

УДК 532.507

**Определение критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля на основе метода «разрывных функций»**

**Хатунцева О.Н.**

*Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва, ул. Ленина, 4А,  
Королев, Московская область, 141070, Россия*

*e-mail: [Olga.Khatuntseva@rsce.ru](mailto:Olga.Khatuntseva@rsce.ru)*

**Статья поступила 19.09.2019**

**Аннотация**

Данная работа продолжает цикл публикаций автора, посвященных решению гидродинамических задач, допускающих аналитический подход к их рассмотрению. В работах [17-18] исследованы возможности применения метода «разрывных функций» для теоретического определения критических значений числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля и в плоской задаче Куэтта. Метод может быть применен в тех случаях, когда существуют различные функции, характеризующие разные физические процессы, например, ламинарный и турбулентный режимы течения жидкости, а также осуществляется скачкообразный переход от одного физического процесса к другому. В задаче Хагена-Пуазейля и в плоской задаче Куэтта удалось аналитически определить функции, описывающие квазистационарный турбулентный и стационарный ламинарный режимы течения. Решения этих задач удалось найти за счет учета в уравнениях Навье-Стокса производства энтропии, обусловленного возбуждением стохастических пульсаций в

потоке жидкости. Аналогичный подход для определения профилей скорости, как в ламинарном, так и в турбулентном потоках, был применен в работе [19] при решении плоской задачи Пуазейля. Данная работа посвящена определению критического значения числа Рейнольдса с помощью метода «разрывных функций» в плоской задаче Пуазейля. Найдено критическое значение числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Приведено сравнение результатов с имеющимися экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** турбулентность, плоское течение Пуазейля, критическое значение числа Рейнольдса, стохастические системы, плотность вероятности.

## 1. Введение

Задача теоретического описания ламинарно-турбулентного перехода и определения критических значений числа Рейнольдса в различных типах течений имеет довольно давнюю историю [1-16], однако не является до конца решенной до сих пор. Методы решения таких задач, в основном относятся к определению потери линейной устойчивости ламинарного режима течения [1-3]. Однако попытки разрешить наиболее известные «классические» задачи гидродинамики, допускающие аналитическое интегрирование уравнений Навье-Стокса (УНС), с помощью подобных методов не привели к успеху. Так задача Хагена-Пуазейля, описывающая течение несжимаемой вязкой жидкости в трубе кругового сечения и

плоская задача Куэтта, в которой описывается течение несжимаемой вязкой жидкости, помещенной между двумя движущимися в противоположных направлениях пластинами, обладают линейной устойчивостью при любых значениях числа Рейнольдса. Для плоского течения Пуазейля (течение несжимаемой вязкой жидкости в бесконечном плоском канале под действием градиента давления) существует ограничение по устойчивости ламинарного режима течения, однако, критическое число Рейнольдса потери линейной устойчивости, рассчитанное S.A. Orszag, составляет 5772, что почти в шесть раз превышает экспериментальные данные [3]. Попытки разрешить эти парадоксы привели к распространению точки зрения, что к потере устойчивости должны приводить конечные возмущения в жидкости. Однако остается открытым вопрос, почему в перечисленных задачах, допускающих аналитический подход к интегрированию УНС, не существует квазистационарных решений, описывающих турбулентные режимы течения, к которым и должны «стремиться» течения при потере устойчивости.

В работах [17-22] предложен метод описания гидродинамических стохастических систем с использованием модифицированных уравнений Навье-Стокса, записанных в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной, описывающей производство энтропии стохастической системы. Этот метод позволил при больших числах Рейнольдса найти два решения в задаче Хагена-Пуазейля, в плоской задаче Куэтта и в задаче описания плоского течения Пуазейля: одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе –

турбулентному. Небольшое отличие первого и второго решений в задаче Хагена-Пуазейля и в плоской задаче Куэтта для двух режимов течения в локальной области (у стенки и в точке перегиба профиля скорости), позволило аналитически, с помощью метода описания «разрывных функций», найти критические значения числа Рейнольдса, при которых возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения.

В настоящей работе рассмотрим аналогичный подход для определения критического значения числа Рейнольдса в плоской задаче Пуазейля.

Метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы [23], [17-18] (см. рис. 1), применим к таким физическим процессам, которые можно однозначно описать функциями  $\tilde{m}(\alpha)$  на всей области определения  $\alpha$ , кроме малых подобластей, в которых эти функции изменяют свои значения и/или значения своих производных. В таких подобластях функции  $\tilde{m}(\alpha) = \tilde{m}(\alpha(t))$  могут вести себя случайным образом (если следить за процессом изменения аргумента много раз). Задача метода состоит в поиске соотношений, связывающих значения функций и их производных на границах подобластей изменения параметров с размерами и положением этих подобластей относительно, рассматриваемых областей определения значений  $\alpha$ .

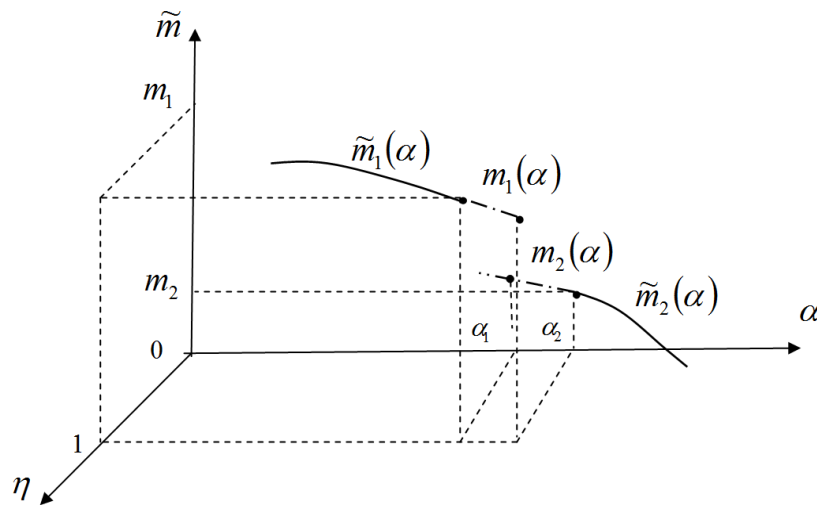


Рис. 1. Схематичное изображение функции с разрывом первого рода в расширенном пространстве переменных

В результате были найдены уравнение и неравенство, связывающие значения функций  $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1$  и  $m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$  (значения линейно продолженных функций  $\tilde{m}_1(\alpha)$  и  $\tilde{m}_2(\alpha)$  в область  $[\alpha_1, \alpha_2]$ ), а также значения производных  $dm_1(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_1} = dm_1/d\alpha$  и  $dm_2(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_2} = dm_2/d\alpha$  в точках  $\alpha = \alpha_1$  и  $\alpha = \alpha_2$ , соответственно, с протяженностью области перехода  $\Delta\alpha$ , которая отделяет точку  $\alpha_2$  от точки  $\alpha_1$ :

$$\left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)^2 m_2^4 - 4\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right) m_1^2 m_2 \left(m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha - m_2\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} \left(m_1 m_2 - m_1^2 + m_2 \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha\right) + m_1^2\right)^2, \quad (1)$$

$$(\Delta\alpha)^2 \left(\frac{dm_1}{d\alpha}\right)^2 + 2\Delta\alpha \frac{dm_1}{d\alpha} \left(m_1 - m_2 + \alpha_2 \left(\frac{dm_1}{d\alpha} - \frac{dm_2}{d\alpha}\right)\right) +$$

$$+ 2m_1 \left( \alpha_2 + \frac{m_1}{m_2} (\Delta\alpha - \alpha_2) \right) \left( \frac{dm_1}{d\alpha} - \frac{dm_2}{d\alpha} \right) + m_1 (m_1 - 2m_2) \geq 0. \quad (2)$$

В тех задачах, где рассматриваются не интегральные, а локальные характеристики процесса, метод «разрывных функций» необходимо рассматривать с учетом дополнительных критериев и факторов, позволяющих говорить о возможности или невозможности наступления глобального перехода. Например, изменение функции скорости или производной скорости, описывающей профиль скорости в некоторых локальных точках, безусловно, может свидетельствовать о возможности глобального изменения режима течения – переходу от ламинарного к турбулентному режиму течения. В тоже время изменение второй (или более высокой) степени производной функции скорости в локальной точке, вероятнее всего не приведет к изменению режима течения. Неоднозначность влияния на смену режимов течения может касаться и положения самих точек в потоке, в которых исследуется изменение функциональной характеристики. Так, наиболее «чувствительными» к смене режимов течения являются пристеночные области. Однако во внутренних течениях, вблизи точек «перегиба», где производная скорости становится нулевой, влияние локального перехода также может стать источником глобальной перестройки течения. В общем случае, вопрос влияния изменения течения в отдельных точках на глобальную смену режимов течения во всей области требует отдельного исследования с точки зрения гидродинамической устойчивости. В данной работе при рассмотрении плоской задачи Пуазейля, также как и в задаче Хагена-Пуазейля [17], будем предполагать, что наиболее значимое

влияние на возможность глобальной смены режимов течения оказывают локальные изменения профиля скорости или производной скорости в пристеночной области.

В работе [19] (следуя методу, разработанному в [17-18]) процедура расширения фазового пространства за счет введения «стохастической» переменной была применена к описанию течения вязкой несжимаемой жидкости в плоской задаче Пуазейля. Рассматривалось приближение, в котором не учитывались возмущения с малыми длинами волн, характеризуемые спектром, близким к «сплошному». В результате, были обнаружены два аналитических решения. Одно из них, соответствует ламинарному режиму течения и может реализовываться при любых значениях числа Рейнольдса. Второе – соответствует турбулентному режиму течения и может реализовываться только при достаточно больших значениях числа Рейнольдса. «Турбулентное» решение описывается логарифмическим профилем скорости в центре канала с множителем, обратно пропорциональным постоянной Кармана, значение которой также было определено аналитически:

$$\frac{V}{V_*} \approx \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{\xi V_*}{\nu}\right) + B.$$
 Вблизи стенки канала также найдено небольшое отличие ламинарного и турбулентного течения.

Ламинарное течение описывается параболическим профилем скорости во всей области канала:  $V(y) = U(1 - (y/b)^2)$ , где  $b$  - полуширина канала,  $U$  - скорость течения в центре канала при ламинарном режиме. Поэтому, используя переменную:  $\xi = b - y$ , можно записать:  $V(\xi) = U(1 - (b - \xi)^2/b^2) = 2U\xi/b - U\xi^2/b^2$ . А, поскольку,

динамическая скорость равна:  $V_* = 2U/\sqrt{2\text{Re}}$ , где  $\text{Re} = Ub/\nu$  (см. [19]), то

$$V_*^2 = 2\nu U/b \text{ и } V(\xi) \approx \frac{\xi V_*^2}{\nu} - \frac{\xi^2 V_*^2}{2\nu b}.$$

Профиль турбулентного течения вблизи стенки, найденный в [19],

описывается выражением:  $V^+(\xi^+) \approx \xi^+ - \frac{1}{4}\xi^{+2}$ . Учитывая соотношение для

динамической длины:  $y_* = \nu/V_*$ , можно записать:  $V(\xi) \approx \frac{\xi V_*^2}{\nu} - \frac{\xi^2 V_*^3}{4\nu^2}$ . То есть

$$V(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi V_*^2}{\nu} - \frac{\xi^2 V_*^2}{2\nu b}, & \text{ламинарный} \\ \frac{\xi V_*^2}{\nu} - \frac{\xi^2 V_*^3}{4\nu^2}, & \text{турбулентный} \end{cases},$$

или по-другому:

$$\frac{Vb}{\nu} = \begin{cases} \tilde{\xi} \frac{V_*^2 b^2}{\nu^2} - \tilde{\xi}^2 \frac{V_*^2 b^2}{2\nu^2}, & \text{ламинарный} \\ \tilde{\xi} \frac{V_*^2 b^2}{\nu^2} - \tilde{\xi}^2 \frac{V_*^3 b^3}{4\nu^3}, & \text{турбулентный} \end{cases}, \text{ где } \tilde{\xi} = \xi/b.$$

А, учитывая, что  $V_* b/\nu = \tilde{V}_* Ub/\nu = \sqrt{2\text{Re}}$ , где  $\tilde{V}_* = V_*/U$ , можно записать

$$\frac{V(\tilde{\xi})b}{\nu} = \begin{cases} 2\text{Re}\tilde{\xi} - \text{Re}\tilde{\xi}^2, & \text{ламинарный} \\ 2\text{Re}\tilde{\xi} - \frac{\text{Re}^{3/2}}{\sqrt{2}}\tilde{\xi}^2, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Видно, что при  $\tilde{\xi} = 0$ , в двух режимах течения будут неотличимы первые производные скорости. Вторые производные в точке  $\tilde{\xi} = 0$  будут различными для



двух режимов течения, однако влияние изменения вторых производных скорости на смену режимов течения маловероятно.

Таким образом, приближение, в котором была решена задача определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля [19], когда учитываются только возмущения с относительно большими длинами волн, является недостаточно корректным для решения задачи определения критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода. Поэтому вначале попытаемся решить задачу определения профиля скорости турбулентного течения, с учетом возбуждения возмущений «сплошного» спектра с малыми длинами волн.

## **2. Нахождение профиля турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля с учетом возбуждения возмущений с малыми длинами волн.**

Так же, как и в работе [19], при нахождении решений задачи плоского течения Пуазейля в уравнениях Навье-Стокса (УНС) будем учитывать производство энтропии, обусловленное возбуждением стохастических возмущений. В работах [17-22] было дано довольно подробное обоснование возможности использования данного подхода. Для решения данной задачи достаточно рассмотреть систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и модифицированных УНС:

$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\tau$  – временной масштаб, на котором происходит изменение энтропии на единицу,  $\tilde{s} = \tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p)$  – переменная, являющаяся подынтегральной частью выражения для дифференциальной энтропии  $S = -\int \varphi(p) \ln \varphi(p) dp$  и характеризующая плотность вероятности  $\varphi$  возникновения стохастического возмущения  $p$ .

Решением системы уравнений (3) (с граничными и начальными условиями, соответствующими данной задаче) будет являться значение скорости  $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}; \tau) = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}(\varphi); \tau)$ , реализующейся с вероятностью  $\varphi$ , на временном масштабе рассмотрения  $\tau$ , в момент времени  $t$ , в точке  $\vec{r}(x, y, z)$ .

Задачу будем решать в классической постановке [3], а именно, в предположении, что скоростями в поперечных направлениях  $y$  и  $z$  можно пренебречь по сравнению с продольной скоростью  $V$ . Из чего следует постоянство давления в поперечных направлениях. Кроме того, в этом случае из уравнения неразрывности сразу вытекает, что продольная составляющая скорости  $V$  не зависит от значения продольной координаты  $x$ . Тогда систему уравнений (3) с учетом описания стохастических пульсаций скорости при квазистационарном (когда  $\partial V / \partial t = 0$ ) течении вязкой несжимаемой жидкости, можно переписать в виде соотношения:

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

Предполагая постоянство градиента скорости в продольном направлении, полученное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{b^2}{\tau\nu} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2} + 2, \quad (4)$$

где  $\tilde{y} = y/b$ ,  $b$  - полуширина канала,  $\tilde{V} = \tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = V/U$  - безразмерная квазистационарная компонента скорости в продольном направлении в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной  $\tilde{s}$ ,  $U = -\frac{b^2}{2\rho\nu} \frac{dP}{dx}$  - скорость жидкости в центре канала при ламинарном режиме течения [3],  $\nu$  - вязкость жидкости,  $\rho$  - плотность жидкости.

Необходимо подчеркнуть, что в случае турбулентного режима, течение будет, безусловно, иметь пространственный - трехмерный характер. Однако нерассмотренные в уравнениях компоненты скорости будут иметь стохастический характер пульсаций. Они учитываются в уравнении (4) при введении переменной  $\tilde{s}$ , отвечающей за общее производство энтропии в турбулентном режиме.

Уравнение (4) будем решать, используя граничные условия – «прилипание» жидкости на стенках в отсутствии пульсаций:  $\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\substack{\tilde{y}=\pm 1 \\ \tilde{s}=0}} = 0$ , и условие симметрии на оси канала:  $\partial \tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) / \partial \tilde{y} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{s}=0}} = 0$ .

Уравнение (4) можно упростить, введя вместо временного масштаба  $\tau$  безразмерный коэффициент  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 1$ ) - параметр, характеризующий

пространственный масштаб, и воспользовавшись соотношением:  $\tau = \frac{\gamma b}{U} = \frac{\gamma b^2}{\nu \text{Re}}$ , где

$\text{Re} = Ub/\nu$  - число Рейнольдса при ламинарном режиме течения жидкости.

Подставляя зависимость  $\tau(\gamma)$  в уравнение, приходим к соотношению:

$$\frac{\text{Re}}{\gamma} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2} + 2.$$

Сделав в нем замену:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{s}) - \tilde{y}^2, \quad (5)$$

получим

$$\frac{\text{Re}}{\gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (6)$$

Решая уравнение (6) методом разделения переменных:

$$\tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{s}) = N(\tilde{s})F(\tilde{y}), \quad (7)$$

получим два уравнения:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{d\tilde{s}} = \frac{a\gamma}{\text{Re}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2 F}{d\tilde{y}^2} = aF, \quad (8)$$

где  $a = a(\gamma, \text{Re})$  - произвольная константа при любых фиксированных значениях параметров  $\gamma$  и  $\text{Re}$ . Нетрудно заметить, что нулевое значение константы  $a$  с учетом соотношения (5) и граничных условий к уравнению (4) соответствует решению уравнений Навье-Стокса для ламинарного течения несжимаемой жидкости в плоском канале. Это решение будет также являться первым решением задачи

течения жидкости в плоском канале с учетом стохастических возмущений скорости для любых значений числа Рейнольдса.

В случае  $a \neq 0$ , решением первого уравнения (8) являются функции

$$N(\tilde{s}) \sim e^{\frac{a\gamma}{\text{Re}}\tilde{s}}. \quad (9)$$

Гладкие решения второго уравнения (8) можно записать в виде:

$$F = \frac{ch(\sqrt{a}\tilde{y})}{ch\sqrt{a}}, \text{ где } a > 0; \quad F = \frac{\cos(\sqrt{|a|}\tilde{y})}{\cos\sqrt{|a|}}, \text{ где } a < 0.$$

Соответствующие им выражения для скорости имеют вид:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{ch(\sqrt{a}\tilde{y})}{ch\sqrt{a}} e^{\frac{a}{\text{Re}}\tilde{s}} - \tilde{y}^2, \quad a > 0, \quad (10)$$

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{\cos(\sqrt{|a|}\tilde{y})}{\cos\sqrt{|a|}} e^{\frac{|a|}{\text{Re}}\tilde{s}} - \tilde{y}^2, \quad a < 0. \quad (11)$$

Рассмотрим поведение течения жидкости вблизи стенок канала. Для этого введем переменную  $\xi = b - y$  или переменную  $\tilde{\xi} = 1 - \tilde{y}$  (здесь  $\tilde{\xi} = \xi/b$ ,  $\tilde{y} = y/b$ ), значение которой будем отсчитывать от стенки. Выражения (10)-(11) перепишем в виде зависимостей безразмерных скоростей от безразмерных расстояний относительно динамических значений скорости  $V_*$  и длины  $y_*$ , соответственно (при этом,  $y_*V_*/\nu \sim 1$ ):

$$\frac{V(\xi, \tilde{s})}{V_*} \tilde{V}_* = \frac{ch\left(\sqrt{a}\left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \tilde{y}_*\right)\right)}{ch\sqrt{a}} e^{\frac{a}{\text{Re}}\tilde{s}} - \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \tilde{y}_*\right)^2, \quad a > 0.$$

$$\frac{V(\xi, \tilde{s})}{V_*} \tilde{V}_* = \frac{\cos\left(\sqrt{|a|}\left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \tilde{y}_*\right)\right)}{\cos\sqrt{|a|}} e^{-\frac{|a|}{\text{Re}} \tilde{s}} - \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \tilde{y}_*\right)^2, \quad a < 0.$$

Поскольку динамические характеристики течения непосредственно у стенок канала в ламинарном и турбулентном потоках должны сохраняться, то безразмерные значения динамических скорости и длины:  $\tilde{V}_* = V_*/U$  и  $\tilde{y}_* = y_*/b$ , входящие в эти выражения, можно определить, используя соотношение для скорости ламинарного течения  $\tilde{V} = 1 - \tilde{y}^2$ :

$$\tilde{V}_* = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{1}{U} \sqrt{\nu \left| \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{\substack{\tilde{y}=1 \\ \tilde{s}=0}}} = \sqrt{\frac{\nu}{Ub} \left| \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{y}} \right|_{\substack{\tilde{y}=1 \\ \tilde{s}=0}}} = \frac{2}{\sqrt{2\text{Re}}}, \quad (12)$$

$$\tilde{y}_* = \frac{y_*}{b} = \frac{y_* V_*}{\nu} \frac{\nu U}{Ub V_*} \sim \frac{1}{\text{Re} \tilde{V}_*} = \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}, \quad (y_* V_*/\nu \sim 1). \quad (13)$$

здесь  $\sigma$  - отнесенная к единице площади сила трения.

Используя соотношения (12), (13) перепишем выражения для скорости в виде:

$$\frac{V(\xi, \tilde{s})}{V_*} = \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left( \frac{\text{ch}\left(\sqrt{a}\left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)\right)}{\text{ch}\sqrt{a}} e^{\frac{a}{\text{Re}} \tilde{s}} - \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)^2 \right), \quad a > 0.$$

$$\frac{V(\xi, \tilde{s})}{V_*} = \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left( \frac{\cos\left(\sqrt{|a|}\left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)\right)}{\cos\sqrt{|a|}} e^{-\frac{|a|}{\text{Re}} \tilde{s}} - \left(1 - \frac{\xi V_*}{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)^2 \right), \quad a < 0.$$

При нулевом значении стохастического возмущения ( $\tilde{\tau} = 0$ ) в точке  $\xi = y_*$  (и  $y_* V_* / \nu \sim 1$ ), значение скорости должно быть равно значению динамической скорости:  $V = V_*$ . Поэтому от полученных выражений можно перейти к уравнениям:

$$\frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left( \text{ch} \left( \sqrt{\frac{a}{2\text{Re}}} \right) - \text{sh} \left( \sqrt{\frac{a}{2\text{Re}}} \right) \text{th} \sqrt{a} \right) - \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}} = 0, \quad a > 0.$$

$$\frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left( \cos \left( \sqrt{\frac{|a|}{2\text{Re}}} \right) + \sin \left( \sqrt{\frac{|a|}{2\text{Re}}} \right) \text{tg} \sqrt{|a|} \right) - \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}} = 0, \quad a < 0.$$

Предполагая, что  $|a/(2\text{Re})| < 1$ , и разлагая гиперболические и тригонометрические функции, содержащие числа Рейнольдса, в ряд Тейлора, запишем полученные уравнения с точностью до  $O(1/(2\text{Re}))$ :

$$\frac{a-2}{2\sqrt{2\text{Re}}} - \sqrt{a} \cdot \text{th} \sqrt{a} \approx 0, \quad a > 0, \quad (14)$$

$$\frac{|a|+2}{2\sqrt{2\text{Re}}} - \sqrt{|a|} \cdot \text{tg} \sqrt{|a|} \approx 0, \quad a < 0. \quad (15)$$

В работе [19] поиск решений уравнений (14)-(15), отвечающих турбулентному режиму течения жидкости, ограничивался случаем, когда значения параметра  $a$  по абсолютной величине значительно меньше квадратного корня из числа Рейнольдса, что соответствует учету только длинноволновых возмущений. В данной работе одновременно с длинноволновыми возмущениями рассмотрим и коротковолновые, которые составляют практически «сплошной» спектр возмущений.

В случае, когда  $|a| \gg 1$ , приближенным решением уравнения (14) является значение  $a \approx 8\text{Re}$ , которому соответствует выражение для скорости:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{ch(\sqrt{8\text{Re}}\tilde{y})}{ch\sqrt{8\text{Re}}} e^{8\tilde{y}\tilde{s}} - \tilde{y}^2. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что выражение (16) задает отрицательное значение скорости почти во всей рассматриваемой области течения:  $-1 \leq \tilde{y} \leq 1$  (за исключением незначительной области вблизи оси канала, где скорость положительна, но близка к нулю). Такое течение, реализоваться не может, так как это противоречит выполнению законов сохранения.

Перейдем к рассмотрению уравнения (15). При больших значениях  $|a|$ , от него можно перейти к приближенному соотношению:

$$\sqrt{|a_k|} \approx \sqrt{8\text{Re}} \cdot \text{tg} \sqrt{|a_k|}, \text{ или } b_k \approx \text{tg}(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k), \text{ где } b_k = \sqrt{|a_k|} / \sqrt{8\text{Re}},$$

из которого, в частности, следует зависимость:  $\pm \sqrt{b_k^2 + 1} \approx 1 / \cos(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k)$ .

Выражения для компонентов скорости, соответствующие этому решению, представимы в виде:

$$\tilde{V}_k(\tilde{y}, \tilde{s}) = \frac{\cos(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k \tilde{y})}{\cos(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k)} e^{-8b_k^2 \tilde{y}\tilde{s}} - \tilde{y}^2 = \pm \sqrt{b_k^2 + 1} \cdot \cos(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k \tilde{y}) e^{-8b_k^2 \tilde{y}\tilde{s}} - \tilde{y}^2.$$



Длина волны колебаний компонентов скорости:  $(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k)^{-1}$  не должна быть меньше характерного размера «вязкого подслоя»:  $\tilde{y}_* = 1/\sqrt{2\text{Re}}$ , поэтому  $b_k \leq 1/2$  и, следовательно,  $|a_k| \leq \sqrt{2\text{Re}}$ .

Выражение, определяющее общий вклад «коротковолновых» возмущений, характеризуемых параметрами  $b_k$ , в безразмерное значение скорости, можно представить в виде ряда:

$$\sum_k c_k \sqrt{b_k^2 + 1} \cdot \cos(\sqrt{8\text{Re}b_k} \tilde{y}) e^{-8b_k^2 \tilde{y} \tilde{s}} - \sum_k c_k \tilde{y}^2, \quad \text{где } b_k \approx \text{tg}(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k), \quad b_k \leq 1/2. \quad (17)$$

Выражение, определяющее общий вклад «длинноволновых» возмущений в безразмерное значение скорости, найденное в работе [19], представимо в виде:

$$\sum_n (-1)^n c_n \cos(\pi n \tilde{y}) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}} \tilde{y} \tilde{s}} - \sum_n c_n \tilde{y}^2, \quad \pi^2 n^2 \ll \sqrt{2\text{Re}}. \quad (18)$$

Объединяя выражения (17) и (18), можно записать:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) = \sum_{\pi^2 n^2 \ll \sqrt{2\text{Re}}} (-1)^n c_n \cos(\pi n \tilde{y}) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}} \tilde{y} \tilde{s}} + \sum_{b_k \leq 1/2} c_k \sqrt{b_k^2 + 1} \cdot \cos(\sqrt{8\text{Re}b_k} \tilde{y}) e^{-8b_k^2 \tilde{y} \tilde{s}} - \left( \sum_n c_n + \sum_k c_k \right) \tilde{y}^2. \quad (19)$$

Вблизи стенки канала – в окрестности точки  $\tilde{y} = 1$ , из соотношения (19) получим выражение:

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\tilde{y}=1} = \sum_n c_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}} \gamma \tilde{s}} + \sum_k c_k e^{-8b_k^2 \gamma \tilde{s}} - \sum_n c_n - \sum_k c_k .$$

Раскладывая в этом выражении экспоненты в ряд Тейлора с точностью до первой степени  $\gamma$ , включительно, запишем

$$\tilde{V}(\tilde{y}, \tilde{s}) \Big|_{\tilde{y}=1} = -\gamma \tilde{s} \left( \frac{\pi^2}{\text{Re}} \sum_n c_n n^2 + 8 \sum_k c_k b_k^2 \right). \quad (20)$$

Это выражение характеризует возмущение безразмерной скорости вблизи стенки, реализующейся с вероятностью, описываемой стохастической переменной  $\tilde{s}$ . Для того, чтобы стохастическое возмущение скорости, с одной стороны, «диссипировало» на длине вязкого масштаба, а, с другой стороны, не исчезло полностью, «амплитуда» ее изменения на масштабе  $\gamma = 1$  должна быть порядка безразмерной динамической скорости:  $\tilde{V}_* = 2/\sqrt{2\text{Re}}$  (см. соотношение (12)):

$$\frac{\pi^2}{\text{Re}} \sum_n c_n n^2 + 8 \sum_k c_k b_k^2 \sim \tilde{V}_* = \frac{2}{\sqrt{2\text{Re}}} .$$

Или, по-другому,

$$\pi^2 \sum_n c_n n^2 + 8\text{Re} \sum_k c_k b_k^2 \sim \sqrt{2\text{Re}} . \quad (21)$$

Запишем выражение (19), как функцию от переменной  $\tilde{\xi} = 1 - \tilde{y}$ , значения которой отсчитываются от стенки канала:

$$\tilde{V}(\tilde{\xi}, \tilde{s}) = \sum_n (-1)^n c_n \cos(\pi n (1 - \tilde{\xi})) e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\text{Re}} \gamma \tilde{s}} +$$

$$+ \sum_k c_k \sqrt{b_k^2 + 1} \cdot \cos(\sqrt{8\text{Re}} b_k (1 - \tilde{\xi})) e^{-8b_k^2 \tilde{\gamma} \tilde{s}} - \left( \sum_n c_n + \sum_k c_k \right) (1 - \xi)^2.$$

Представляя косинусы разностей в этом выражении в виде суммы произведений косинусов и синусов, и разлагая, полученные тригонометрические функции в ряды Тейлора до второй степени по  $\tilde{\xi}$ , включительно, а также учитывая соотношения (21) и зависимость:  $b_k \approx \text{tg}(\sqrt{8\text{Re}} \cdot b_k)$ , в отсутствии возмущения (когда  $\tilde{s} = 0$ ), получим выражение:

$$\tilde{V}(\tilde{\xi}, \tilde{s}) \Big|_{\substack{\tilde{\gamma} \rightarrow 0 \\ \tilde{s} = 0}} \approx 2\sqrt{2\text{Re}} \tilde{\xi} \left( \sum_k c_k b_k^2 + \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \left( \sum_n c_n + \sum_k c_k \right) \right) - \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \tilde{\xi}^2 \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{2\text{Re}}} \left( \sum_n c_n + \sum_k c_k \right) \right).$$

Используя динамические переменные (12)-(13), это выражение можно переписать в виде:

$$V^+ \approx \xi^+ \left( \sqrt{2\text{Re}} \sum_k c_k b_k^2 + \sum_n c_n + \sum_k c_k \right) - \frac{1}{4} \xi^{+2} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{2\text{Re}}} \left( \sum_n c_n + \sum_k c_k \right) \right). \quad (22)$$

В этом выражении приняты стандартные обозначения:  $V^+ = V/V_* = \tilde{V}/\tilde{V}_*$ ,  $\xi^+ = \xi/y_* = \tilde{\xi}/\tilde{y}_*$ .

В точке  $\xi^+ = 1$ , динамическое значение скорости равно единице:  $V^+ \Big|_{\xi^+} = 1$ , поэтому из уравнения (22) можно получить соотношение:

$$\sqrt{2\text{Re}} \sum_k c_k b_k^2 = \frac{5}{4} - \sum_n c_n - \sum_k c_k + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right).$$

Подставляя его в выражение (22), запишем

$$V^+ \approx \frac{5}{4} \xi^+ - \frac{1}{4} \xi^{+2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right). \quad (23)$$

Это выражение описывает течение жидкости вблизи стенок канала. Оно полностью совпадает с соотношением, полученным для скорости течения жидкости вблизи стенки трубы кругового сечения в задаче Хагена-Пуазейля [17] и отличается

от выражения:  $V^+ \approx \xi^+ - \frac{1}{4} \xi^{+2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)$ , найденного для течения в канале [19]

без учета коротковолновых возмущений «сплошного» спектра.

Покажем, что это отличие не приведет к качественному изменению логарифмической функции, описывающей поведение скорости в центре канала.

Недалеко от точки  $\xi^+ \sim 1$  (по направлению к центру канала) выберем точку  $\xi_0^+$  и в ее окрестности рассмотрим разложение скорости. В области  $\xi^+ > 1$  скорость может зависеть от отношений  $(\xi^+ / \xi_0^+)^m$ , в которых степень  $m$  больше или равна трем, при этом члены, содержащие выражения  $(\xi^+ / \xi_0^+)^n$ , где  $n$  - меньше или равны двум, должны остаться прежними. Поэтому выражение (23) можно представить в виде:

$$V^+ \left( \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right) = \frac{5}{4} \xi_0^+ \left( \frac{\xi^+}{\xi_0^+} - \frac{1}{2} \left( \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \xi_0^+ \left( \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^2 \left( \frac{5}{2} - \xi_0^+ \right) + O \left( \left( \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^m, \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \right),$$

где  $m \geq 3$ .

Выражение, стоящее в скобках первого слагаемого в правой части последнего соотношения, является разложением функции логарифма:  $\ln \left( 1 + \xi^+ / \xi_0^+ \right)$ , в окрестности точки  $\xi^+ = \xi_0^+$  до квадратичного члена включительно. Поэтому в области  $\xi^+ > 1$ , в окрестности точки  $\xi_0^+$ , последнее выражение можно переписать в виде:

$$V^+ \left( \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right) \approx \frac{5}{4} \xi_0^+ \ln \left( 1 + \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right) + \frac{1}{4} \xi_0^+ \left( \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^2 \left( \frac{5}{2} - \xi_0^+ \right) + O \left( \left( \frac{\xi^+}{\xi_0^+} \right)^m \right), \quad m \geq 3. \quad (24)$$

Если приближаться к точке  $\xi^+ = 1$  (границе вязкого подслоя) со стороны центральной части канала (от точки  $\xi_0^+$ ), то скорость  $V^+$  должна стремиться к значению единица, поэтому из выражения (24) следует соотношение:

$$\frac{5}{4} \xi_0^+ \ln \left( 1 + \frac{1}{\xi_0^+} \right) + \frac{5}{8 \xi_0^+} - \frac{1}{4} + O \left( \left( \frac{1}{\xi_0^+} \right)^m \right) \sim 1, \quad m \geq 3.$$

Нетрудно видеть, что этой зависимости удовлетворяет значение  $\xi_0^+ \sim 2$ . При таком значении  $\xi_0^+$ , множитель, при квадратичном по  $\xi^+$  слагаемом, входящем в уравнение (24), принимает значение, близкое к нулю. Важно, чтобы это слагаемое по абсолютной величине было не больше кубического члена разложения логарифма,

умноженного на  $\frac{5}{4}\xi_0^+$ . То есть должно выполняться условие:

$5/(12\xi_0^{+2}) \geq |5/(8\xi_0^+) - 1/4|$ . В этом случае, в области  $\xi^+ > 1$ , члены разложения логарифма, степень которых превышает двойку, умноженные на  $\frac{5}{4}\xi_0^+$ , будут превосходить значение квадратичного слагаемого в выражении (24). Такому условию удовлетворяют значения:  $1 < \xi_0^+ < 3$ . Если принять  $\xi_0^+ \approx 2$ , то  $\kappa = 4/(5\xi_0^+) \approx 0,4$ .

В этом случае, выражение (24) можно переписать в виде:

$$V^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa \xi^+) + O\left((\xi^+)^m\right), \quad m \geq 3, \quad \kappa \approx 0,4.$$

При приближении к центру канала, при больших значениях переменной  $\xi^+$ :  $\xi^+ \rightarrow \sqrt{2\text{Re}}$ , единицей стоящей под знаком логарифма можно пренебречь. В этой области канала полученное выражение можно записать в виде:

$$\frac{V}{V_*} \approx \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{\xi V_*}{\nu}\right) + B, \quad \text{где} \quad B = \ln \kappa / \kappa + O\left(\left(\frac{\xi V_*}{\nu}\right)^m\right), \quad m \geq 3, \quad \kappa \approx 0,4. \quad (25)$$

Поскольку в центре канала производная скорости должна быть нулевой, то при больших значениях переменной  $\xi$ :  $\xi V_* / \nu \rightarrow \sqrt{2\text{Re}}$ , значение  $B$  в выражении

$$(25) \text{ должно стремиться к константе: } B = \ln \kappa / \kappa + O\left(\left(\frac{\xi V_*}{2\nu}\right)^m\right) \xrightarrow{\xi V_* / \nu \gg 1} \text{const}.$$

Из соотношения (25) видно, что учет коротковолновых возмущений не привел

к качественному изменению вида функции в центре канала, характеризующей логарифмическую зависимость скорости от расстояния до стенки.

В тоже время, соотношение (23), характеризующее поведение функции скорости течения у стенок канала, найденное с учетом не только длинноволновых, но и коротковолновых возмущений, изменилось по сравнению с найденным ранее в работе [19]. Это отличие позволит определить критическое значение числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода плоского течения Пуазейля.

### **3. Использование метода «разрывных функций» для определения критического значения числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля.**

Учитывая выражение  $y_* = \nu/V_*$ , представим соотношение (23) в виде:

$$V(\xi) \approx \frac{5}{4} \frac{\xi V_*^2}{\nu} - \frac{1}{4} \frac{\xi^2 V_*^3}{\nu^2}.$$

Совместно с выражением для параболического профиля скорости ламинарного режима течения в пристеночной области можно записать

$$V(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi V_*^2}{\nu} - \frac{\xi^2 V_*^2}{2\nu b}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4} \frac{\xi V_*^2}{\nu} - \frac{1}{4} \frac{\xi^2 V_*^3}{\nu^2}, & \text{турбулентный} \end{cases},$$

или по-другому:

$$\frac{Vb}{\nu} = \begin{cases} \xi \frac{V_*^2 b^2}{\nu^2} - \xi^2 \frac{V_*^2 b^2}{2\nu^2}, & \text{ламинарный} \\ \xi \frac{5 V_*^2 b^2}{4 \nu^2} - \xi^2 \frac{1 V_*^3 b^3}{4 \nu^3}, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Учитывая, что  $V_* b / \nu = \tilde{V} U b / \nu = \sqrt{2 \text{Re}}$ , запишем

$$\frac{V(\tilde{\xi})b}{\nu} = \begin{cases} 2 \text{Re} \tilde{\xi} - \text{Re} \tilde{\xi}^2, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{2} \text{Re} \tilde{\xi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re}^{3/2} \tilde{\xi}^2, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Видно, что непосредственно у стенки канала - при  $\tilde{\xi} = 0$ , в двух режимах течения будут отличаться первые производные скорости:

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d(V(\tilde{\xi})b/\nu)}{d\tilde{\xi}} \right|_{\tilde{\xi}=0} = \begin{cases} \text{Re}, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4} \text{Re}, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Отличие профилей скорости течения жидкости в ламинарном и турбулентном режимах в пристеночной области канала позволяет предположить возможность того, что такое изменение может повлечь за собой глобальное изменение режима течения. А это, в свою очередь, позволяет воспользоваться методом описания «разрывных функций» для определения критического значения числа Рейнольдса, при котором становится возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения в плоской задаче Пуазейля.

Предположим, что «уход» с ламинарного режима течения становится возможен при критическом значении числа Рейнольдса:  $\text{Re}_1$ , вычисленному по



значению скорости на оси канала при ламинарном режиме течения  $U_1$ . Вычтем из левой и правой частей полученного соотношения значение этого числа:

$$\frac{1}{2} \frac{d(V(\tilde{\xi})b/\nu)}{d\tilde{\xi}} \Big|_{\tilde{\xi}=0} - \text{Re}_1 = \begin{cases} \text{Re} - \text{Re}_1, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4}(\text{Re} - \text{Re}_1) + \frac{1}{4}\text{Re}_1, & \text{турбулентный} \end{cases}.$$

Обозначив:  $m = \frac{1}{2} \frac{d(V(\tilde{\xi})b/\nu)}{d\tilde{\xi}} \Big|_{\tilde{\xi}=0} - \text{Re}_1$  и  $\alpha = \text{Re} - \text{Re}_1$ , перейдем к функции и

переменной, используемых в соотношениях (1)-(2):

$$m(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{ламинарный} \\ \frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{4}\text{Re}_1, & \text{турбулентный} \end{cases} \quad (26)$$

Из экспериментов известно, что при малых числах Рейнольдса может быть только ламинарный режим течения, а при больших – как ламинарный, так и турбулентный, поэтому ветвью решения в выражении (26):  $m_1(\alpha) = \alpha$ , следует обозначить решение, соответствующее ламинарному режиму, а ветвью решения:

$m_2(\alpha) = \frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{4}\text{Re}_1$ , следует обозначить решение, соответствующее турбулентному (стохастическому) режиму течения жидкости (см. [17-18]).

Поскольку  $\text{Re}_1$  - значение числа Рейнольдса, при котором становится возможен «уход» с ветви «1», то

$$\alpha_1 = \text{Re}_1 - \text{Re}_1 = 0 \quad \text{и} \quad m_1 = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1} \stackrel{def}{=} \alpha_1 = 0. \quad (27)$$

Значение производной при этом на ветви «1» равно:

$$dm_1/d\alpha \stackrel{def}{=} dm_1(\alpha)/d\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 1. \quad (28)$$

«Переход» на ветвь «2» будет происходить в точке  $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha = \Delta\alpha = Re_2 - Re_1$ . И, поэтому,

$$m_2(\alpha) \stackrel{def}{=} m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2} = \frac{5}{4}(Re_2 - Re_1) + \frac{1}{4}Re_1 = \frac{5}{4}\alpha_2 + \frac{1}{4}Re_1. \quad (29)$$

Значение производной при этом на ветви «2» равно:

$$\frac{dm_2(\alpha)}{d\alpha} \stackrel{def}{=} \frac{dm_2(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = \frac{5}{4}. \quad (30)$$

Подставляя значения функций и их производных (27)-(30) в соответствующих точках в соотношение (1), получим решения этого уравнения:  $\alpha_2 = -\frac{1}{5}Re_1$ ,

$$\alpha_2 = -\frac{1}{9}Re_1 \text{ и } \alpha_2 = -Re_1.$$

Соотношению (2) удовлетворяют только первые два решения:

$$\alpha_2 = Re_2 - Re_1 = -\frac{1}{5}Re_1, \quad \alpha_2 = Re_2 - Re_1 = -\frac{1}{9}Re_1. \text{ Из них следует, что либо } Re_2 = \frac{4}{5}Re_1,$$

либо  $Re_2 = \frac{8}{9}Re_1$ , где  $Re_1$  - это значение критического числа Рейнольдса,

рассчитанного по скорости на оси канала  $U_1$ , при котором осуществляется «уход»

из ламинарного режима течения, а  $Re_2$  - это значение критического числа

Рейнольдса, рассчитанного по скорости на оси канала  $U_2$ , при котором осуществляется «приход» в турбулентный режим течения. И, следовательно,

$$\text{либо } U_2 = \frac{4}{5}U_1, \quad \text{либо } U_2 = \frac{8}{9}U_1. \quad (31)$$

Таким образом, теоретически показано, что скорость на оси канала при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения должна уменьшаться. Это объясняется тем, что при заданном перепаде давления при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения часть энергии жидкости переходит в энергию вихреобразования, в том числе с составляющей скорости, направленной в сторону, противоположную основному потоку. В связи с этим, профиль скорости при турбулентном режиме течения имеет более «наполненный» вид в пристеночных областях, а на оси канала и в центральной части скорость уменьшается. Зная соотношения (31), можно, в частности, определять значения параметра  $B$  в выражении для зависимости скорости турбулентного течения в центре канала от расстояния до стенки (25) при разных значениях числа Рейнольдса (без учета влияния на скорость течения «шероховатостей» на стенках).

К сожалению, метод «разрывных функций» в данном случае не позволяет напрямую получить абсолютное значение критического числа Рейнольдса, однако, воспользовавшись соотношениями (31), можно рассчитать критическое значение числа Рейнольдса, используя идеологию «пути смешения». Остановимся на этом подробнее, рассматривая вначале первое решение (31):  $U_2 = \frac{4}{5}U_1$ .

Модуль разности максимальных значений скоростей течения жидкости в канале при двух режимах течения: ламинарном и турбулентном, должен быть такой, который допускал бы процесс вихреобразования. Можно предположить, что характерный размер такого процесса:  $l_v$ , должен быть не больше половины длины пути смешения  $l$ .

Понятие - “путь смешения” - ввел Прандтль. По его определению, это величина, которая характеризует расстояние, проходимое частицей («молекул») жидкости поперек течения, прежде чем произойдет ее смешение с окружающей жидкостью. Выражение для пути смешения имеет вид:

$$l = \kappa \left| \frac{dV/dy}{d^2V/dy^2} \right|, \quad (32)$$

где  $\kappa \approx 0,4$  - постоянная Кармана. Это выражение найдено полуэмпирическим путем, поскольку позволяет получать логарифмический профиль с коэффициентом – постоянной Кармана – найденными экспериментально.

Поскольку в данной работе логарифмический профиль в центральной части канала и значение постоянной Кармана найдены аналитически, то использование выражения (32) можно считать теоретически обоснованным.

Для того чтобы имел место процесс вихреобразования, при прохождении расстояния, равного длине пути смешения один вихрь максимально возможного размера  $l_v$  должен разделиться хотя бы на два вихря. То есть,

$$l_v \leq l/2 = \frac{\kappa}{2} \left| \frac{dV/d\xi}{d^2V/d\xi^2} \right|. \quad (33)$$

Производную  $dV/d\xi$  можно оценить, предполагая, что изменение скорости в центре канала при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения при критическом числе Рейнольдса порождает вихри самого большого размера – порядка полуширины канала. То есть

$$\frac{dV}{d\xi} \approx \frac{U_2 - U_1}{b} = -\frac{1}{5} \frac{U_1}{b}. \quad (34)$$

Вторую производную скорости  $d^2V/d\xi^2$  можно оценить с помощью отношения разности производных для двух масштабов вихрей: максимально и минимально возможных:

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} \approx \frac{(U_2 - U_1)/b - V_*/y_*}{b - y_*} \approx -\frac{1}{5} \frac{U_1}{b^2} - 2 \frac{U_1}{b^2} = -\frac{11}{5} \frac{U_1}{b^2}. \quad (35)$$

Подставляя выражения (34) и (35) в (33), получим соотношение:  $l_v \leq b \cdot \kappa/22$ .

Остановимся на случае, когда на длине пути смешения вихрь успевает разделиться ровно на два вихря. Тогда найденный характерный размер  $l_v$  должен быть порядка динамической длины:  $y_* \sim \nu/V_*$ , на которой происходит диссипация кинетической энергии вихревого движения частиц жидкости в тепло:  $l_v \sim y_* = b/\sqrt{2\text{Re}_1}$ . Следовательно,  $b \cdot \kappa/22 \sim b/\sqrt{2\text{Re}_1}$ . То есть значение минимально возможного – критического значения числа Рейнольдса, при котором становится

возможен процесс вихреобразования (а, следовательно, и «уход» от ламинарного к турбулентному режиму течения):

$$\text{Re}_1 = \frac{U_1 b}{\nu} \sim \frac{1}{2} \left( \frac{22}{0,4} \right)^2 \approx 1513.$$

А минимальное критическое значение числа Рейнольдса «выхода» на турбулентный режим течения будет, соответственно, равно:

$$\text{Re}_2 = \frac{4}{5} \text{Re}_1 \approx \frac{4}{5} 1513 \approx 1210. \quad (36)$$

По имеющимся экспериментальными данными [24-27], критическое значение числа Рейнольдса выхода на турбулентный режим в плоском течении Пуазейля составляет, примерно, 1000.

То есть теоретически найденное критическое значение числа Рейнольдса (36), при котором становится возможен переход от ламинарного режима течения к турбулентному, незначительно (с точностью порядка пятнадцати процентов) больше аналогичного значения, найденного экспериментальными методами. Напомним, что по теоретическим расчетам S.A. Orszag, найденное значение критического числа Рейнольдса потери линейной устойчивости ламинарного режима плоского течения Пуазейля, составляет 5772, что в несколько раз превышает экспериментальные данные.

Стоит отметить, что плоское течение – это идеализированный вариант реального течения жидкости в канале. В частности, в реальном канале всегда присутствуют ограничения в виде стенок в нерассматриваемом в задаче поперечном

направлении. Их влияние на течение в экспериментах пытаются минимизировать, удаляя их на максимально возможное расстояние, однако нельзя полностью исключить, что некоторые моды колебаний, отсутствующие при «идеальной» постановке задачи, не смогут возникнуть и существовать в реальном эксперименте. Это, в свою очередь, способно повлиять на более ранний ламинарно-турбулентный переход в реальном плоском канале по сравнению с «идеальным» плоским течением Пуазейля, что в свою очередь может объяснить незначительное отличие критических значений числа Рейнольдса, найденных экспериментально и определенных теоретически в данной работе.

Проделав математические процедуры для второго решения соотношения (24):  $\alpha_2 = -Re_1/9$ , аналогичные тем, которые описаны для первого решения, получим критическое значение числа Рейнольдса, равное  $Re_2 \approx 4000$ .

Первый и второй турбулентные режимы течения будут иметь функционально подобные профили течения, по крайней мере, в пристеночной области. Однако профили течения в центральной части, а значит и спектры генерируемых вихрей в этих двух случаях, будут отличаться. Следовательно, при значениях числа Рейнольдса, превышающих величину  $Re \approx 4000$ , в плоском канале с разной вероятностью могут существовать различные режимы течения: ламинарный, первый или второй турбулентный, а также их комбинации и динамические переходы из одного в другой. Вероятно, этим можно объяснить некоторые аспекты процесса перемежаемости турбулентного течения и существования когерентных структур при

больших числах Рейнольдса. Однако этот вопрос чрезвычайно сложный и требует дальнейшего исследования.

### **Заключение**

Существует довольно ограниченный класс задач гидродинамики, которые допускают аналитические решения в рамках интегрирования уравнений Навье-Стокса. Наиболее известными из них являются задача Хагена-Пуазейля, описывающая течение несжимаемой вязкой жидкости в трубе кругового сечения, плоская задача Куэтта, в которой описывается течение несжимаемой вязкой жидкости, помещенной между двумя движущимися в противоположных направлениях пластинами, и плоская задача Пуазейля, описывающая течение несжимаемой вязкой жидкости в бесконечном плоском канале под действием градиента давления. Полностью детерминированный подход к описанию жидкости с помощью уравнений Навье-Стокса, не учитывающий возбуждения внутренних (стохастических) степеней свободы и соответствующего изменения энтропии, в качестве аналитических решений допускает только решения, характеризующие ламинарные режимы течения. Причем, первые две задачи обладают устойчивостью ламинарных режимов к линейным (бесконечно малым) возмущениям при любых значениях числа Рейнольдса. Для плоского течения Пуазейля существует ограничение по устойчивости ламинарного режима течения, однако, критическое



число Рейнольдса потери линейной устойчивости, рассчитанное S.A. Orszag, составляет 5772, что почти в шесть раз превышает экспериментальные данные.

В настоящей работе метод описания гидродинамических стохастических систем с использованием модифицированных уравнений Навье-Стокса, записанных в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной, описывающей производство энтропии стохастической системы, позволяет при больших числах Рейнольдса найти два решения плоской задачи Пуазейля: одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному. Первое решение во всей области течения жидкости характеризуется параболическим профилем скорости, второе - в центральной области характеризуется логарифмическим профилем скорости с множителем, обратно пропорциональным постоянной Кармана, который также был определен в данной работе аналитически.

Небольшое отличие первого и второго решений непосредственно у стенки для двух режимов течения в плоском канале, позволило аналитически, с помощью метода описания «разрывных» функций, найти критическое значение числа Рейнольдса, при котором возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения:  $Re \approx 1210$ , что достаточно хорошо соотносится с экспериментальными данными. Обсуждены вопросы отличия реальных и «идеальных» течений в плоском канале, которые могут быть причиной разницы значений критических чисел Рейнольдса, полученных экспериментальными и

теоретическими методами.

### Библиографический список

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физмалит, 2005. - 288 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. Т. VI. - 731 с.
4. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows // 24th Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper, July 6 – 9, 1993, Orlando, Florida, № 93-2906, available at:  
[https://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1993\\_Menter\\_Zonal%20Two%20Equation%20k-w%20Turbulence%20Models%20for%20Aerodynamic%20Flows\(2\).pdf](https://cfд.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1993_Menter_Zonal%20Two%20Equation%20k-w%20Turbulence%20Models%20for%20Aerodynamic%20Flows(2).pdf)
5. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Development and Validation // Computers Fluids, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227 – 238.
6. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // Journal of Fluid Mechanics, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537 – 566.
7. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation // International Journal of Heat and Fluid Flow, 2000, vol. 21, no. 3, pp 252 – 263.

8. Launder B.E., Spalding D.B. Lectures in Mathematical Models of Turbulence, London, Academic Press, 1972, 169 p.
9. Wilcox David C. Turbulence Modeling for CFD, Second edition, Anaheim: DCW Industries, 1998, pp. 174.
10. Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B., Speziale C.G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // Physics of Fluids, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 510 – 520.
11. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75565>
12. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58536>
13. До С.З. Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49670>
14. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34402>
15. Усачов А.Е., Мазо А.Б., Калинин Е.И., Исаев С.А., Баранов П.А., Семилет Н.А. Повышение эффективности численного моделирования турбулентных отрывных течений с помощью применения гибридных сеток со структурированными

разномасштабными блоками и неструктурированными вставками // Труды МАИ. 2018. № 99. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=92088>

16. Никущенко Д.В., Мялкин Р.А. Моделирование кавитационного обтекания крыла на основе методов вычислительной гидродинамики // Морские интеллектуальные технологии. 2014. № 2-4(26). С. 83 - 87.

17. Хатунцева О.Н. О нахождении критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=96567>

18. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102091>

19. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105673>

20. Хатунцева О.Н. Об учете влияния стохастических возмущений на решения уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93311>

21. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98854>

22. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Естественные и технические науки. 2017. № 1. С. 255 - 257.
23. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12. № 2. С. 231 - 241.
24. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // Physics of Fluids, 1995, no. 7, pp. 335 – 343.
25. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow // Europhysics Letters, 1998, no. 43, pp. 171 – 176.
26. Tuckerman Lurette S., Kreilos T, Schrobsdorff H., Schneider Tobias M., Gibson John F. Turbulent-laminar patterns in plane Poiseuille flow // Physics of Fluids, 2014, vol. 26, issue 11, available at: <https://doi.org/10.1063/1.4900874>
27. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // Journal of Fluid Mechanics, 1980, vol. 96, pp. 159 - 205.