, Olaleke Mesach, Sanni Yunusa. Development of Wood,sh/Resin Polymer Matrix Composite for Body Armour Application, *FUOYE Journal of Engineering and Technology*, 2016, vol.1, no 1, pp. 10-14. URL: <https://doi.org/10.46792/fuoyejet.v1i1.4>

20. Dehrooyeh Saman, Vaseghi Majid, Sohrabian Majid, Sameezadeh Mahmood. Glass fiber/Carbon nanotube/Epoxy hybrid composites: Achieving superior mechanical properties, *Mechanics of Materials*, 2021, vol. 161, pp. 104025. DOI:10.1016/j.mechmat.2021.104025

Статья поступила в редакцию 01.04.2023

Одобрена после рецензирования 04.04.2023

Принята к публикации 27.04.2023

The article was submitted on 01.04.2023; approved after reviewing on 04.04.2023; accepted for publication on 27.04.2023