

РАСЧЕТ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЖИДКОСТНОГО РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Мкртчян М.К.^{1*}, Кочетков Ю.М.^{2**}

¹ Государственное научно-производственное предприятие «Регион»,
Каширское шоссе, 13А, Москва, 115230, Россия

² Исследовательский Центр им. М.В. Келдыша (Центр Келдыша),
Онежская улица, 8, Москва, 125438, Россия

* e-mail: mger_97@mail.ru

** e-mail: swgeorgy@gmail.com

Статья поступила в редакцию 10.02.2021

Дано краткое описание проблемы прогноза параметров при больших числах Рейнольдса. Составлена система уравнений для ламинарного потока. Представлены профиль скорости и поле скоростей участка внутренней стенки камеры сгорания жидкостного ракетного двигателя (ЖРД), полученные по разработанной программе. Проведено качественное сравнение с результатами, полученными в программном комплексе «Ansys».

Ключевые слова: уравнение Навье—Стокса, ламинарное течение, ламинарный подслои, профиль скорости у стенки.

1. Постановка задачи

В настоящее время в газодинамической науке существует проблема прогноза параметров при больших числах Рейнольдса [1]. Уравнение движения Навье—Стокса практически неразрешимо с помощью современных технологий из-за нехватки вычислительных ресурсов [2—4]. Например, решение задачи для микроскопического объекта при больших числах Рейнольдса будет продолжаться несколько сотен лет [5]. При увеличении числа Рейнольдса необходимо применение более густой сетки с маленькими расчетными ячейками, отчего практически невозможно рассчитать даже элементарные задачи при использовании прямого численного моделирования.

Распространенным является переход на решение упрощенных уравнений движения [6, 7]. Наиболее популярными стали уравнения Рейнольдса [8—11]. Осреднение Рейнольдсом уравнений Навье—Стокса за счет введения средних и пульсаций всех параметров течения изменяет вид уравнений и сам вычислительный процесс — введение моделей турбулентности дает возможность получить полезные решения. За основной параметр в этой теории взяты так называемые напряжения Рей-

нольдса, энергия турбулентности, скорость диссипации турбулентности. Но такой подход является лишь приемом, который может исказить истинную картину течения из-за многочисленных допущений и предположений. Также уравнения Рейнольдса экспериментально не подкреплены. Тем не менее практически все российские и зарубежные электронные программные комплексы в области вычислительной газовой динамики, такие, как «Ansys», «FlowVision», «OpenFOAM» и др., построены на уравнениях Рейнольдса с перечисленными выше дополнениями [12].

Поэтому предлагается иной подход к описанию турбулентности. Более понятным и физически оправданным является подход, при котором турбулентность характеризуется как вихревое течение, т.е. течение, в котором помимо поступательного присутствуют также вращательное движение и кручение. Другими словами, где нет вращения, т.е. $\text{rot}(\vec{V}) = 0$, и кручения, т.е. $\text{rot} \text{rot}(\vec{V}) = 0$, течение будет ламинарным. Известно, что при взаимодействии потока со стенкой в непосредственной близости от нее возникает ламинарное течение — это так называемый ламинарный под-

слой [13]. В ламинарном подслое справедлив линейный закон Ньютона. В работах [12, 14–16] показано, что в сверхзвуковом потоке турбулентность может быть пренебрежимо малой и даже отсутствовать. Таким образом, турбулентность необходимо учитывать только в камере сгорания при числах Рейнольдса, больших критического.

Темой данной статьи является расчет и анализ газодинамических характеристик жидкостного ракетного двигателя для ламинарного течения, с целью корректной, физически правильной постановки задачи и существенного уменьшения времени счета благодаря применению более простых уравнений. Проведены исследования в ламинарном подслое у стенки модельной камеры ЖРД.

Целью работы также является запись программного кода для получения характеристик поля скоростей и его качественное сравнение с результатами расчета в программном комплексе «Ansys».

2. Составление системы уравнений

Вывод уравнения движения берется из работы [14], исходное уравнение движения записывается в виде

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{grad}(p) + \mu \Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \mu \text{grad div}(\vec{V}).$$

Применяя к этому уравнению теорему Лэмба—Громеки, раскладываем субстанциональную производную, выделяя кориолисово ускорение. Разлагая лапласиан, получаем зависимость

$$\text{rot rot}(\vec{V}) = 0, \text{ после чего, считая поток ламинарным, вычеркиваем операцию } \text{rot}(\vec{V}) = 0 \text{ и получаем уравнение в виде}$$

уравнение в виде

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \text{grad} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) + \text{grad} \left(p - \frac{4}{3} \mu \text{div}(\vec{V}) \right) = 0.$$

С учетом вида уравнения Эйлера

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{grad}(p),$$

по аналогии получаем

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{grad} \left(p - \frac{4}{3} \mu \text{div}(\vec{V}) \right). \quad (1)$$

Это уравнение отличается от уравнения Эйлера для идеального газа одним членом $\frac{4}{3} \mu \text{div}(\vec{V})$, который описывает вязко-упругое состояние и характеризует ламинарное движение.

Без вывода напишем уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение характеризует сжимаемость.

Уравнение энергии в форме Пуассона получим, используя уравнение движения в скалярном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\mu}{3\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4\mu}{3\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{cases}$$

Домножим первое уравнение на $\frac{\partial}{\partial x}$, а второе

на $\frac{\partial}{\partial y}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{4\mu}{3\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{4\mu}{3\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{cases}$$

Складываем оба уравнения и после несложных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \\ & + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \\ & + \frac{4\mu}{3\rho} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right). \end{aligned}$$

Выносим лапласиан давления и получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{4 \mu}{3 \rho} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right].$$

Преобразуем один член к такому виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\vec{V}).$$

Дискретизируем и получим

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\operatorname{div}(\vec{V})^{n+1} - \operatorname{div}(\vec{V})^n \right),$$

где $n+1$ и n — последовательные шаги по времени.

Приравниваем к нулю $\operatorname{div}(\vec{V})^{n+1} = 0$, так как в используемой разностной схеме она будет рассчитываться в уравнении Навье—Стокса. Тогда

$$-\frac{1}{\Delta t} \operatorname{div}(\vec{V}) \text{ или } -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

и получим уравнение энергии в форме Пуассона

$$(\Delta p + \rho f(\vec{V})) = 0:$$

$$\Delta p + \rho \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{4 \mu}{3 \rho} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right] = 0. \quad (3)$$

В результате получаем систему из уравнений (1), (2), (3):

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0; \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4 \mu}{3 \rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right); \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4 \mu}{3 \rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \\ & \Delta p + \rho \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{4 \mu}{3 \rho} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \right] = 0. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Таким образом, система состоит из четырех уравнений и четырех неизвестных (u , v , ρ , p).

3. Разработка расчетного метода

Программный код написан на языке программирования Python. Задача решается численным методом конечных разностей, который основан на замене производных разностными схемами.

Каждое уравнение системы в программном коде получается путем дискретизации.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n}{\Delta t} + \left(u_{i,j} \frac{\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{\rho_{i,j} - \rho_{i,j-1}}{\Delta y} \right) + \rho_{i,j} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} \right) = 0.$$

Уравнение движения:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} = \\ & = -\frac{1}{\rho_{i,j}} \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{4 \mu}{3 \rho_{i,j}} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \right); \\ & \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} = \\ & = -\frac{1}{\rho_{i,j}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{4 \mu}{3 \rho_{i,j}} \left(\frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \right). \end{aligned}$$

Уравнение энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = -\rho_{i,j} \left[-\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) + \right. \\ & + u_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1}}{4\Delta x\Delta y} \right) + \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)^2 + \\ & \left. + v_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}}{4\Delta x\Delta y} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_{i,j}} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Выведем искомые параметры и получим следующие уравнения.

Уравнение неразрывности:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n - \Delta t \left(\left(u_{i,j} \frac{\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{\rho_{i,j} - \rho_{i,j-1}}{\Delta y} \right) + \rho_{i,j} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \right) = 0.$$

Уравнение движения:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{n+1} = & u_{i,j}^n - \Delta t \left(u_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} - \frac{1}{\rho_{i,j}} \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + \\ & + \Delta t \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_{i,j}} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1}}{4\Delta x\Delta y} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{i,j}^{n+1} = & v_{i,j}^n - \Delta t \left(u_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} - \frac{1}{\rho_{i,j}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) + \\ & + \Delta t \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_{i,j}} \left(\frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}}{4\Delta x\Delta y} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right). \end{aligned}$$

Уравнение энергии:

$$\begin{aligned} p_{i,j} = & \frac{(p_{i+1,j} + p_{i-1,j})(\Delta x)^2 + (p_{i,j+1} + p_{i,j-1})(\Delta y)^2}{2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} - \frac{\rho_{i,j}(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) - \right. \\ & \left. - u_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1}}{4\Delta x\Delta y} \right) - \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)^2 - \right. \\ & \left. - v_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}}{4\Delta x\Delta y} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - \right. \\ & \left. - 2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_{i,j}} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$-v_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - 2 \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_{i,j}} \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right].$$

Расчет проводится для камеры. задается область размером 2 на 2 см и 41 на 41 сеточную точку.

Граничные условия для решения задачи задаются в виде:

- условие прилипания на стенке $\vec{V} = 0$;
- условие сопровождения на осевой линии, идея которого состоит в том, что вязкое воздействие двух соседних линий тока, расположенных вдоль оси, не приводит к появлению разности их продольных скоростей, т.е. производная продольной скорости по нормальной координате на оси

равна нулю: $\frac{du}{dy} = 0$ [15];

— вблизи выхода может быть установлено только искусственное граничное условие, поскольку поток искусственно отрезан, и задается

оно как $\frac{du}{dx} = 0$ [17].

Кроме того, в систему добавляются исходные данные:

скорость потока на входе $u=100$ м/с, $v=0$ м/с; динамическая вязкость $\mu = 10^{-4}$ Па·с;

начальное значение поля плотностей $\rho = 6$ кг/м³.

4. Результаты расчетов

Для начала были рассмотрены результаты расчета с использованием программы «Ansys» [18]. Для этого, используя в программе модель турбулентности по умолчанию, для камеры сгорания провели расчет потока вблизи стенки. Был получен профиль скорости вдоль стенки в целях определения в дальнейшем характеристик пограничного слоя. На рис. 3 представлен профиль скорости.

В результате расчетным путем была подтверждена гипотеза о существовании вблизи стенки ламинарного подслоя. Гипотеза была построена на том, что в этой области логично существова-



Рис. 1. Расчетная сетка

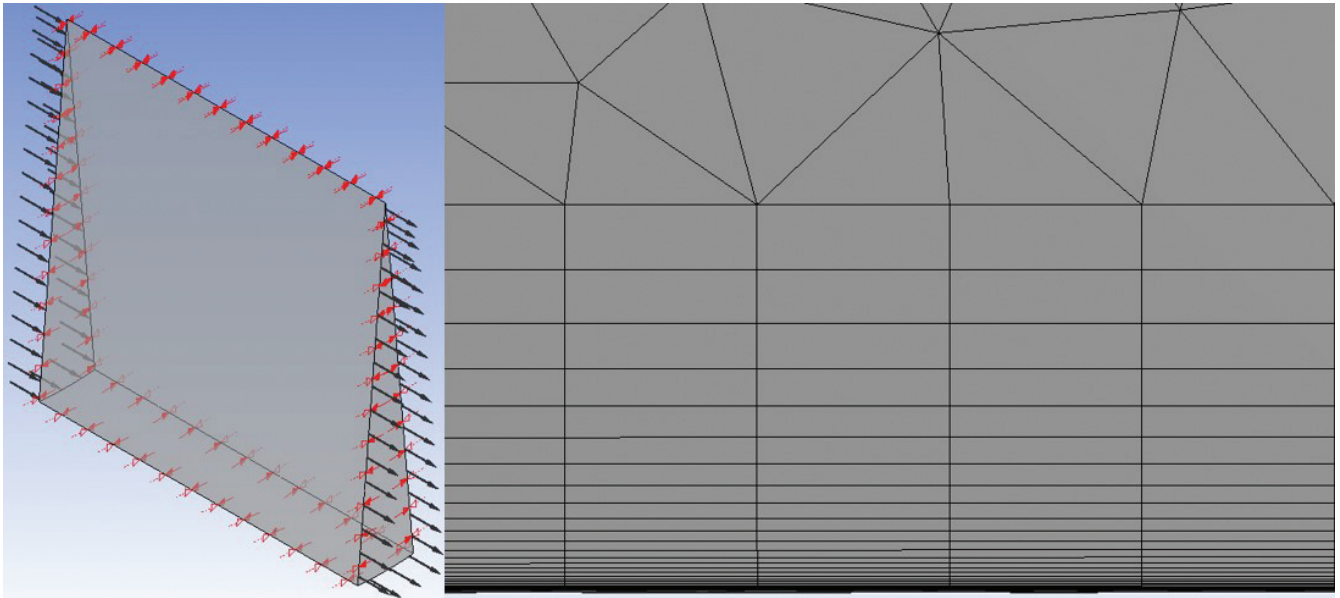


Рис. 2. Граничные условия и расчетная сетка у стенки

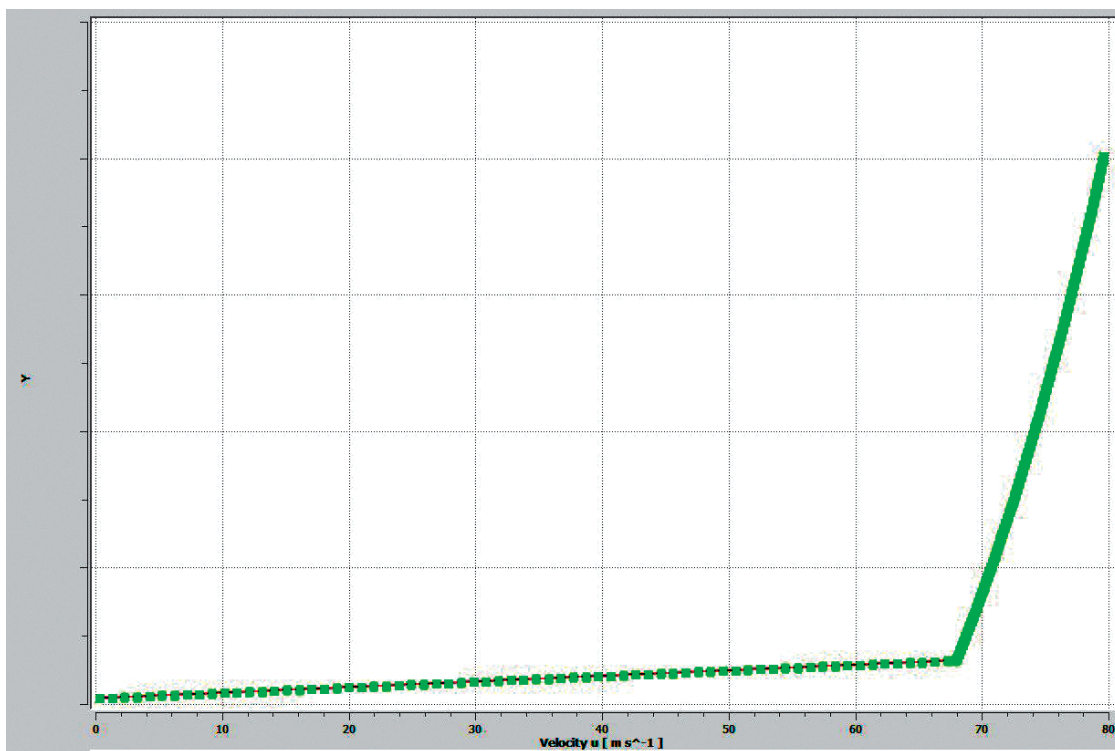


Рис. 3. Профиль скорости с использованием модели турбулентности по умолчанию

ние профиля Ньютона с полной производной скорости по нормальной координате. Расчетами по программе «Ansys» была также показана линейная зависимость профиля в этой области. Этот факт может говорить об особенностях построения структуры программы «Ansys». Очень важно присутствие такого факта при многих расчетах: на трение, теплообмен, разрушение уносимой стенки [19, 20].

Присутствие ламинарного подслоя подкрепило утверждение о правильности использования уравнений ламинарных потоков при разработке программы.

Расчеты ламинарных потоков дали следующие результаты. Профиль скорости ламинарного потока около стенки также показал линейный характер в непосредственной близости у стенки. Профиль далее приобретает через излом практичес-

ки постоянное значение. Скорее всего, координата излома разграничивает области вязких пристеночных потоков и потоков в ядре. На рис. 4 продемонстрирован профиль скорости.

Для оценки адекватности расчетов, полученных по написанной программе, были сделаны расчеты с использованием уравнения Эйлера. Видно, что скорости, полученные с помощью урав-

нений Эйлера для идеального газа, больше, чем скорости ламинарного течения, на 3 %, что является логичным из-за присутствия в уравнении члена, учитывающего вязкость-упругость, так как известно, что идеальное уравнение дает максимальное значение скорости. На рис. 5 показано сравнение рассчитанных профилей.

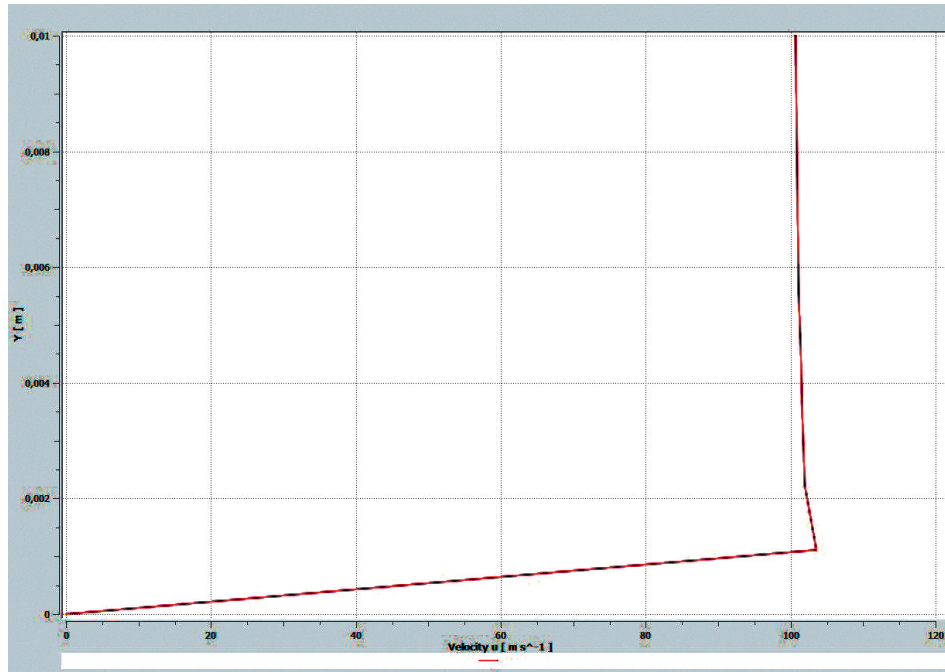


Рис. 4. Профиль скорости с использованием модели ламинарного потока

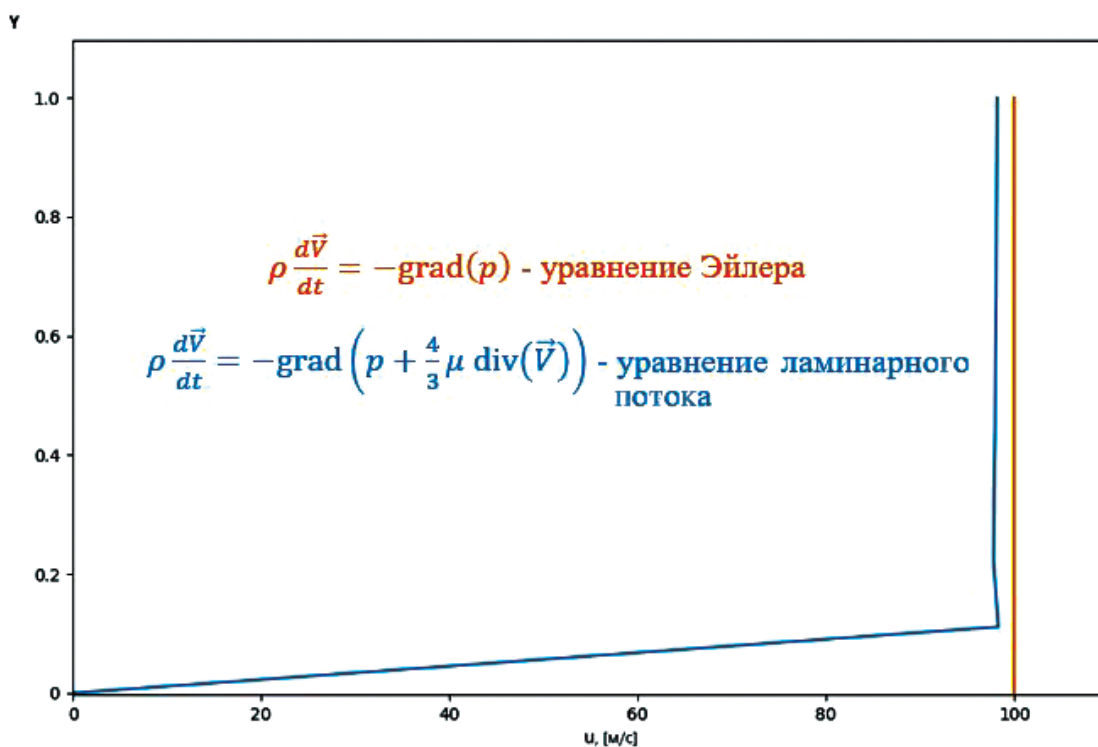


Рис. 5. Сравнение профилей скоростей по уравнению ламинарного потока и уравнению Эйлера

Профиль, полученный по программе «Ansys» для ламинарного потока, качественно повторяет профиль, рассчитанный в программном коде уравнения в ламинарной постановке. Сравнение считалось качественным, исходя из утверждения, что уравнения Рейнольдса могут давать значительные ошибки при применении моделей турбулентности. Экспериментальное сравнение в данный момент невозможно в связи с огромными трудностями, возникающими при измерении ламинарного подслоя. Исследование с использованием трубки Пито затруднено, так как при необходимом малом сечении трубки возникает капиллярный эффект.

На поле скоростей уравнения ламинарного потока (рис. 6) видно сгущение линий тока вблизи стенки, что подтверждает наличие пограничного слоя, а параллельность линий говорит о его ламинарности.

Благодаря использованию более простых уравнений расчетное время для решения данной задачи составляет порядка одной минуты, расчет

аналогичной площадки с программой «Ansys» занял около 6 минут. Полученные результаты позволяют рекомендовать при расчете газодинамических характеристик жидкостного ракетного двигателя применение предложенного подхода к описанию течения.

Выводы

1. Разработаны метод и программа расчета газодинамических характеристик ЖРД для ламинарного течения.

2. Тестирование с использованием программы «Ansys» показало качественное совпадение с расчетами по разработанной программе.

3. Показана линейная зависимость профилей скоростей вблизи стенки камеры (наличие ламинарного подслоя).

4. Оценена разница абсолютных скоростей ~ 3 % из-за наличия в уравнении ламинарного течения члена, учитывающего вязкость-упругость, что соответствует газодинамическим потерям удельного импульса тяги.

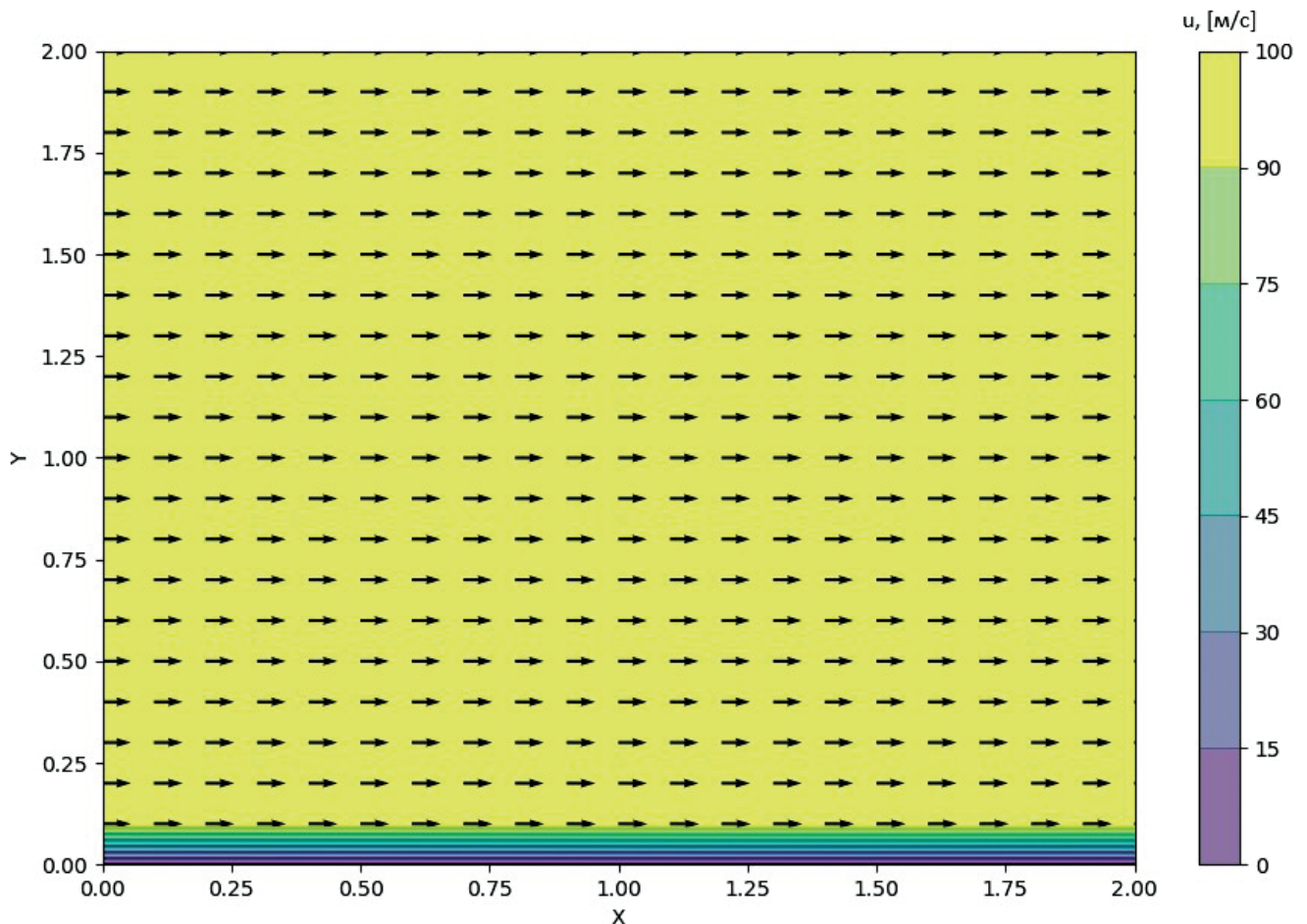


Рис. 6. Поле скоростей уравнения ламинарного потока

Библиографический список

1. *Pozrikidis C.* High-Reynolds-number flow // *Fluid Dynamics. Theory, Computation, and Numerical Simulation.* — 3rd ed. — Boston, MA: Springer, 2017, pp. 669-751. DOI: 10.1007/978-1-4899-7991-9_10
2. *Faro A.A.* Navier-Stokes Equation (An overview and the simplification). The discourse. 2020. DOI: 10.13140/RG.2.2.17406.00323
3. *Farwig R.* From Jean Leray to the millennium problem: the Navier-Stokes equations // *Journal of Evolution Equations.* 2020. DOI: 10.1007/s00028-020-00645-3
4. *Shamoon J.* Using HPC for Computational Fluid Dynamics. A Guide to High Performance Computing for CFD Engineers. — New York: Academic Press, 2015, pp. 81-100.
5. *Юн А.А.* Исследование течений и прочностной анализ. — Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: URSS, ЛЕНАНД, 2014. — 427 с.
6. *Rodriguez S.* Applied Computational Fluid Dynamics and Turbulence Modeling. Practical Tools, Tips and Techniques. — Switzerland: Springer International Publishing, 2019. — 306 p. DOI: 10.1007/978-3-030-28691-0
7. *Breuer M., Schmidt S.* Hybrid LES-RANS Modeling of Complex Turbulent Flows // 85th Annual Meeting of the International Associating of Applied Mathematics and Mechanics. 2014. Vol. 14. No. 1, pp. 647-650. DOI: 10.1002/pamm.201410308
8. *Veress A., Molnár J., Rohács J.* Compressible viscous flow solver // *Periodica Polytechnica Transportation Engineering.* 2009. Vol. 37. No. 1-2, pp. 77-81. DOI: 10.3311/pp.tr.2009-1-2.13
9. *Giancarlo A.* Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equation for Turbulence Modeling // *Applied Mechanics Reviews.* 2009. Vol. 62. No. 4, 040802. DOI: 10.1115/1.3124648
10. *Zhou C., Shi L., Wang Z.J.* Adaptive High-order Discretization of the Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations // *Computers & Fluids.* 2017. Vol. 159, pp. 137-155. DOI: 10.1016/j.compfluid.2017.09.009
11. *Heinz S.* The large eddy simulation capability of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations: Analytical results // *Physics of Fluids.* 2019. Vol 31. No. 2. DOI: 10.1063/1.5085435
12. *Кочетков Ю.М.* Турбулентность. Пять теорем как инструмент глобального преобразования уравнений сохранения в целях разработки новых подходов к вычислительной газовой динамике // *Двигатель.* 2019. № 4(124). С. 20-22.
13. *Lakshminathiraju B.H., Rao V.D., Balakrishna B.* Theoretical approach to predict friction coefficients of viscous non-Newtonian liquids in turbulent pipe flow // *International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD).* 2018. Vol. 8. No. 2, pp. 1177-1188. DOI: 10.24247/ijmperdapr2018157
14. *Кочетков Ю.М.* Турбулентность сверхзвуковых течений (памяти Д.Д. Гилевича) // *Двигатель.* 2013. № 2(86). С. 48-50.
15. *Кочетков Ю.М.* Турбулентность. Фундаментальное граничное условие сопровождения и новая постановка краевой задачи вязкой газовой динамики // *Двигатель.* 2015. № 5(101). С. 30-32.
16. *Кочетков Ю.М.* Турбулентность. Турбулентность и математическое доказательство её невозможности в сверхзвуковом потоке // *Двигатель.* 2018. № 3(117). С. 12-15.
17. *Zikanov O.Y.* Essential computational fluid dynamics. — Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010. — 320 p.
18. *ANSYS CFX-Solver Theory Guide.* Release 17.2. ANSYS Canada Ltd, 2009, 578 p.
19. *Воробьев А.Г., Воробьева С.С.* Численное исследование пограничного слоя жидкостного ракетного двигателя малой тяги // *Вестник Московского авиационного института.* 2017. Т. 24. № 1. С. 49-56.
20. *Легаев В.П., Генералов Л.К., Галковский О.А.* Аналитический обзор существующих гипотез о природе трения // *Вестник Московского авиационного института.* 2019. Т. 26. № 1. С. 174-181.

GAS DYNAMIC CHARACTERISTICS COMPUTING OF A LIQUID PROPELLANT ROCKET ENGINE FOR LAMINAR FLOWS

Mkrtchyan M.K.^{1*}, Kochetkov Yu.M.^{2**}

¹ Research and Production Enterprise "Region",
13A, Kashirskoe shosse, Moscow, 115230, Russia

² Keldysh Research Center (Keldysh Center),
8, Onezhskaya str., Moscow, 125438, Russia

* e-mail: mger_97@mail.ru

** e-mail: swgeorgy@gmail.com

Abstract

Up to now, a problem of parameters' accurate prediction at large Reynolds numbers is existing in gas dynamics science. The Navier-Stokes equation of motion is practically unsolvable with modern technology due to the lack of computational resources. With the Reynolds number increase, application of the finer mesh with small computational cells is necessary, which makes it almost impossible to calculate even elementary problems when employing direct numerical modeling.

Transition to solving simplified equations of motion is widespread. Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) equations became the most popular. However, this approach is only a subterfuge containing inconsistencies while describing the true picture of the flow due to many assumptions. Besides, Reynolds equations are not substantiated experimentally. Nevertheless, practically all Russian and foreign electronic products of computational gas dynamics, such as: "Ansys", "FlowVision", "OpenFOAM", etc., are based on the RANS equations.

Thus, an alternate approach to the turbulence description is being proposed. More understandable and physical like is the approach where turbulence is being characterized as a vortex flow, i.e. a flow in which rotational motion and torsion exist aside from the translational one. In other words, the flow will be laminar where rotation and torsion do not present.

The article presents both computation and analysis of the gas-dynamic characteristics of a liquid-propellant rocket engine for laminar flow, with the purpose to realize a physically correct task, and significantly reduce the computational time by employing simpler equations. The studies were conducted in the laminar sublayer near the wall of the model chamber of a liquid-propellant rocket engine. The purpose of the work consisted also in writing a program code for obtaining the characteristics of the velocity field and its qualitative comparison with the

computational results with the "Ansys" software package.

A system of equations for laminar flow consisted of the equations of continuity, motion and energy in the Poisson form is compiled and programmed in the Python programming language in the work being presented. Computation is performed for the chamber. The region of two by two cm and 41 by 41 mesh points is being set. The boundary conditions were being set in the form of the condition adhesion on the wall, tracking on the centerline, and artificial flow limiting at the outlet. Initial conditions are the longitudinal of $u = 100$ m/s and transverse of $v = 0$ m/s velocities, dynamic viscosity of $\mu = 10^{-4}$ Pa·s, the initial densities field value of $\rho = 6$ kg/m³.

The computational results were analyzed with the "Ansys" program. For this purpose, the flow computation near the wall was performed for the combustion chamber using the default turbulence model. As the result, the hypothesis for the laminar sublayer existence near the wall was confirmed, which substantiated the statement on the laminar flows application correctness while this program developing. The presence of this fact is of great importance in many computations such as computations for friction, heat exchange, and carried-away wall destruction. The computation of the flow near the wall, using the laminar model, was performed as well.

To assess the adequacy of the results obtained by the developed program, computations were made using the Euler equation. The velocities of the ideal gas obtained with the Euler equations are 3% greater than for the laminar case.

The profile obtained for laminar flow by the "Ansys" program qualitatively repeats the profile calculated in the equation program code in the laminar formulation.

The current lines concentration near the wall can be observed in the velocities field, which confirms the

presence of a boundary layer, and the lines parallelism indicates its laminarity.

Thus, the following conclusions can be drawn:

1. A method and a program for the gas-dynamic characteristics computing of the liquid-propellant rocket engine for laminar flow are developed;

2. Testing with the “Ansys” program revealed a qualitative match with the calculations by the developed program;

3. The linear dependence of the velocity profiles near the chamber wall (the presence of a laminar sublayer) is shown;

4. The difference in absolute velocities due to the viscoelastic term is estimated at ~3%, which corresponds to the gas-dynamics losses of the specific thrust momentum.

Keywords: Navier-Stokes equation, laminar flow, laminar sublayer, velocity profile near the wall.

References

1. Pozrikidis C. High-Reynolds-number flow. In: *Fluid Dynamics. Theory, Computation, and Numerical Simulation*. 3rd ed. Springer, Boston, MA, 2017, pp. 669-751. DOI: 10.1007/978-1-4899-7991-9_10
2. Faro A.A. *Navier-Stokes Equation (An overview and the simplification)*. The discourse. 2020. DOI: 10.13140/RG.2.2.17406.00323
3. Farwig R. From Jean Leray to the millennium problem: the Navier-Stokes equations. *Journal of Evolution Equations*, 2020. DOI: 10.1007/s00028-020-00645-3
4. Shamoon J. *Using HPC for Computational Fluid Dynamics. A Guide to High Performance Computing for CFD Engineers*. Academic Press, New York, 2015, pp. 81-100.
5. Yun A.A. *Issledovanie techenii i prochnostnoi analiz (Studies of flows and strength analysis)*, Moscow, URSS, LENAND, 2014, 427 p.
6. Rodriguez S. *Applied Computational Fluid Dynamics and Turbulence Modeling. Practical Tools, Tips and Techniques*. Springer International Publishing, Switzerland, 2019, 306 p. DOI: 10.1007/978-3-030-28691-0
7. Breuer M., Schmidt S. Hybrid LES-RANS Modeling of Complex Turbulent Flows. *85th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 647-650. DOI: 10.1002/pamm.201410308
8. Veress A., Molnár J., Rohács J. Compressible viscous flow solver. *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*, 2009, vol. 37, no. 1-2, pp. 77-81. DOI: 10.3311/pp.tr.2009-1-2.13
9. Giancarlo A. Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equation for Turbulence Modeling. *Applied Mechanics Reviews*, 2009, vol. 62, no. 4, 040802. DOI: 10.1115/1.3124648
10. Zhou C., Shi L., Wang Z.J. Adaptive High-order Discretization of the Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations. *Computers & Fluids*, 2017, vol. 159, pp. 137-155. DOI: 10.1016/j.compfluid.2017.09.009
11. Heinz S. The large eddy simulation capability of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations: Analytical results. *Physics of Fluids*, 2019, vol. 31, no. 2. DOI: 10.1063/1.5085435
12. Kochetkov Yu.M. *Dvigatel'*, 2019, no. 4(124), pp. 20-22.
13. Lakshminathiraju B.H., Rao V.D., Balakrishna B. Theoretical approach to predict friction coefficients of viscous non-Newtonian liquids in turbulent pipe flow. *International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD)*, 2018, vol. 8, no. 2, pp. 1177-1188. DOI: 10.24247/ijmperdapr2018157
14. Kochetkov Yu.M. *Dvigatel'*, 2013, no. 2(86), pp. 48-50.
15. Kochetkov Yu.M. *Dvigatel'*, 2015, no. 5(101), pp. 30-32.
16. Kochetkov Yu.M. *Dvigatel'*, 2018, no. 3(117), pp. 12-15.
17. Zikanov O.Y. *Essential computational fluid dynamics*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2010, 320 p.
18. *ANSYS CFX-Solver Theory Guide. Release 17.2*. ANSYS Canada Ltd, 2009, 578 p.
19. Vorob'ev A.G., Vorob'eva S.S. Liquid low-thrust rocket engine boundary layer numerical study. *Aerospace MAI Journal*, 2017, vol. 24, no. 1, pp. 49-56.
20. Legaev V.P., Generalov L.K., Galkovskii O.A. An analytical review of existing hypotheses about the physics of friction. *Aerospace MAI Journal*, 2019, vol. 26, no. 1, pp. 174-181.