Труды МАИ. 2022. № 126
Trudy MAI, 2022, no. 126

ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

Научная статья
УДК 517.977.1
DOI: 10.34759/trd-2022-126-17

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Данис Наилевич Ибрагимов[1], Анастасия Вячеславовна Берендакова[2]
[1,2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
[1]rikk.dan@gmail.com
[2]abv1998@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматривается линейная двумерная дискретная система управления с ограниченным управлением. Требуется найти предельное множество 0 управляемости, то есть множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему в начало координат за конечное число шагов посредством выбора допустимого управления. Сформулирована теорема о необходимых и достаточных условиях ограниченности предельного множества 0-управляемости, доказано, что структура предельного множества 0-управляемости может быть найдена, если известны собственные векторы и собственные значения матрицы системы. В случае ограниченных асимптотических множеств управляемости в ряде лемм найдены их эффективные с вычислительной точки зрения оценки в виде полиэдров, а в случае неограниченных – точное описание структуры множества. Построено предельное множество 0-управляемости для прикладного примера – твёрдого тела (аэростата), подвешенного на струне и способного совершать вращательные движения.

Ключевые слова: дискретная двумерная система управления, множество управляемости, ограниченный полиэдр, выпуклый многогранник, выпуклый компакт

Для цитирования: Ибрагимов Д.Н., Берендакова А.В. Метод построения и оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-17

INFORMATICS, COMPUTATION ENGINEERING AND MANAGEMENT

Original article

METHOD OF CONSTRUCTING AND ESTIMATING ASYMPTOTIC CONTROLLABILITY SETS OF TWO-DIMENSIONAL LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH LIMITED CONTROL

Danis N Ibragimov[1], Anastasia V. Berendakova[2]

[1,2]Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

[1]rikk.dan@gmail.com

[2]abv1998@yandex.ru

Abstract. The paper considers a linear two-dimensional discrete controlling system with limited control. It is required to find the limiting set of zero-controllability, that is, the set of those initial states from which it is possible to transfer the system to the origin in a finite number of steps by choosing an acceptable control. The approach to solving this problem differs depending on the type of the normal Jordan form of the matrix of the system. In this paper, three different types of normal Jordan forms are considered.

For systems with two non-multiple eigenvalues of the matrix of the system, three lemmas on the structure of the asymptotic set are proved: in the first case, when both eigenvalues are modulo greater than one, the limit set of 0-controllability is bounded and the intersection of two bands acts as its estimate; in the second case, when both eigenvalues of the matrix of the system are less than or equal modulo one, the limiting set 0 of controllability coincides with the phase plane; in the third case, when one eigenvalue modulo exceeds one, and the other is less than or equal to one, the limiting set of 0-controllability has the structure of an unlimited band.

For systems with a single eigenvalue of multiplicity two, two lemmas on the structure of an asymptotic set are proved: in the first case, when the eigenvalue modulo is less than or equal to one, the limit set of 0-controllability coincides with the phase plane, in the second case, when the eigenvalue modulo is greater than one, the estimate of the limit set of 0-controllability is the intersection of two lanes.

For systems with complex eigenvalues, two lemmas on the structure of an asymptotic set are proved: in the case when the eigenvalue modulus is greater than one, the limiting set of 0-controllability can be estimated from above by an ellipse, in the opposite case, the limiting set of 0-controllability coincides with the phase plane.

The limiting set of zero-controllability is constructed for an applied example - a solid body (balloon) suspended on a string and capable of performing rotational movements.

Keywords: two-dimensional discrete controlling system, set of controllability, bounded polyhedron, convex polyhedron, convex compact set

For citation: Ibragimov D.N., Berendakova A.V. Method of Constructing and Estimating Asymptotic Controllability Sets of Two-Dimensional Linear Discrete Systems with Limited Control. *Trudy MAI,* 2022, no. 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-17

1. Введение

Вопросы построения множеств достижимости и управляемости [1-4] тесно связаны с задачами управления динамическими системами. В большинстве механических систем управляющее воздействие является ограниченным по своим возможностям: реактивные двигатели летательного аппарата имеют ограниченную тягу и конечный запас топлива, сервоприводы различных роботизированных систем также способны развивать некоторое фиксированное усилие. Данные ограничения приводят к тому, что управляемый объект может быть выведен на желаемый режим работы вообще говоря не из всех начальных состояний. В связи с этим оказывается актуальной задача анализа каждого отдельно взятого начального состояния на вопрос управляемости и достижимости [5].

Для дискретных систем управления известен подход, направленный на построение асимптотических множеств управляемости и достижимости. Однако зачастую даже в линейном случае удаётся только сформулировать достаточные условия того, что данные множества будут ограниченными. При этом даются только самые общие оценки их структуры: в [1] продемонстрировано, что асимптотические множества управляемости и достижимости линейных систем представляют собой цилиндр с некоторым выпуклым сечением. В [2] также в случае определённой структуры матрицы линейной системы на основе принципа максимума предложен метод оценивания асимптотического множества достижимости.

Однако даже в случае линейных ограничений на управление построение последовательности множеств управляемости сопряжено с серьезными вычислительными проблемами: каждое множество представляет собой многогранник, число вершин которого растет экспоненциально в зависимости от рассматриваемого временного горизонта [6,7]. Данный факт затрудняет использование аппарата множеств управляемости при решении задач управления динамическими системами на сколь-нибудь значимом промежутке времени. Данного затруднения возможно избежать, если предложить алгоритм, позволяющий с приемлимой вычислительной сложностью построить оценку предельного множества управляемости, основываясь только на матрице системы и множестве допустимых значений управлений.

Например, при рассмотрении задачи быстродействия для систем с дискретным временем [8, 9] вопрос разрешимости тесно связан с построением последовательности множеств 0-управляемости. По причинам описанным ранее данный процесс оказывается затруднительно реализовать посредством компьютерных технологий. В свою очередь, имея возможность построить предельное множество 0-управляемости либо его оценку, можно для ряда начальных состояний определить разрешима ли задача быстродействия в принципе.

В рамках данной работы изучаются двумерные линейные дискретные системы управления. Получены необходимые и достаточные условия, при которых предельные множества 0-управляемости являются ограниченными. Анализ системы при этом сводится исключительно к вычислению собственных векторов и собственных значений. Неограниченные асимптотические множества 0-управляемости удаётся построить точно в явном виде, и они представляют собой либо всю фазовую плоскость, либо полосу симметричную относительно начала координат. В случае, когда асимптотическое множество 0-управляемости является ограниченным, удаётся построить его внешнюю оценку в виде многогранника. На основе разработанного программного обеспечения проведены численные расчёты для различных примеров, моделирующих динамику динамических систем.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная двумерная дискретная система с ограниченным управлением (A, U):

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\ &x(0) = x_0, u(k) \in U, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(k) \in \mathbf{R}^2$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbf{R}^2$ – вектор управления, $U \subset \mathbf{R}^2$ – множество допустимых значений управлений, предполагается, что U – выпуклый компакт, $0 \in \mathrm{ri}\ U$, $U = -U$, то есть U симметрично относительно 0, $A \in \boldsymbol{R}^{2\times 2}$ – матрица системы.

Определим класс множеств 0-управляемости $\{X(N)\}_{N=0}^{\infty}$, где $X(N)$ – множество начальных состояний, из которых систему (1) можно перевести в начало координат за N шагов:

$$X(N) = \begin{cases} \{0\}, N = 0, \\ \{x_0 \in \mathbf{R}^2 \colon \exists u(0), \dots, u(N-1) \in U \colon x(N) = 0\}, N \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Требуется построить предельное множество 0-управляемости:

$$X_\infty = \bigcup_{N=0}^{\infty} X(N),$$

то есть множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1) в начало координат за конечное число шагов посредством выбора допустимого управления.

Лемма 1 ([10, лемма 1]). *Пусть для системы* (1) *верно, что* $det\ \ A \neq 0$. *Тогда для всех* $N \in \mathbf{N}$ *справедливо представление*

$$X(N) = -\sum_{i=1}^{N} A^{-i}U.$$

Касательно исследуемой задачи с учетом определения X_∞ лемма 1 также делает допустимым следующее представление:

$$X_\infty = \bigcup_{N=1}^{\infty} X(N) = \bigcup_{N=1}^{\infty}\left(-\sum_{i=1}^{N} A^{-i}U\right).$$

3. Внешние оценки асимптотических множеств 0-управляемости

Для изучения проблематики поставленной задачи произведём следующую замену и переход к эквивалентной системе $(J, S^{-1}U)$:

$$\begin{aligned}
&A = S \cdot J \cdot S^{-1},\\
&y_0 = S^{-1}x_0,\\
&v(k) = S^{-1}u(k),\\
&y(k) = S^{-1}x(k), k \in \mathbf{N} \cup \{0\},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $J \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ – нормальная жорданова форма матрицы A, $S \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ – матрица перехода в нормальный жорданов базис, в котором преобразование A задаётся матрицей J [11].

С учётом переобозначений (3) исходная система (1) может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{cases} x(k+1) = SJS^{-1}x(k) + u(k), \\ x(0) = x_0, \qquad u(k) \in U, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^{-1}x(k+1) = JS^{-1}x(k) + S^{-1}u(k), \\ S^{-1}x(0) = S^{-1}x_0, \qquad S^{-1}u(k) \in S^{-1}U. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &y(k+1) = Jy(k) + v(k), \\ &y(0) = y_0, \qquad v(k) \in S^{-1}U, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Если через Y_∞ и $Y(N)$ обозначить предельное множество 0-управляемости и множество 0-управляемости за N шагов системы $(J, S^{-1}U)$, справедливы будут также следующие равенства:

$$Y(N) = -\sum_{i=1}^{N} J^{-i}(S^{-1}U) = S^{-1}X(N),$$

$$Y_\infty = S^{-1}X_\infty.$$

Таким образом структура искомого X_∞ однозначно определяется нормальной жордановой формой матрицы A. Как продемонстрировано в [11], для матрицы из $\mathbf{R}^{2\times 2}$ существуют три принципиально различных вида нормальной жордановой формы:

$$1) \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$2) \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$3) \quad J = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Случай (5) соответствует двум некратным действительным собственным значениям матрицы A, либо одному собственному значению кратности два, которому соответствуют два линейно независимых собственных вектора. Случай (6) соответствует единственному собственному значению кратности два, которому соответствует единственный с точностью до сомножителя собственный вектор. Случай (7) соответствует комплексным собственным значениям матрицы системы.

Далее рассмотрим каждый из случаев $(5)-(7)$ отдельно.

3.1. Случай некратных действительных собственных значений матрицы системы

В рамках данного подраздела предполагается, что матрица A имеет два действительных собственных значения $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, либо одно собственное значение кратности два, которому соответствуют два линейно независимых собственных вектора $h_1, h_2 \neq 0$.

$$Ah_1 = \lambda_1 h_1, Ah_2 = \lambda_2 h_2.$$

Лемма 2. *Пусть нормальная жорданова форма матрицы системы* (1) *удовлетворяет случаю* (5), $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ *– собственные значения, соответствующие линейно независимым собственным векторам* h_1 *и* h_2 *соответственно, для каждого* $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *справедливо разложение*

$$\begin{aligned} u(k) &= u_1(k)h_1 + u_2(k)h_2, \\ x_0 &= x_{0,1}h_1 + x_{0,2}h_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда для всех $N \in \mathbf{N}$ *выполнено равенство*

$$x(N) = \left(\sum_{j=1}^{N} u_1(N-j)\lambda_1^{j-1} + x_{0,1}\lambda_1^N\right) h_1 + \left(\sum_{j=1}^{N} u_2(N-j)\lambda_2^{j-1} + x_{0,2}\lambda_2^N\right) h_2.$$

Доказательство. В силу рекуррентных соотношений (1) и разложения (8) верно, что

$$x(N) = A^N(x_{0,1}h_1 + x_{0,2}h_2) + \sum_{j=1}^{N} A^{j-1}(u_1(N-j)h_1 + u_2(N-j)h_2) =$$

$$= x_{0,1}\lambda_1^N h_1 + x_{0,2}\lambda_2^N h_2 + \sum_{j=1}^{N} (u_1(N-j)\lambda_1^{j-1}h_1 + u_2(N-j)\lambda_2^{j-1}h_2) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{N} u_1(N-j)\lambda_1^{j-1} + x_{0,1}\lambda_1^N\right) h_1 + \left(\sum_{j=1}^{N} u_2(N-j)\lambda_2^{j-1} + x_{0,2}\lambda_2^N\right) h_2.$$

Лемма 3. *Пусть верны предположения леммы* 2 *и* $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_2| > 1$. *Тогда*

$$X_\infty \subset \left\{x_{0,1}h_1 + x_{0,2}h_2 \colon |x_{0,i}| < \tfrac{u_{i,max}}{|\lambda_i|-1}, i \in \{1,2\}\right\},$$

$$u_{i,max} = \max\{u_i > 0 \colon u_1h_1 + u_2h_2 \in U\}, i \in \{1,2\}.$$

Доказательство. По построению $-u_{i,max} \leqslant u_i(j) \leqslant u_{i,max}$, $j = \overline{0, N-1}$, $i \in \{1,2\}$. Из чего следует, что

$$-\sum_{j=1}^{N} |\lambda_i|^{j-1}u_{i,max} \leqslant \sum_{j=1}^{N} u_i(N-j)\lambda_i^{j-1} \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\lambda_i|^{j-1}u_{i,max},$$

$$-u_{i,max}\frac{|\lambda_i|^N - 1}{|\lambda_i| - 1} \leqslant \sum_{j=1}^{N} u_i(N-j)\lambda_i^{j-1} \leqslant u_{i,max}\frac{|\lambda_i|^N - 1}{|\lambda_i| - 1}. \quad (9)$$

Выберем $x_0 \in \mathbf{R}^2$ так, чтобы для некоторого $i \in \{1,2\}$ было верно неравенство

$$|x_{0,i}| \geqslant \frac{u_{i,max}}{|\lambda_i|-1}.$$

Тогда для всех $N \in \mathbf{N}$

$$|x_{0,i}| > \frac{u_{i,max}}{|\lambda_i|-1}\left(1-\frac{1}{|\lambda_i|^N}\right) = \frac{u_{i,max}}{|\lambda_i|^N} \cdot \frac{|\lambda_i|^N-1}{|\lambda_i|-1}.$$

Откуда следует в силу леммы 2 и (9), что $x(N) \neq 0$, то есть $x_0 \notin X(N)$. Тогда $x_0 \notin X_\infty$.

Замечание 1. Фактически лемма 3 утверждает, что X_∞ в данном случае лежит внутри пересечения двух полос, то есть его внешняя оценка представляет собой параллелограмм.

Лемма 4. *Пусть верны предположения леммы* 2 *и* $|\lambda_1| \leqslant 1$, $|\lambda_2| \leqslant 1$.

Тогда $X_\infty = \mathbf{R}^2$.

Доказательство. Рассмотрим случай $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$. Положим $u_1(j) = u_2(j) = 0$ для всех $j = \overline{0, N-2}$. Тогда в силу леммы 2

$$x(N) = x_{0,1}\lambda_1^N h_1 + x_{0,2}\lambda_2^N h_2 + u_1(N-1)h_1 + u_2(N-1)h_2.$$

Заметим, что $x_{0,i}\lambda_i^N \xrightarrow{N\to\infty} 0$, $i = \{1,2\}$. То есть найдётся $N \in \mathbf{N}$ такой, что $x_{0,1}\lambda_1^N h_1 + x_{0,2}\lambda_2^N h_2 \in O_\varepsilon(0)$, где $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы выполнялось включение $O_\varepsilon(0) \subset U$, что возможно, так как $0 \in \operatorname{int} U$.

Выберем управление $u_1(N-1) = -x_{0,1}\lambda_1^N, u_2(N-1) = -x_{0,2}\lambda_2^N$. Тогда

$$x(N) = x_{0,1}\lambda_1^N h_1 + x_{0,2}\lambda_2^N h_2 + (-x_{0,1}\lambda_1^N h_1 - x_{0,2}\lambda_2^N h_2) = 0.$$

Откуда следует, что

$$x_0 \in X(N) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} X(N) = X_\infty.$$

Поскольку данное включение справедливо для любого $x_0 \in \mathbf{R}^2$, то $X_\infty = \mathbf{R}^2$.

Рассмотрим случай $|\lambda_1| = 1$, $|\lambda_2| = 1$. Обозначим

$$u_{1,max} = \max\{u_1 > 0: \quad u_1 h_1 + u_2 h_2 \in U, u_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Тогда найдутся $N_1 \in \mathbf{N}$ и $\tilde{u}_1 \in [0; u_{1,max}]$ такие, что

$$|x_{0,1}| = N_1 \cdot \tilde{u}_1.$$

Выберем

$$u_1(N_1 - j) = -\mathrm{sign}(\lambda_1^{N_1+j-1} \cdot x_{0,1})\tilde{u}_1, \qquad j = \overline{1, N_1}.$$

Тогда в силу леммы 2

$$x(N_1) = \lambda_2^{N_1} x_{0,2} h_2 + \sum_{j=1}^{N_1} u_2(N_1 - j)\lambda_2^{j-1} h_2.$$

Обозначим

$$x_2 = \lambda_2^{N_1} x_{0,2} + \sum_{j=1}^{N_1} u_2(N_1 - j) \cdot \lambda_2^{j-1},$$
$$u_{2,\max} = \max\{u_2 > 0: u_2 h_2 \in U\}.$$

Тогда найдутся $N_2 \in \mathbf{N}$ и $\tilde{u}_2 \in [0; u_{2,\max}]$ такие, что

$$|x_2| = N_2 \cdot \tilde{u}_2.$$

Выберем $u_1(N_1 + N_2 - j) = 0, u_2(N_1 + N_2 - j) = -\tilde{u}_2 \cdot \ \mathrm{sign}\ \left(\lambda_2^{N_2+j-1} \cdot x_2\right), j = \overline{1, N_2}.$

Тогда с учётом леммы 2

$$x(N_1+N_2) = A^{N_2}x_2h_2 + \sum_{j=1}^{N_2} A^{j-1}u(N_1+N_2-j) =$$
$$= \left(\lambda_2^{N_2}x_2 + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_2^{j-1}u_2(N_1+N_2-j)\right)h_2 =$$
$$= \left(\lambda_2^{N_2}x_2 - \sum_{j=1}^{N_2} |\lambda_2|^{j-1}\operatorname{sign}(\lambda_2^{N_2}x_2)\tilde{u}_2\right)h_2 =$$
$$= \operatorname{sign}(\lambda_2^{N_2}x_2)(|\lambda_2|^{N_2}|x_2| - N_2\tilde{u}_2)h_2 = 0.$$

Откуда следует, что

$$x_0 \in X(N_1+N_2) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} X(N) = X_\infty.$$

Поскольку данное включение справедливо для любого $x_0 \in \mathbf{R}^2$, то $X_\infty = \mathbf{R}^2$.

Рассмотрим случай $|\lambda_1| = 1,\ |\lambda_2| < 1$. Обозначим

$$u_{1,max} = \max\{u_1 > 0: \quad u_1h_1 + u_2h_2 \in U, u_2 \in \mathbf{R}\}.$$

Тогда найдутся $N_1 \in \mathbf{N}$ и $\tilde{u}_1 \in [0; u_{1,max}]$ такие, что

$$\left|x_{0,1}\right| = N_1 \cdot \tilde{u}_1.$$

Выберем

$$u_1(N_1-j) = -\operatorname{sign}(\lambda_1^{N_1+j-1} \cdot x_{0,1})\tilde{u}_1,\ j = \overline{1, N_1}.$$

Тогда в силу леммы 2

$$x(N_1) = \lambda_2^{N_1}x_{0,2}h_2 + \sum_{j=1}^{N_1} u_2(N_1-j)\lambda_2^{j-1}h_2.$$

Обозначим

$$x_2 = \lambda_2^{N_1}x_{0,2} + \sum_{j=1}^{N_1} u_2(N_1-j) \cdot \lambda_2^{j-1},$$

Положим $u_1(N_1+N_2-j)=u_2(N_1+N_2-j)=0,$ для всех $j=\overline{1,N_2}$. Тогда в силу леммы 2

$$x(N_1+N_2)=x_2\lambda_2^{N_2}h_2+u_1(N_1+N_2-1)h_1+u_2(N_1+N_2-1)h_2.$$

Заметим, что $x_2\lambda_2^{N_2}\overset{N_2\to\infty}{\longrightarrow}0.$

То есть найдётся $N_2\in\mathbf{N}$ такой, что $x_2\lambda_2^{N_2}h_2\in O_\varepsilon(0)$, где $\varepsilon>0$ выбрано так, чтобы выполнялось включение $O_\varepsilon(0)\subset U$, что возможно, так как $0\in\operatorname{int}\ U$.

Выберем управление $u_1(N_1+N_2-1)=0, u_2(N_1+N_2-1)=-x_2\lambda_2^{N_2}$. Тогда

$$x(N_1+N_2)=0.$$

Откуда следует, что

$$x_0\in X(N_1+N_2)\subset\bigcup_{N=0}^{\infty}X(N)=X_\infty.$$

Поскольку данное включение справедливо для любого $x_0\in\mathbf{R}^2$, то $X_\infty=\mathbf{R}^2$.

Лемма 5. *Пусть верны предположения леммы* 2 $|\lambda_1|>1,\ |\lambda_2|\leqslant 1$. *Тогда*

$$X_\infty=\left\{x_{0,1}h_1+x_{0,2}h_2\colon |x_{0,1}|<\frac{u_{1,max}}{|\lambda_1|-1}, x_{0,2}\in\mathbf{R}\right\},$$

$$u_{1,max}=\max\{u_1>0\colon u_1h_1+u_2h_2\in U\}.$$

Доказательство. По построению $-u_{1,\max}\leqslant u_1(j)\leqslant u_{1,\max}$, $j=\overline{0,N-1}$. Из чего следует, что

$$-\sum_{j=1}^{N}|\lambda_1|^{j-1}u_{1,\max}\leqslant\sum_{j=1}^{N}u_1(N-j)\lambda_1^{j-1}\leqslant\sum_{j=1}^{N}|\lambda_1|^{j-1}u_{1,\max},$$

$$-u_{1,max}\frac{|\lambda_i|^N-1}{|\lambda_1|-1}\leqslant\sum_{j=1}^{N}u_1(N-j)\lambda_1^{j-1}$$

$$\leqslant u_{1,\max}\frac{|\lambda_i|^N-1}{|\lambda_1|-1}. \qquad (10)$$

Выберем $x_0\in\mathbf{R}^2$ так, чтобы было верно неравенство

$$|x_{0,1}|\geqslant\frac{u_{1,\max}}{|\lambda_1|-1}.$$

Тогда для всех $N\in\mathbf{N}$

$$|x_{0,1}|>\frac{u_{1,\max}}{|\lambda_1|-1}\left(1-\frac{1}{|\lambda_1|^N}\right)=\frac{u_{1,\max}}{|\lambda_1|^N}\cdot\frac{|\lambda_1|^N-1}{|\lambda_1|-1}.$$

Откуда следует в силу леммы 2 и (10), что $x(N)\neq 0$, то есть $x_0\notin X(N)$. Тогда $x_0\notin X_\infty$. Таким образом

$$X_\infty\subset\left\{x_{0,1}h_1+x_{0,2}h_2\colon|x_{0,1}|<\frac{u_{1,\max}}{|\lambda_1|-1},\ x_{0,2}\in\mathbf{R}\right\}.$$

Выберем $x_0\in\mathbf{R}^2$ так, чтобы было верно неравенство

$$|x_{0,1}|<\frac{u_{1,\max}}{|\lambda_1|-1}.$$

Тогда найдутся $N_1\in\mathbf{N}$ и $\tilde{u}_1\in[0;u_{1,\max}]$ такие, что

$$|x_{0,1}|=\frac{\tilde{u}_1}{|\lambda_1|-1}\left(1-\frac{1}{|\lambda_1|^{N_1}}\right)=\frac{\tilde{u}_1}{|\lambda_1|^{N_1}}\cdot\frac{|\lambda_1|^{N_1}-1}{|\lambda_1|-1}=\frac{1}{|\lambda_1|^{N_1}}\sum_{j=1}^{N_1}\tilde{u}_1\cdot|\lambda_1|^{j-1},$$

$$|x_{0,1}\cdot\lambda_1^{N_1}|=\sum_{j=1}^{N_1}\tilde{u}_1|\lambda_1|^{j-1}. \qquad (11)$$

Выберем

$$u_1(N_1-j)=-\mathrm{sign}(\lambda_1^{N_1+j-1}\cdot x_{0,1})\tilde{u}_1,\ j=\overline{1,N_1}.$$

Тогда в силу леммы 2 и (11)

$$x(N_1) = \lambda_2^{N_1} x_{0,2} h_2 + \sum_{j=1}^{N_1} u_2(N_1 - j) \lambda_2^{j-1} h_2.$$

Обозначим

$$x_2 = \lambda_2^{N_1} x_{0,2} + \sum_{j=1}^{N_1} u_2(N_1 - j) \cdot \lambda_2^{j-1}.$$

Пусть $|\lambda_2| < 1$. Положим $u_1(N_1 + N_2 - j) = u_2(N_1 + N_2 - j) = 0$, для всех $j = \overline{1, N_2}$. Тогда в силу леммы 2

$$x(N_1 + N_2) = x_2 \lambda_2^{N_2} h_2 + u_1(N_1 + N_2 - 1) h_1 + u_2(N_1 + N_2 - 1) h_2.$$

Заметим, что $x_2 \lambda_2^{N_2} \overset{N_2 \to \infty}{\longrightarrow} 0$. То есть найдётся $N_2 \in \mathbf{N}$ такой, что $x_2 \lambda_2^{N_2} h_2 \in O_\varepsilon(0)$, где $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы выполнялось включение $O_\varepsilon(0) \subset U$, что возможно, так как $0 \in \operatorname{int} U$.

Выберем управление $u_1(N_1 + N_2 - 1) = 0, u_2(N_1 + N_2 - 1) = -x_2 \lambda_2^{N_2}$. Тогда

$$x(N_1 + N_2) = 0.$$

Пусть $|\lambda_2| = 1$. Обозначим

$$u_{2,\max} = \max\{u_2 > 0 : u_2 h_2 \in U\}.$$

Тогда найдутся $N_2 \in \mathbf{N}$ и $\tilde{u}_2 \in [0; u_{2,\max}]$ такие, что

$$|x_2| = N_2 \cdot \tilde{u}_2.$$

Выберем

$$u_1(N_1 + N_2 - j) = 0,$$

$$u_2(N_1+N_2-j) = -\tilde{u}_2 \cdot \operatorname{sign}\left(\lambda_2^{N_2+j-1} \cdot x_2\right), j = \overline{1, N_2}.$$

Тогда с учётом леммы 2

$$x(N_1+N_2) = A^{N_2} x_2 h_2 + \sum_{j=1}^{N_2} A^{j-1} u(N_1+N_2-j) =$$

$$= \left(\lambda_2^{N_2} x_2 + \sum_{j=1}^{N_2} \lambda_2^{j-1} u_2(N_1+N_2-j)\right) h_2 =$$

$$= \left(\lambda_2^{N_2} x_2 - \sum_{j=1}^{N_2} |\lambda_2|^{j-1} \operatorname{sign}(\lambda_2^{N_2} x_2) \tilde{u}_2\right) h_2 =$$

$$= \operatorname{sign}(\lambda_2^{N_2} x_2)(|\lambda_2|^{N_2}|x_2| - N_2 \tilde{u}_2) h_2 = 0.$$

Таким образом справедливо включение

$$x_0 \in X(N_1+N_2) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} X(N) = X_\infty,$$

$$\left\{x_{0,1} h_1 + x_{0,2} h_2 : |x_{0,1}| < \tfrac{u_{1,\max}}{|\lambda_1|-1}, x_{0,2} \in \mathbf{R}\right\} \subset X_\infty.$$

Окончательно получаем, что

$$X_\infty = \left\{x_{0,1} h_1 + x_{0,2} h_2 : |x_{0,1}| < \frac{u_{1,\max}}{|\lambda_1|-1}, x_{0,2} \in \mathbf{R}\right\}.$$

3.2. Случай кратных действительных собственных значений матрицы системы

В рамках данного подраздела предполагается, что матрица A имеет единственное собственное значение кратности два $\lambda \in \mathbf{R}$, которому соответствует единственный с точностью до сомножителя собственный вектор h_1:

$$Ah_1 = \lambda h_1.$$

Известно, что в таком случае существует вектор h_2, присоединенный к h_1:

$$Ah_2 = \lambda h_2 + h_1.$$

При этом h_1 и h_2 линейно независимы [11].

Лемма 6. *Пусть матрица системы* (1) *удовлетворяет случаю* (6) λ – *собственное значение, которому соответствует собственный вектор* $h_1 \in \mathbf{R}^2\backslash\{0\}$, $h_2 \in \mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ – *вектор, присоединённый к* h_1, *для каждого* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *справедливо разложение* (8). *Тогда для всех* $N \in \mathbf{N}$ *выполнено равенство*

$$x(N) = \left(x_{0,1}\lambda^N + x_{0,2}N\lambda^{N-1} + \sum_{j=1}^{N} \big(u_1(N-j)\lambda^{j-1} + \right.$$

$$\left. + u_2(N-j)(j-1)\lambda^{j-2}\big)\right) h_1 + \left(x_{0,2}\lambda^N + \sum_{j=1}^{N} u_2(N-j)\lambda^{j-1}\right) h_2.$$

Доказательство. Заметим, что для всех $k \in \mathbf{N}$ верно равенство

$$A^k h_2 = \lambda^k h_2 + k\lambda^{k-1} h_1.$$

Тогда в силу рекуррентных соотношений (1)

$$x(N) = A^N(x_{0,1}h_1 + x_{0,2}h_2) + \sum_{j=1}^{N} A^{j-1}(u_1(N-j)h_1 + u_2(N-j)h_2) =$$

$$= x_{0,1}A^N h_1 + x_{0,2}A^N h_2 + \sum_{j=1}^{N} \big(u_1(N-j)A^{j-1}h_1 + u_2(N-j)A^{j-1}h_2\big) =$$

$$= x_{0,1}\lambda^N h_1 + x_{0,2}(\lambda^N h_2 + N\lambda^{N-1}h_1) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \big(u_1(N-j)\lambda^{j-1}h_1 + u_2(N-j)(\lambda^{j-1}h_2 + (j-1)\lambda^{j-2}h_1)\big).$$

Следствие 1. *Пусть верны предположения леммы 6. Тогда* $x(N) = 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} x_{0,1}\lambda^N = -\sum_{j=1}^{N} u_1(N-j)\lambda^{j-1} + \sum_{j=1}^{N} (N-j+1)u_2(N-j)\lambda^{j-2}, \\ x_{0,2}\lambda^N = -\sum_{j=1}^{N} u_2(N-j)\lambda^{j-1}. \end{cases}$$

Доказательство. В силу леммы 6 и линейной независимости h_1 и h_2 тождество $x(N) = 0$ верно тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$\begin{cases} x_{0,1}\lambda^N + Nx_{0,2}\lambda^{N-1} + \sum_{j=1}^{N} u_1(N-j)\lambda^{j-1} + \sum_{j=2}^{N} (j-1)u_2(N-j)\lambda^{j-2} = 0, \\ x_{0,2}\lambda^N + \sum_{j=1}^{N} u_2(N-j)\lambda^{j-1} = 0. \end{cases}$$

Выразив $x_{0,2}\lambda^N$ из второго выражения системы и подставив в первое, получим:

$$\begin{cases} x_{0,1}\lambda^N = \frac{N}{\lambda}\sum_{j=1}^{N} u_2(N-j)\lambda^{j-1} - \sum_{j=1}^{N} u_1(N-j)\lambda^{j-1} - \sum_{j=2}^{N} (j-1)u_2(N-j)\lambda^{j-2} \\ x_{0,2}\lambda^N = -\sum_{j=1}^{N} u_2(N-j)\lambda^{j-1} \end{cases}$$

Что эквивалентно утверждению следствия 2.

Лемма 7. *Пусть верны предположения леммы 6 и* $|\lambda| > 1$. *Тогда*

$$X_\infty \subset \left\{x_{0,1}h_1 + x_{0,2}h_2 \colon |x_{0,2}| < \frac{u_{2,max}}{|\lambda| - 1}, |x_{0,1}| < \frac{u_{2,max}}{(|\lambda| - 1)^2} + \frac{u_{1,max}}{|\lambda| - 1}\right\},$$

$$u_{i,max} = \max\{u_i > 0 \colon u_1h_1 + u_2h_2 \in U\}, i \in \{1,2\}.$$

Доказательство. По построению $-u_{2,max} \leqslant u_2(j) \leqslant u_{2,max}$, $j = \overline{0, N-1}$. Из чего следует, что

$$-\sum_{j=1}^{N}|\lambda|^{j-1}u_{2,max}\leqslant\sum_{j=1}^{N}u_2(N-j)\lambda^{j-1}\leqslant\sum_{j=1}^{N}|\lambda|^{j-1}u_{2,max},$$

$$-u_{2,max}\frac{|\lambda|^N-1}{|\lambda|-1}\leqslant\sum_{j=1}^{N}u_2(N-j)\lambda^{j-1}\leqslant u_{2,max}\frac{|\lambda|^N-1}{|\lambda|-1}. \qquad (12)$$

Выберем $x_0\in\mathbf{R}^2$ так, чтобы было верно неравенство

$$|x_{0,2}|\geqslant\frac{u_{2,max}}{|\lambda|-1}.$$

Тогда для всех $N\in\mathbf{N}$

$$|x_{0,2}|>\frac{u_{2,max}}{|\lambda|-1}\left(1-\frac{1}{|\lambda|^N}\right)=\frac{u_{2,max}}{|\lambda|^N}\cdot\frac{|\lambda|^N-1}{|\lambda|-1},$$

$$|x_{0,2}|\cdot|\lambda|^N>u_{2,\max}\tfrac{|\lambda|^N-1}{|\lambda|-1},$$

$$|x_{0,2}\cdot\lambda^N|>|\sum_{j=1}^{N}u_2(N-j)\lambda^{j-1}|.$$

Откуда в силу следствия 1 и (12) следует, что $x(N)\neq 0$, то есть $x_0\notin X(N)$. Тогда $x_0\notin X_\infty$.

Выберем $x_0\in\mathbf{R}^2$ так, чтобы было верно неравенство

$$|x_{0,1}|\geqslant\tfrac{u_{2,max}}{(|\lambda|-1)^2}+\tfrac{u_{1,max}}{|\lambda|-1}.$$

Тогда для всех $N\in\mathbf{N}$

$$|x_{0,1}| > \frac{u_{1,\max}}{|\lambda|-1}(1-\frac{1}{|\lambda|^N}) + u_{2,\max}\left(\frac{|\lambda|-\frac{2}{|\lambda|^{N-1}}+\frac{1}{|\lambda|^N}}{|\lambda|(|\lambda|-1)^2}\right),$$

$$|x_{0,1}|\cdot|\lambda|^N > u_{1,\max}\frac{|\lambda|^N-1}{|\lambda|-1} + u_{2,\max}\left(\frac{|\lambda|^{N+1}-2|\lambda|+1}{|\lambda|(|\lambda|-1)^2}\right) =$$

$$= u_{1,\max}\frac{|\lambda|^N-1}{|\lambda|-1} + u_{2,\max}\left(\frac{N|\lambda|^N-1}{|\lambda|(|\lambda|-1)} - \frac{N|\lambda|^{N-1}}{|\lambda|-1} + \frac{|\lambda|^N-1}{(|\lambda|-1)^2}\right) =$$

$$= u_{1,\max}\frac{|\lambda|^N-1}{|\lambda|-1} + u_{2,\max}\left(\frac{N}{|\lambda|}\cdot\frac{|\lambda|^N-1}{|\lambda|-1} - \left(\sum_{j=1}^{N}|\lambda|^{j-1}\right)'_{|\lambda|}\right),$$

$$|x_{0,1}\cdot\lambda^N| > u_{1,\max}\sum_{j=1}^{N}|\lambda|^{j-1} + u_{2,\max}\left(\sum_{j=1}^{N}N|\lambda|^{j-2} - \sum_{j=1}^{N}(j-1)|\lambda|^{j-2}\right).$$

Получаем, что

$$|x_{0,1}\cdot\lambda^N| > \sum_{j=1}^{N}|u_1(N-j)||\lambda|^{j-1} + \sum_{j=1}^{N}|N-j+1|\cdot|u_2(N-j)|\cdot|\lambda|^{j-2},$$

$$|x_{0,1}\cdot\lambda^N| > |-\sum_{j=1}^{N}u_1(N-j)\lambda^{j-1} + \sum_{j=1}^{N}(N-j+1)u_2(N-j)\lambda^{j-2}|.$$

Откуда в силу следствия 1 следует, что $x(N)\neq 0$, то есть $x_0 \notin X(N)$. Тогда $x_0 \notin X_\infty$.

Тогда

$$X_\infty \subset \left\{x_{0,1}h_1 + x_{0,2}h_2 \colon |x_{0,2}| < \frac{u_{2,max}}{|\lambda|-1}, |x_{0,1}| < \frac{u_{2,max}}{(|\lambda|-1)^2} + \frac{u_{1,max}}{|\lambda|-1}\right\}.$$

Лемма 8. *Пусть верны предположения леммы 6 и* $|\lambda| \leqslant 1$. *Тогда* $X_\infty = \mathbf{R}^2$.

Доказательство. Пусть $|\lambda| = 1$. Обозначим

$$u_{2,max} = \max\{u_2 > 0\colon \quad u_1h_1 + u_2h_2 \in U, u_1 \in \mathbf{R}\}.$$

Тогда найдутся $N_2 \in \mathbf{N}$ и $\tilde{u}_2 \in [0; u_{2,max}]$ такие, что

$$|x_{0,2}| = N_2\cdot\tilde{u}_2.$$

Выберем

$$u_2(N_2-j)=-\operatorname{sign}(\lambda^{N_2+j-1}\cdot x_{0,2})\tilde{u}_2,\ j=\overline{1,N_2}.$$

Тогда в силу леммы 6

$$x(N_2)=x_{0,2}\lambda^{N_2}+\sum_{j=1}^{N_2}(u_2(N_2-j)\lambda^{j-1}h_2).$$

Обозначим

$$x_1=(x_{0,1}\lambda^{N_2}+x_{0,2}N_2\lambda^{N_2-1}+\sum_{j=1}^{N_2}(u_1(N_2-j)\lambda^{j-1}+$$
$$+u_2(N_2-j)(j-1)\lambda^{j-2}))h_1,$$

$$u_{1,\max}=\max\{u_1>0\colon u_1h_1\in U\}.$$

Тогда найдутся $N_1\in\mathbf{N}$ и $\tilde{u}_1\in[0;u_{1,\max}]$ такие, что

$$|x_1|=N_1\cdot\tilde{u}_1.$$

Выберем $u_2(N_1+N_2-j)=0,u_1(N_1+N_2-j)=-\tilde{u}_1\cdot\operatorname{sign}(\lambda^{N_1+j-1}\cdot x_1),j=\overline{1,N_2}$.

Тогда с учётом леммы 6

$$x(N_1+N_2)=0.$$

Откуда следует, что

$$x_0\in X(N_1+N_2)\subset\bigcup_{N=0}^{\infty}X(N)=X_\infty.$$

Поскольку данное включение справедливо для любой $x_0\in\mathbf{R}^2$, то $X_\infty=\mathbf{R}^2$.

Теперь рассмотрим случай $|\lambda|<1$. Положим $u_1(j)=0,u_2(j)=0$ для всех $j=\overline{0,N-2}$. Тогда в силу леммы 6

$$x(N) = x_{0,1}\lambda^N h_1 + x_{0,2}(\lambda^N h_2 + N\lambda^{N-1}h_1) +$$

$$+u_1(N-1)h_1 + u_2(N-1)h_2.$$

Заметим, что $x_{0,1}\lambda^N + N\lambda^{N-1}x_{0,2} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0, x_{0,2}\lambda^N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

То есть найдётся $N \in \mathbf{N}$ такой, что $(x_{0,1}\lambda_1^N + N\lambda^{N-1}x_{0,2})h_1 + x_{0,2}\lambda_2^N h_2 \in O_\varepsilon(0)$, где $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы выполнялось включение $O_\varepsilon(0) \subset U$, что возможно, так как $0 \in \text{int } U$.

Выберем управление $u_1(N-1) = -x_{0,1}\lambda^N - N\lambda^{N-1}x_{0,2}, u_2(N-1) = -x_{0,2}\lambda_2^N$. Тогда $x(N) = 0.$ Откуда следует, что

$$x_0 \in X(N) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} X(N) = X_\infty.$$

Поскольку данное включение справедливо для любой $x_0 \in \mathbf{R}^2$, то $X_\infty = \mathbf{R}^2$.

3.3. Случай комплексных собственных значений матрицы системы

В рамках данного подраздела предполагается, что матрица A имеет два комплексно-сопряженных собственных значения. $\lambda_{1,2} = re^{\pm i\varphi}$, $r > 0$, $\varphi = [0; 2\pi)$ Как показано в [11], найдутся два линейно независимых вектора $h_1, h_2 \in \mathbf{R}^2$ таких, что

$$A = SrA_\varphi S^{-1},$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},\ S = (h_1\ \ h_2).$$

Матрица A_φ представляет собой матрицу поворота, а следовательно удовлетворяет следующим свойствам:

$$
\begin{aligned}
&i)\ \ A_\varphi \cdot A_\theta = A_{\varphi+\theta},\\
&ii)\ \ ||A_\varphi x|| = ||x||,\\
&iii)\ \ A_\varphi^{-1} = A_{-\varphi}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Для рассмотрения данного случая воспользуемся преобразованием (3) и перейдём к эквивалентной системе (4).

Лемма 9. *Пусть матрица системы* (4) *удовлетворяет случаю* (7). *Тогда для всех* $N \in \mathbf{N}$ *выполнено равенство*

$$
y(N) = r^N A_{N\varphi} y_0 + \sum_{j=1}^{N} r^{j-1} \cdot A_{(j-1)\varphi} v(N-j).
$$

Доказательство. Проведём ряд преобразований, используя (13):

$$
y(N) = rA_\varphi y(N-1) + v(N-1) =
$$

$$
= rA_\varphi(rA_\varphi y(N-2) + v(N-2)) + v(N-1) =
$$

$$
= r^2 A_{2\varphi} y(N-2) + rA_\varphi v(N-2) + v(N-1) = \ldots =
$$

$$
= r^N A_{N\varphi} y(0) + \sum_{j=1}^{N} r^{j-1} \cdot A_{(j-1)\varphi} v(N-j).
$$

Лемма 10. *Пусть* $r > 1$ *и* $v_{\max} = \max\limits_{v \in S^{-1}U} \|v\|$. *Тогда*

$$
X_\infty \subset SO_{\frac{v_{\max}}{r-1}}(0),
$$

Доказательство. По построению $\|v(N-j)\| \leqslant v_{\max}$, $j = \overline{0, N-1}$. Тогда

$$
\left\| \sum_{j=1}^{N} r^{j-1} A_{(j-1)\varphi} v(N-j) \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{N} r^{j-1} \left\| A_{(j-1)\varphi} v(N-j) \right\| =
$$

$$
= \sum_{j=1}^{N} r^{j-1} \|v(N-j)\| \leqslant v_{\max} \sum_{j=1}^{N} r^{j-1} = v_{\max} \cdot \frac{r^N - 1}{r-1}.
$$

Выберем $x_0 \in \mathbf{R}^2$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x_0\| \geqslant v_{\max}\frac{1}{r-1}.$$

Тогда для всех $N \in \mathbf{N}$

$$\|y_0\| > \frac{v_{\max}}{r-1}\left(1-\frac{1}{r^N}\right) = \frac{v_{\max}}{r^N}\left(\frac{r^N-1}{r-1}\right) = \frac{v_{\max}}{r^N}\cdot\sum_{j=1}^{N} r^{j-1},$$

$$\| r^N A_{N\varphi} y_0 \| = \| r^N \cdot y_0 \| > \sum_{j=1}^{N} v_{\max}\cdot r^{j-1} \geqslant \left\|\sum_{j=1}^{N} r^{j-1} A_{(j-1)\varphi} v(N-j)\right\|.$$

Откуда в силу леммы 9 следует, что $y(N) \neq 0$, то есть $y_0 = S^{-1}x_0 \notin Y(N)$. Тогда $S^{-1}x_0 \notin Y_\infty$, то есть

$$x_0 \notin S \cdot Y_\infty = X_\infty.$$

Лемма 11. *Пусть* $r \leqslant 1$. *Тогда* $X_\infty = \mathbf{R}^2$.

Доказательство. Рассмотрим случай $r < 1$. Заметим, что $\| r^N A_{N\varphi} y_0 \| \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. То есть найдётся $N \in \mathbf{N}$ такой, что $r^N A_{N\varphi} y_0 \in O_\varepsilon(0)$, где $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы выполнялось включение $O_\varepsilon(0) \subset S^{-1}U$, что возможно, так как $0 \in \operatorname{int} S^{-1}U$.

Выберем управление $v(j) = 0, j = \overline{0, N-2}$, $v(N-1) = -r^N A_{N\varphi} y_0$. Тогда

$$y(N) = r^N A_{N\varphi} y_0 - r^N A_{N\varphi} y_0 = 0.$$

Откуда следует, что

$$y_0 \in Y(N) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} Y(N) = Y_\infty.$$

Поскольку данное включение справедливо для любого $y_0 \in \mathbf{R}^2$, то $Y_\infty = \mathbf{R}^2$, тогда

$$X_\infty = S \cdot Y_\infty = \mathbf{R}^2.$$

Рассмотрим случай $r = 1$. Обозначим

$$v_{\max} = \max\{R > 0 : B_R(0) \subset S^{-1}U\}.$$

Тогда найдутся $N \in \mathbf{N}$ и $\tilde{v} \in [0; v_{\max}]$ такие, что $||y_0|| = N \cdot \tilde{v}$.

Выберем

$$v(N-j) = -\frac{A_{(N-j+1)\varphi}}{||y_0||} y_0 \tilde{v}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{N} r^{j-1} A_{(j-1)\varphi} v(N-j) = -\sum_{j=1}^{N} A_{(j-1)\varphi} \cdot A_{(N-j+1)\varphi} \frac{y_0}{||y_0||} \cdot \tilde{v} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} A_{N\varphi} \frac{y_0}{||y_0||} \tilde{v} = -A_{N\varphi} y_0 \cdot \frac{N\tilde{v}}{||y_0||} = -A_{N\varphi} y_0 = -r^N A_{N\varphi} y_0.$$

Следовательно, в силу леммы 9 верно равенство $y(N) = 0$. Откуда следует, что

$$y_0 \in Y(N) \subset \bigcup_{N=0}^{\infty} Y(N) = Y_\infty.$$

Поскольку данное включение справедливо для любого $y_0 \in \mathbf{R}^2$, то $Y_\infty = \mathbf{R}^2$, то

$$X_\infty = S \cdot Y_\infty = \mathbf{R}^2.$$

Суммируя результаты лемм 2-11, окончательно сформулируем необходимые и достаточные условия, при которых предельное множество 0-управляемости X_∞ системы (A, U) является ограниченным.

Теорема 1. *Пусть* (A, U) *– линейная двумерная дискретная система вида (1). Тогда предельное множество 0-управляемости ограниченно тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы* A *по модулю строго больше* 1.

В рамках данного раздела не только сформулированы необходимые и достаточные условия ограниченности предельного множества 0-управляемости в виде теоремы 1. В случае, если X_∞ неограниченно, леммы 4, 5, 8 и 11 предлагают его точное описание. В случае, если X_∞ ограниченно, леммы 3, 7 и 10 предлагают его эффективные внешние оценки в виде полиэдров.

4. Компьютерное моделирование множеств 0-управляемости

Для демонстрации теоретических результататов предыдущего раздела было разработано программное обеспечение, которое позволяет проводить визуальный сравнительных анализ оценок предельных множеств 0-управляемости X_∞ и множеств 0-управляемости $X(N)$ за N шагов для различных модельных двумерных дискретных систем.

Пример 1. Рассмотрим случай некратных действительных собственных значений, соответствующих нормальной жордановой форме (5). Собственные значения матрицы: $\lambda_1 = 1.66, \lambda_2 = 1.29$.

В качестве множества допустимых значений управлений рассмотрим многогранник

$$U = \mathrm{conv}\left\{\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)\right\}.$$

Зададим матрицу A системы

$$A = \begin{pmatrix}1.286 & 0\\ 0.379 & 1.665\end{pmatrix}.$$

В качестве матрицы собственных (или собственного и присоединённого) векторов S будем рассматривать матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае предельное множество 0-управляемости X_∞ является ограниченным. В качестве его оценки выступает пересечение двух полос, ориентированных вдоль собственного и присоединенного векторов матрицы A. Результат расчетов основан на лемме 7 и представлен на рисунке 1.

Пример 2. Рассмотрим случай комплексных собственных значений $\lambda_{1,2} = 0.96 \pm 0.75i$, соответствующих нормальной жордановой форме (7). В этом случае $r \approx 2.48$ и предельное множество 0-управляемости X_∞ является ограниченным. В качестве оценки выступает эллипс, направление и величина полуосей которого определяется действительной и мнимой частями собственного вектора матрицы A.

В качестве множества допустимых значений управлений рассмотрим многогранник

$$U = \mathrm{conv}\left\{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right\}.$$

Зададим матрицу A системы

$$A = \begin{pmatrix} 0.960 & 0.745 \\ -0.745 & 0.960 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица перехода в нормальный жорданов базис имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Результат расчетов основан на лемме 10 и представлен на рисунке 2.

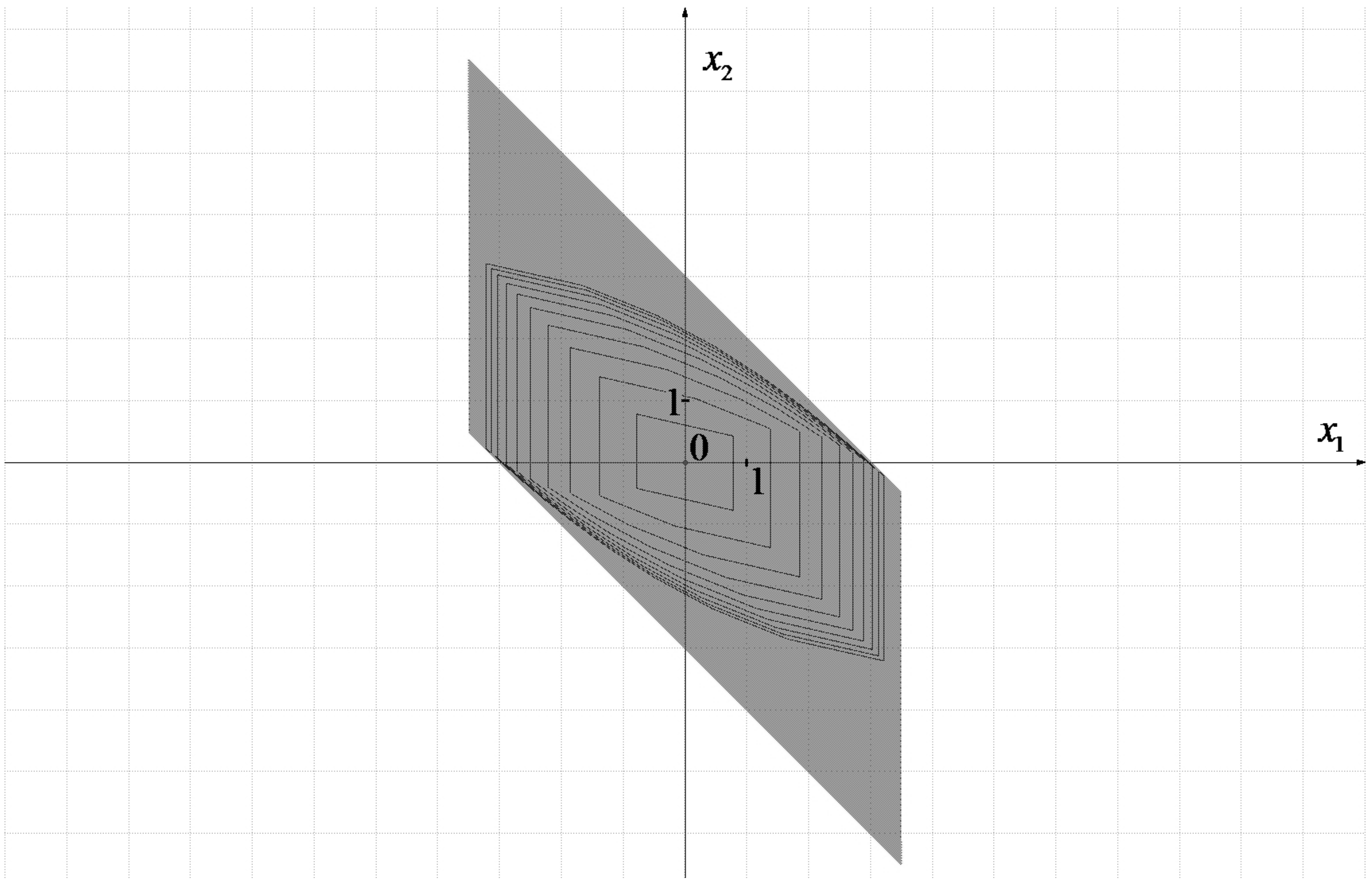

Рис. 1. Оценка X_∞ (сплошным цветом) и множества $X(N)$ (линиями) для $N = \overline{0,10}$.

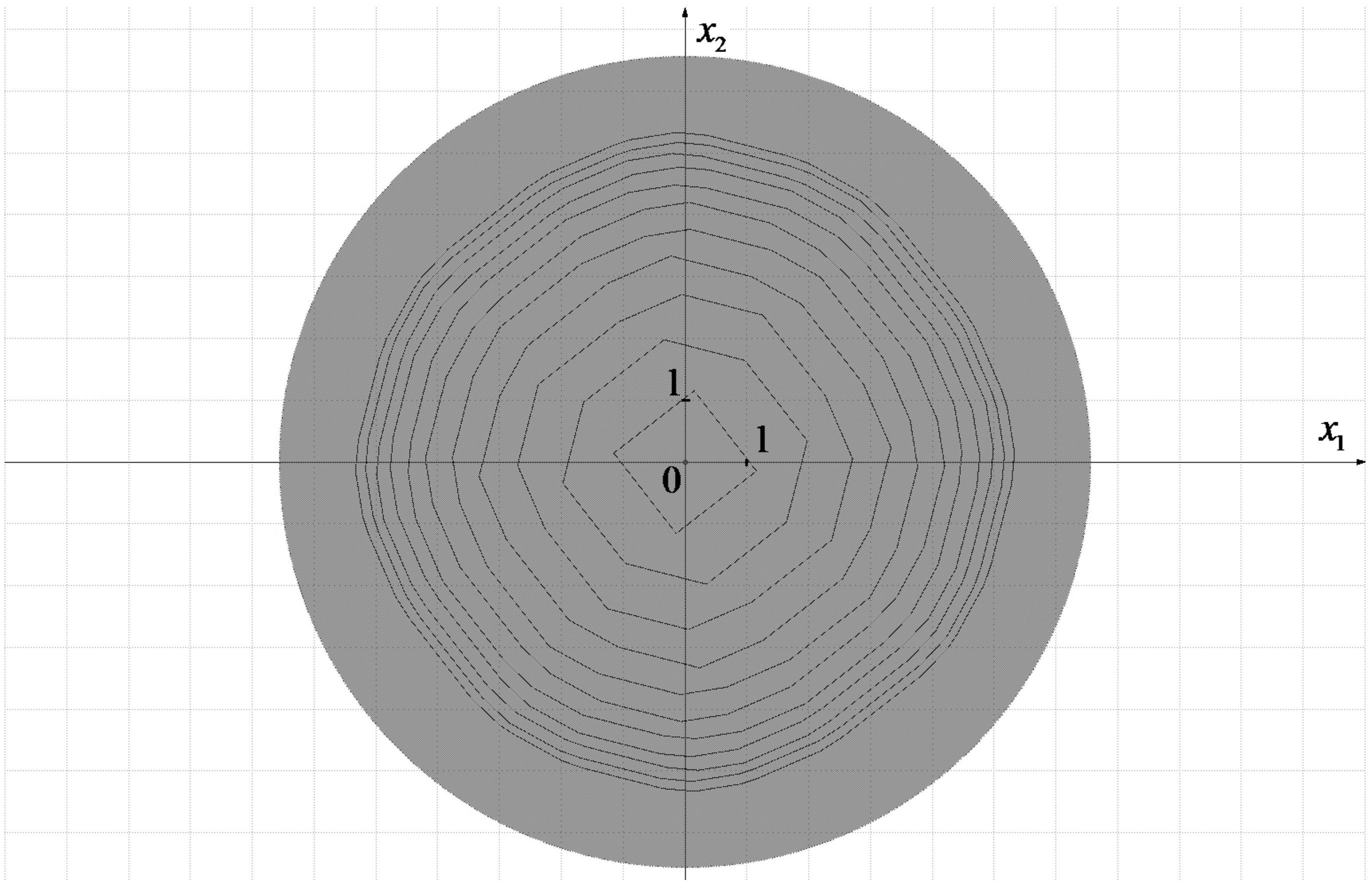

Рис. 2. Оценка X_∞ (сплошным цветом) и множества $X(N)$ (линиями) для $N = \overline{0,11}$.

С прикладной точки зрения, вычисление оценки предельного множества 0-управляемости X_∞ посредством последовательного построения множеств 0-управляемости $X(N)$ за N шагов трудоемок из-за увеличения количества вершин данного многогранника на каждом новом шаге. Но рассмотренный в предыдущем разделе ряд лемм позволяет вычислить оценки множества X_∞ значительно эффективнее.

5. Система управления аэростатом

Рассмотрим задачу построения предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы, которая описывает соответствующую модель – твердое тело (аэростат), подвешенный на струне и способный совершать вращательные движения. Предполагается, что тело подвержено моменту, связанному с упругостью струны, вязкому трению воздуха. Управление производится с помощью двух противоположно направленных вентиляторных двигателей с ограниченной мощностью.

Уравнения, которые описывают движение данной модели в пространстве, являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} = \omega, \\ &J\dot{\omega} + \delta\omega + \sigma\alpha = \pm\frac{1}{2}RS\rho(V_e^2 - V^2), \end{aligned} \tag{14}$$

где ω и α – угловая скорость и угловое отклонение исследуемого объекта соответственно, R – расстояние от оси вращения до вентилятора, V_{max} – скорость воздуха после выхода из вентилятора в случае работы вентилятора, S – площадь диска вентилятора, ρ – плотность воздуха, J – момент инерции тела относительно оси вращения, σ – коэффициент упругости струны, δ – коэффициент вязкого трения о воздух. Знак «-» или «+» выбирается в зависимости от того, отрицательный или положительный момент создается двигателем. Управление на практике производится посредством изменения скорости вращения лопастей вентиляторных двигателей.

В результате замены дифференциальных уравнений (14) конечно-разностным аналогом была получена следующая система управления:

$$\begin{aligned} &x(k+1) = \begin{pmatrix} \alpha(k+1) \\ \omega(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 1 & 1{,}9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(k) \\ \omega(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}24 \end{pmatrix} v(k), \\ &x(0) = x_0, v(k) \in [-1; 1], k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Параметры данной системы получены приближенно на основании модели, которая описана в [12].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 1 & 1{,}9 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0.9, h_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -0.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.24 \end{pmatrix} \right\}.$$

В этом случае предельное множество 0-управляемости X_∞ является неограниченной полосой, ориентированной вдоль собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_2, что совпадает с результатом леммы 5.

$$X_\infty = \left\{ x_{0,1}h_1 + x_{0,2}h_2 \colon |x_{0,1}| < \frac{12}{55}, x_{0,2} \in \mathbf{R} \right\}.$$

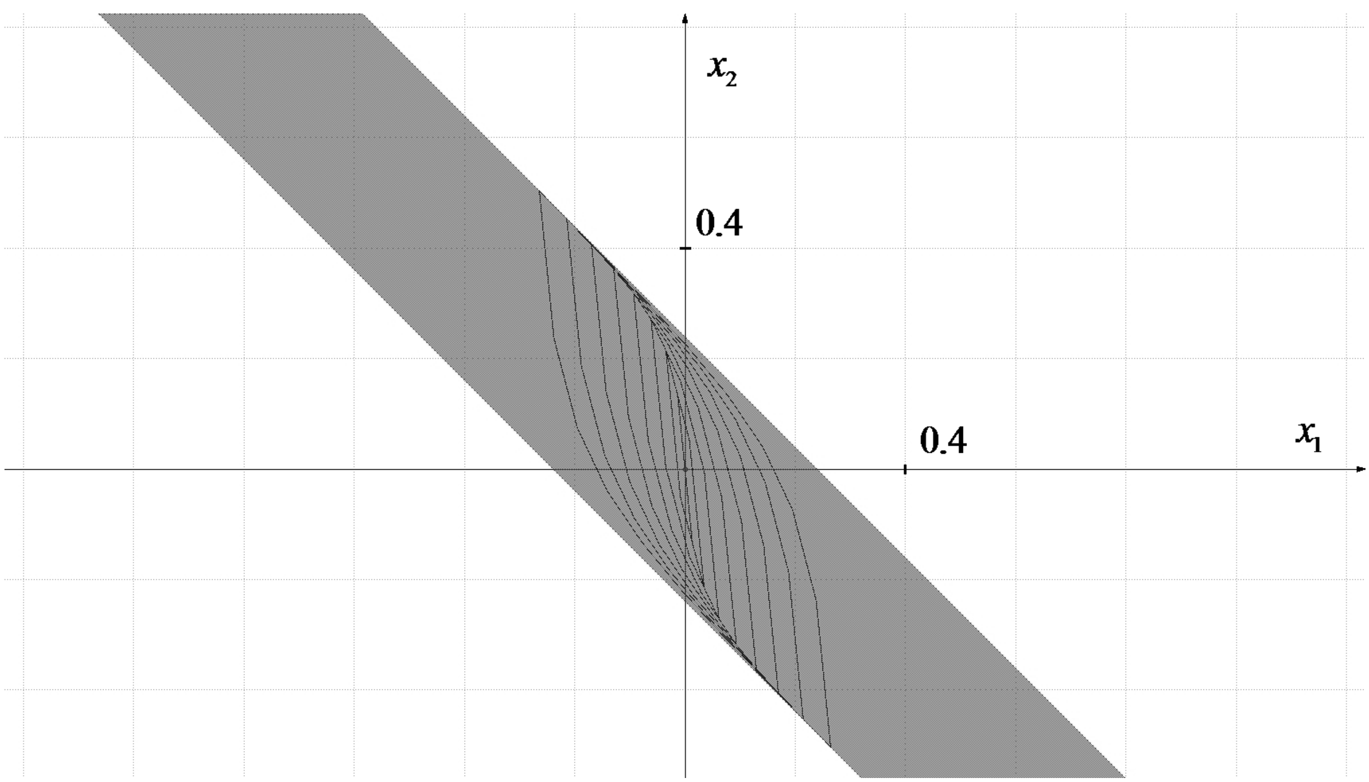

Рис. 3. Оценка X_∞ (сплошным цветом) и множества $X(N)$ (линиями) для $N = \overline{0{,}8}$.

6. Заключение

В статье рассмотрена задача построения предельного множества 0-управляемости дискретной линейной двумерной системы. Подход к решению данной задачи различается в зависимости от вида нормальной жордановой формы матрицы системы. В данной работе рассмотрено три различных вида нормальных жордановых форм.

Для систем с двумя некратными собственными значениями матрицы системы доказаны три леммы о строении асимптотического множества: в первом случае, когда оба собственных значения по модулю больше единицы, предельное множество 0-управляемости является ограниченным и в качестве его оценки выступает пересечение двух полос; во втором случае, когда оба собственных значения матрицы системы меньше либо равны единице по модулю, предельное множество 0 управляемости совпадает с фазовой плоскостью; в третьем случае, когда одно собственное значения по модулю превосходит единицу, а другое меньше либо равно единице, предельное множество 0-управляемости имеет структуру неограниченной полосы.

Для систем с единственным собственным значением кратности два доказаны две леммы о строении асимптотического множества: в первом случае, когда собственное значение по модулю меньше либо равно единице, предельное множество 0-управляемости совпадает с фазовой плоскостью, во втором случае, когда собственное значение по модулю больше единицы, оценка предельного множества 0-управляемости представляет собой пересечение двух полос.

Для систем с комплексными собственными значениями доказаны две леммы о строении асимптотического множества: в случае, когда модуль собственного значения больше единицы, предельное множество 0-управляемости удается оценить сверху эллипсом, в противоположном случае предельное множество 0-управляемости совпадает с фазовой плоскостью.

Данные методы могут быть использованы в авиационной и ракетно-космической отрасли для анализа различных систем на управляемость и достижимость. Например, для проверки, возможно ли проведение коррекции орбиты спутника из заданного начального состояния, или для построения множества управляемости системой управления ориентацией аэростата. Последний пример подробно рассмотрен в статье.

Список источников

1. Сиротин А.Н., Формальский А.М. Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 17–32.

2. Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems // Journal of Optimization Theory and Applications, 1988, vol. 56, no. 1, pp .67-88.

3 Desoer C.A., Wing J. The minimal time regulator problem for linear sampled-data systems: general theory // Journal Franklin Institute, 1961, vol. 272, no. 3, pp. 208-228.

4. Hamza M.H., Rasmy M.E. A Simple Method for Determining the Reahable Set for Linear Discrete Systems // IEEE Transactions on Automatic Control, 1971, vol. 16, pp. 281-282.

5. Калман Р. Об общей теории систем управления // Труды I Международного конгресса ИФАК. - М.:Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521-547.

6. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче оптимального быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // Атоматика и телемеханика. 2015. № 9. С. 3-30.

7. Ибрагимов Д.Н. Оптимальное по быстродействию управление движением аэростата // Труды МАИ. 2015. № 83. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=62313

8. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. - М.:Наука, 1973. – 448 с.

9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1983. – 393 с.

10. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // Автоматика и телемеханика. 2019. № 3. С. 3–25. DOI: 10.1134/S0005231019030012

11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. - М.: Мир, 1989. – 655 с.

12. Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Управление ориентацией твёрдого тела, подвешенного на струне с использованием вентиляторных двигателей // Известия РАН. Теория о системы управления. 2011. № 1. С. 107-119.

13. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. - М. :Постмаркет, 2000. – 352 с.

14. Мороз А.И. Синтез оптимального по быстродействию управлению для линейных дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1965. № 2. С. 193-207

15. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. - М.: Наука, 1973. – 255 с.

16. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их приложения в задачах оптимизации. - М.: Наука, 1982. – 432 с.

17. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. - М.: Наука, 2005. – 391 с.

18. Орлов Д.А., Саитова А.Г. Оптимальное управление космическим аппаратом при формировании орбиты искусственного спутника Юпитера на участке предварительного аэродинамического торможения // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=93375

19. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. - М.:Наука, 1975. – 526 с.

20. Соколов Н.Л. Анализ комбинированных способов формирования орбит искусственного спутника планет // Труды МАИ. 2016. № 87. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=69701

References

1. Sirotin A.N., Formal'skii A.M. *Avtomatika i telemekhanika,* 2003, no. 12, pp. 17–32.

2. Fisher M.E., Gayek J.E. Estimating Reachable Sets for Two-Dimensional Linear Discrete Systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1988, vol. 56, no. 1, pp .67-88.

3 Desoer C.A., Wing J. The minimal time regulator problem for linear sampled-data systems: general theory, *Journal Franklin Institute*, 1961, vol. 272, no. 3, pp. 208-228.

4. Hamza M.H., Rasmy M.E. A Simple Method for Determining the Reahable Set for Linear Discrete Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, pp. 281-282.

5. Kalman R. Ob obshchei teorii sistem upravleniya, *Trudy I Mezhdunarodnogo kongressa IFAK,* Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1961, vol. 2, pp. 521-547.

6. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. *Atomatika i telemekhanika*, 2015, no. 9, pp. 3-30.

7. Ibragimov D.N. *Trudy MAI,* 2015, no. 83. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62313

8. Boltyanskii V.G. *Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami* (Optimal control of discrete-time systems), Moscow, Nauka, 1973, 448 p.

9. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko B.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical theory of the optimal processes), Moscow, Nauka, 1983, 393 p.

10. Ibragimov D.N. *Avtomatika i telemekhanika,* 2019, no. 3, pp. 3–25. DOI: 10.1134/S0005231019030012

11. Khorn R., Dzhonson Ch. *Matrichnyi analiz* (Matrix analysis), Moscow, Mir, 1989, 655 p.

12. Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Yu., Tkachev S.S. *Izvestiya RAN. Teoriya o sistemy upravleniya*, 2011, no. 1, pp. 107-119.

13. Kronover R.M. *Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh* (Fractals and chaos in dynamic systems), Moscow, Postmarket, 2000, 352 p.

14. Moroz A.I. *Avtomatika i telemekhanika,* 1965, no. 2, pp. 193-207

15. Propoi A.I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh protsessov* (Elements of the theory of optimal discrete processes), Moscow, Nauka, 1973, 255 p.

16. Evtushenko Yu.G. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ikh prilozheniya v zadachakh optimizatsii* (Methods for solving extreme problems and their applications in optimization problems), Moscow, Nauka, 1982, 432 p.

17. Agrachev A.A., Sachkov Yu.L. *Geometricheskaya teoriya upravleniya* (Geometric theory of control), Moscow, Nauka, 2005, 391 p.

18. Orlov D.A., Saitova A.G. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93375

19. Moiseev N.N. Elementy teorii optimal'nykh sistem (Elements of the theory of optimal systems), Moscow, Nauka, 1975, 526 p.

20. Sokolov N.L. *Trudy MAI,* 2016, no. 87. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=69701

Статья поступила в редакцию 25.04.2022
Статья после доработки 30.04.2022
Одобрена после рецензирования14.06.2022
Принята к публикации 12.10.2022
The article was submitted on 25.04.2022; approved after reviewing on 14.06.2022; accepted for publication on 12.10.2022