УДК 519.872

Моделирование авиационных систем обслуживания неделимых групповых заявок

В. А. Болдинов, А.В. Коршунов, А. А. Скрынников, А. Ю. Федотов

Аннотация

В работе рассматривается многоканальная система массового обслуживания простого группового потока требований с экспоненциально распределённым временем обслуживания групп и с очередью неограниченной длины. Исследуемая система обладает отличительной особенностью: требования поступают на обслуживание и обслуживаются в составе групп; по окончании обслуживания все требования группы одновременно покидают систему. Для частного случая – двухканальной системы массового обслуживания одиночных и парных заявок – приводятся размеченный граф состояний и система дифференциальных уравнений. Рассматривается установившийся режим функционирования системы. Описывается процедура получения системы уравнений равновесия в терминах производящих функций, нахождение решения которой предполагается осуществлять численно. Полученные результаты могут быть использованы для осуществления вероятностного анализа авиационных систем.

Ключевые слова

система массового обслуживания, неделимые групповые заявки, простой групповой поток, групповое обслуживание, граф состояний, система уравнений равновесия, производящая функция.

Введение

Несмотря на бурное развитие теории массового обслуживания остаются реальные системы, для описания процесса функционирования которых не находится соответствующих математических моделей. Примером может служить автопарк авиационной базы, где в качестве каналов обслуживания выступают грузовые автомобили, а под потоком событий понимается поток заявок на перевозку грузов. В таком случае из входного потока можно выделить поток заявок, для выполнения которых необходимо отправить в рейс одну, две, три и т. д. машин. Помимо этого для рассматриваемого примера характерно, что машины, покидающие базу в составе колонн, по выполнении заказа возвращаются в автопарк тем же составом, что и уезжали. Если в момент поступления очередной заявки все машины в отъезде или число машин, находящихся в автопарке, меньше требуемого, то заявка встаёт в очередь и ждёт освобождения недостающего количества автомобилей.

Математической модели СМО, соответствующей рассмотренному примеру, в современной литературе не приводится, а потребность анализа функционирования подобных авиационных систем реально существует, поэтому очевидной становится необходимость в разработке такой модели.

Формализация задачи

Определим неординарный (групповой) поток требований. Пусть в случайные моменты времени t_i, $t_i < t_{i+1}$, $i = \overline{1, \infty}$ в СМО поступают заявки, при этом каждая заявка состоит из случайного числа требований η_i с известным распределением $f_k = P(\eta_i = k)$. Последовательности $\{t_i\}$ и $\{\eta_i\}$ взаимно независимы. Интервалы времени $T_i = t_i - t_{i-1}$, $t_0 = 0$ между поступлениями групповых заявок распределены по одному и тому же закону $A(t) = P(T_i < t)$.

Поступление заказов на перевозку грузов моделируется неординарным потоком требований, при этом число необходимых для выполнения заказа автомобилей соответствует числу требований в составе заявки.

Автопарк авиационной базы соответствует n-канальной СМО, на вход которой поступает неординарный поток требований, причём при поступлении заявок на обслуживание не допускается их разделение на отдельные требования или групповые заявки меньшего размера – все требования заявки обслуживаются одновременно и по окончании обслуживания одновременно покидают систему. Эта особенность позволяет выделить из всех СМО групповых заявок некоторый класс систем – СМО неделимых групповых заявок. Если в момент поступления очередной заявки имеется достаточное число свободных каналов, то заявка принимается на обслуживание, в противном случае она становится в очередь, где ожидает освобождения недостающих каналов обслуживания [1].

Время обслуживания заявки размера k – экспоненциально распределённая случайная величина ξ_k с параметром μ_k

$$B_k(t) = P(\xi_k < t) = 1 - e^{-\mu_k t}.$$

Предполагается следующая дисциплина обслуживания: из очереди поступают заявки, имеющие в своём составе наибольшее число требований, что соответствует реальной ситуации, когда в автопарке предпочтение отдаётся выполнению заказа максимального объёма – больший приоритет имеют заявки бóльшего размера.

Двухканальная СМО с простым групповым потоком на входе

Рассмотрим простейший случай – двухканальную СМО, на вход которой поступает простой групповой поток требований [2], состоящий из одиночных и парных заявок. В таком потоке интервалы времени между приходами заявок распределены по экспоненциальному закону с параметром λ

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Тогда функционирование системы определяет набор следующих параметров: λ, f_1, f_2, μ_1, μ_2, значения которых предполагаются известны.

Известно [2], что простой групповой поток требований можно разложить на сумму потоков, для которых в каждой заявке находится по k требований. Причём каждый из этих потоков заявок является простейшим и имеет интенсивность $\lambda_k = \lambda f_k$.

Очевидно, что для предсказания поведения рассматриваемой СМО в вероятностном смысле необходимо знать, сколько одиночных и парных заявок находится в системе и сколько одиночных и парных заявок находится в очереди. Достаточность этой информации обусловливается простейшим характером потоков поступления заявок фиксированного размера и потоков их обслуживаний. В связи с этим за состояние системы следует принять вектор

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

где α, β – количество соответственно парных и одиночных заявок на обслуживании; γ, δ – число соответственно парных и одиночных заявок в очереди.

В таком случае процесс смены состояний СМО во времени $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)_t$ образует марковский векторный процесс [3] с непрерывным временем, первые две компоненты которого принадлежат конечному множеству, а вторые две – счётному. Данный класс случайных процессов описывается системой дифференциальных уравнений.

Система уравнений равновесия

Наглядным представлением процесса функционирования СМО служит размеченный граф состояний [4], на котором состояния системы изображаются вершинами (овал с вписанным в него номером состояния), а пути возможных переходов – дугами (направленными рёбрами).

Рассматриваемой СМО соответствует граф, представленный на рисунке 1. С его помощью разобьём множество состояний системы Ω на минимальное число непересекающихся подмножеств (классов) Ω_h так, чтобы дифференциальные уравнения, соответствующие состояниям каждого класса, можно было представить в виде одного дифференциально-разностного уравнения:

$$\bigcup_{h=1}^{11}\Omega_h=\Omega\text{; }\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing\ \left(i,\ j=\overline{1,11}:i\neq j\right).$$

Разбиение на классы представлено на рисунке 1.

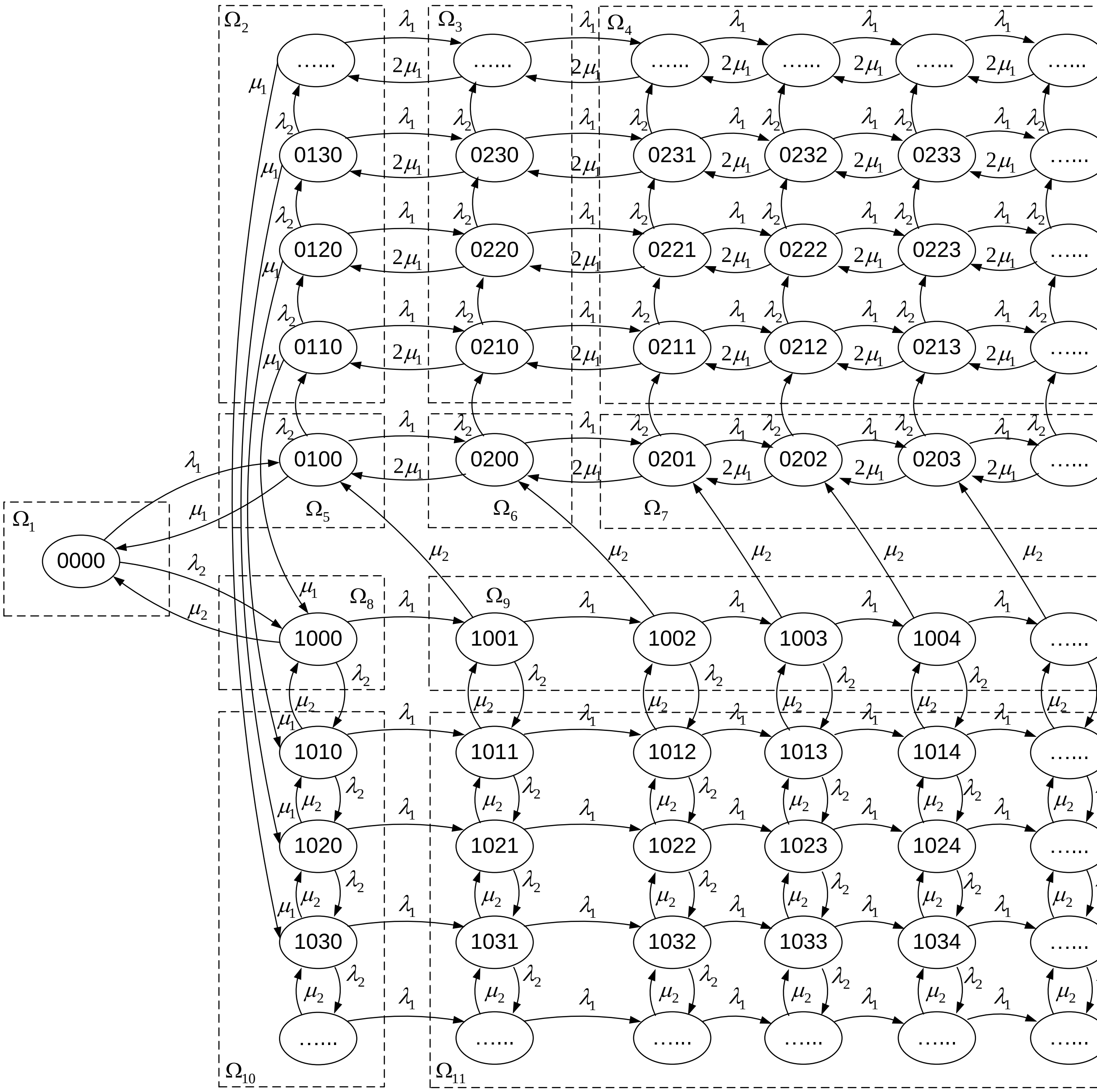

Рисунок 1 – Размеченный граф состояний двухканальной СМО

Введём обозначение для вероятности того, что случайный вектор $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)_t$ в фиксированный момент времени t примет значение (a,b,i,j)

$$p_{abij}(t) = P\left[\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta\right)_t = \left(a,b,i,j\right)\right].$$

Тогда система дифференциальных уравнений (СДУ) Колмогорова – Чепмена, описывающих процесс функционирования СМО, примет вид:

$$\frac{dp_{0000}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2)\,p_{0000}(t) + \mu_1 p_{0100}(t) + \mu_2 p_{1000}(t);$$

$$\frac{dp_{01i0}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\,p_{01i0}(t) + \lambda_2 p_{01i-10}(t) + 2\mu_1 p_{02i0}(t) \quad \left(i=\overline{1,\infty}\right);$$

$$\frac{dp_{02i0}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\,p_{02i0}(t) + \lambda_1 p_{01i0}(t) + \lambda_2 p_{02i-10}(t) + 2\mu_1 p_{02i1}(t)$$

$$\left(i=\overline{1,\infty}\right);$$

$$\frac{dp_{02ij}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\,p_{02ij}(t) + \lambda_1 p_{02ij-1}(t) + \lambda_2 p_{02i-1j}(t) + 2\mu_1 p_{02ij+1}(t)$$

$$\left(i=\overline{1,\infty},\ j=\overline{1,\infty}\right);$$

$$\frac{dp_{0100}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\,p_{0100}(t) + \lambda_1 p_{0000}(t) + 2\mu_1 p_{0200}(t) + \mu_2 p_{1001}(t);$$

$$\frac{dp_{0200}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\,p_{0200}(t) + \lambda_1 p_{0100}(t) + 2\mu_1 p_{0201}(t) + \mu_2 p_{1002}(t);$$

$$\frac{dp_{020j}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\,p_{020j}(t) + \lambda_1 p_{020j-1}(t) + 2\mu_1 p_{020j+1}(t) + \mu_2 p_{100j+2}(t)$$

$$\left(j=\overline{1,\infty}\right);$$

$$\frac{dp_{1000}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\,p_{1000}(t) + \lambda_2 p_{0000}(t) + \mu_1 p_{0110}(t) + \mu_2 p_{1010}(t);$$

$$\frac{dp_{100j}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\,p_{100j}(t) + \lambda_1 p_{100j-1}(t) + \mu_2 p_{101j}(t) \quad \left(j=\overline{1,\infty}\right);$$

$$\frac{dp_{10i0}(t)}{dt} = -(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\,p_{10i0}(t) + \lambda_2 p_{10i-10}(t) + \mu_2 p_{10i+10}(t) + \mu_1 p_{01i+10}(t)$$

$$\left(i=\overline{1,\infty}\right);$$

$$\frac{dp_{10ij}(t)}{dt}=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)p_{10ij}(t)+\lambda_1 p_{10ij-1}(t)+\lambda_2 p_{10i-1j}(t)+\mu_2 p_{10i+1j}(t)$$

$$\left(i=\overline{1,\infty},\ j=\overline{1,\infty}\right).$$

Для решения СДУ необходимо задать начальные условия: $p_{abij}(0)$.

Рассмотрим стационарный режим функционирования системы при $t\to\infty$ (вопрос об условиях его существования вынесем за рамки данной работы). В таком случае вероятности состояний не будут зависеть от времени и производные в левых частях уравнений следует положить равными нулю. Полученная система уравнений будет вырожденной, поэтому для её решения необходимо произвольное уравнение заменить нормирующим условием

$$p_{0000}+\sum_i p_{01i0}+\sum_{(i,\ j)} p_{02ij}+\sum_{(i,\ j)} p_{10ij}=1 .$$

Для решения полученной системы линейных алгебраически-разностных уравнений воспользуемся аппаратом производящих функций. Примем следующие обозначения:

$$Z(a,b,z,j)=\sum_{i=0}^{\infty} p_{abij}z^i;\quad U(a,b,i,u)=\sum_{j=0}^{\infty} p_{abij}u^j;$$

$$G(a,b,z,u)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} p_{abij}z^i u^j=\sum_{j=0}^{\infty} Z(a,b,z,j)u^j=\sum_{i=0}^{\infty} U(a,b,i,u)z^i .$$

Можно показать, что исходной системе бесконечного числа алгебраических уравнений для стационарного режима функционирования СМО эквивалентна следующая система одиннадцати функциональных уравнений относительно производящих функций

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2)p_{0000}+\mu_1 p_{0100}+\mu_2 p_{1000};$$

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\left[Z(0,1,z,0)-p_{0100}\right]+z\lambda_2 Z(0,1,z,0)+$$
$$+2\mu_1\left[Z(0,2,z,0)-p_{0200}\right];$$

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\left[Z(0,2,z,0)-p_{0200}\right]+\lambda_1\left[Z(0,1,z,0)-p_{0100}\right]+$$
$$+z\lambda_2 Z(0,2,z,0)+2\mu_1\left[Z(0,2,z,1)-p_{0201}\right];$$

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\left[G(0,2,z,u)-Z(0,2,z,0)+U(0,2,0,u)-p_{0200}\right]+$$
$$+u\lambda_1\left[G(0,2,z,u)-U(0,2,0,u)\right]+z\lambda_2\left[G(0,2,z,u)-Z(0,2,z,0)\right]+$$
$$+2\frac{\mu_1}{u}\left[G(0,2,z,u)-Z(0,2,z,1)u-Z(0,2,z,0)-U(0,2,0,u)+p_{0201}u+p_{0200}\right];$$

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)p_{0100}+\lambda_1 p_{0000}+2\mu_1 p_{0200}+\mu_2 p_{1001};$$

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)p_{0200}+\lambda_1 p_{0100}+2\mu_1 p_{0201}+\mu_2 p_{1002};$$

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+2\mu_1)\left[U(0,2,0,u)-p_{0200}\right]+u\lambda_1 U(0,2,0,u)+$$
$$+2\frac{\mu_1}{u}\left[U(0,2,0,u)-p_{0201}u-p_{0200}\right]+$$
$$+\frac{\mu_2}{u^2}\left[U(1,0,0,u)-p_{1002}u^2-p_{1001}u-p_{1000}\right];$$

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)p_{1000}+\lambda_2 p_{0000}+\mu_1 p_{0110}+\mu_2 p_{1010};$$

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\left[U(1,0,0,u)-p_{1000}\right]+u\lambda_1 U(1,0,0,u)+\mu_2\left[U(1,0,1,u)-p_{1010}\right]$$
;

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\left[Z(1,0,z,0)-p_{1000}\right]+z\lambda_2 Z(1,0,z,0)+$$
$$+\frac{\mu_2}{z}\left[Z(1,0,z,0)-p_{1010}z-p_{1000}\right]+\frac{\mu_1}{z}\left[Z(0,1,z,0)-p_{0110}z-p_{0100}\right];$$

$$0=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\left[G(1,0,z,u)-Z(1,0,z,0)-U(1,0,0,u)+p_{1000}\right]+$$
$$+u\lambda_1\left[G(1,0,z,u)-U(1,0,0,u)\right]+z\lambda_2\left[G(1,0,z,u)-Z(1,0,z,0)\right]+$$
$$+\frac{\mu_2}{z}\left[G(1,0,z,u)-Z(1,0,z,0)-zU(1,0,1,u)+p_{1010}-U(1,0,0,u)+p_{1000}\right].$$

Условие нормировки в терминах производящих функций примет вид

$$p_{0000}+G(0,2,1,1)+G(1,0,1,1)+Z(0,1,1,0)=1.$$

Проведённые эквивалентные преобразования позволили перейти от бесконечного числа линейных алгебраических уравнений относительно вероятностей к системе одиннадцати линейных функциональных уравнений относительно их производящих функций. Решение полученной системы производится численно с использованием ЭВМ. Искомые вероятности связаны с производящими функциями обратным преобразованием

$$p_{01i0} = \left.\frac{d^i Z(0,1,z,0)}{i!dz^i}\right|_{z=0};$$

$$p_{02ij} = \left.\frac{\partial^j \partial^i G(0,2,z,u)}{j!i!\partial z^i \partial u^j}\right|_{\substack{z=0\\u=0}};$$

$$p_{10ij} = \left.\frac{\partial^j \partial^i G(1,0,z,u)}{j!i!\partial z^i \partial u^j}\right|_{\substack{z=0\\u=0}}.$$

Выводы

Таким образом, разработана математическая модель СМО с простым групповым потоком на входе, позволяющая производить вероятностный анализ авиационных систем, например такой, как автопарк авиационной базы. Полученная модель представляет собой систему одиннадцати уравнений относительно производящих функций, решение которой и обратный переход в пространство оригиналов даёт искомые вероятности состояний. Существующая модель системы типа M/M/n [5] является частным случаем разработанной. Так, если положить $f_1 = 1$, то простой групповой поток вырождается в простейший, а рассматриваемая СМО преобразуется в классическую многоканальную СМО с неограниченным числом мест в очереди. Полученная модель может быть легко обобщена на случай произвольного числа каналов обслуживания и произвольных характеристик простого группового потока на входе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-08-00555-а).

Пристатейный библиографический список

1. Монсик В. Б., Скрынников А. А., Федотов А. Ю. Показатели эффективности функционирования системы массового обслуживания с неординарным входным потоком заявок в нестационарном режиме работы // Науч. Вестн. МГТУ ГА. – 2009. – №145. – С. 113–118.
2. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
3. Бочаров П. П., Печенкин А. В. Теория массового обслуживания: Учебник. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
4. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.
5. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

Сведения об авторах

Болдинов Виктор Александрович; доцент Мросковского Авиационного Института (национальго исследовательского университета), к. т. н.; 125480, г. Москва,

ул. Героев Панфиловцев, д. 22, к. 1, кв. 481, тел. 8-916-576-97-16,

e-mail: viktorboldinov@mail.ru

Коршунов Андрей Владимирович; старший научный сотрудник Научного центра МО РФ, д.т.н., 8-499-263-30-28 . a-kors@yandex.ru

Скрынников Андрей Александрович; ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского

и Ю. А. Гагарина»; доцент; к. т. н.; с. н. с.; 115582, г. Москва, ул. Домодедовская,

д. 46, кв. 160, тел. 8-915-063-33-30, e-mail: a1260@mail.ru

Федотов Александр Юрьевич; ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского

и Ю. А. Гагарина»; 125190, г. Москва, ул. Планетная, д.3, курсант;

тел. 8-915-036-65-72, e-mail: fed6679@mail.ru.