УДК 519.254

Минимаксное оценивание траектории движения летательного аппарата при наличии эллипсоидальных ограничений на параметры кинематической модели

А.А. Мамаев, К.В. Семенихин.

Аннотация

Рассмотрена задача определения траектории движения ЛА по измерениям дальности и направляющих косинусов с учетом эллипсоидальных ограничений на параметры кинематической модели. На основе минимаксного подхода и методов двойственной оптимизации разработан итерационный алгоритм вычисления оценок неизвестных параметров. Эффективность разработанной методики продемонстрирована на ряде численных примеров.

Ключевые слова

кинематическая модель движения; измерительное средство; минимаксная оценка; эллипсоидальные ограничения; двойственная задача.

1. Введение

В данной работе разработан метод минимаксного оценивания траектории движения летательного аппарата (ЛА) при наличии априорных ограничений на параметры кинематической модели. На практике задача определения закона движения ЛА возникает при изучении работы бортовых систем управления по результатам летных испытаний [1,2]. Для определения соответствия реального движения заданной программе управления необходимо максимально точно восстановить всю фазовую траекторию в пространстве контролируемых параметров с учетом того, что ключевые характеристики ошибок измерения известны лишь приближенно. Применение оптимальных методов оценивания, рассчитанных на некоторые номинальные значения неизвестных характеристик, может привести к получению недостоверных результатов, а использование адаптивных приемов обработки информации может быть затруднено сложностью проведения дополнительных экспериментов.

Таким образом, в условиях недостатка априорной и статистической информации необходимо использовать такие методы оценивания, которые с одной стороны обеспечивают приемлемый уровень точности, а с другой стороны обладают свойством робастности, т.е. статистической устойчивости по отношению к возможным отклонениям неизвестных характеристик от их номинальных значений. Разработка высокоточных алгоритмов статистической обработки траекторных измерений, сочетающих в себе одновременно свойства оптимальности и робастности, основана на методах минимаксного оценивания [3-6].

Важным достоинством минимаксных методов оптимизации алгоритмов оценивания является возможность эффективного использования априорной информации о значениях параметров модели наблюдения. В то время, как стандартные алгоритмы несмещенного оценивания игнорируют имеющиеся ограничения на неизвестные параметры, минимаксные оценки обеспечивают наименьшую верхнюю границу среднеквадратичной (с.к.) ошибки оценивания. В данной статье разработана методика построения минимаксной оценки траектории движения ЛА в той ситуации, когда параметры кинематической модели принадлежат априори известным окрестностям (эллипсоидам). Метод эллипсоидов получил широкое распространение, как при оценивании состояний динамических систем, так и при восстановлении линейных зависимостей в регрессионных моделях наблюдения [7-9]. Однако в задачах векторного оценивания использование эллипсоидальных ограничений осложнено отсутствием аналитических выражений для определения минимаксной оценки. В настоящей работе указанное препятствие преодолено с помощью оригинального итерационного алгоритма, который разработан на основе методов теории двойственности экстремальных задач [10,11]. Эффективность разработанной методики продемонстрирована на нескольких численных примерах.

2. Описание модели

Предположим, что на интервале наблюдений $[0,T]$ движение ЛА подчиняется следующей кинематической модели:

$$X(t) = \begin{bmatrix} \vartheta_1 + \vartheta_4 t/T \\ \vartheta_2 + \vartheta_5 t/T \\ \vartheta_3 + \vartheta_6 t/T \end{bmatrix}, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $X(t)$ – вектор координат центра масс ЛА в некоторой базовой декартовой системе координат $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{\vartheta_1,...,\vartheta_6\}$ – набор неизвестных параметров. При этом $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ – координаты начального положения $X(0)$, а $\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6$ – координаты вектора перемещения $X(T) - X(0)$.

Допустим также, что до начала проведения летных испытаний сформирована программа движения ЛА, которую система управления должна отработать в автоматическом режиме. Это означает, что задана опорная траектория

$$X^o(t) = \begin{bmatrix} \vartheta_1^o + \vartheta_4^o \, t/T \\ \vartheta_2^o + \vartheta_5^o \, t/T \\ \vartheta_3^o + \vartheta_6^o \, t/T \end{bmatrix}, \quad t \in [0, T],$$

где $\vartheta_1^o,...,\vartheta_6^o$ – известные коэффициенты.

Пусть на основе результатов предшествующих наблюдений и данных о технических характеристиках ЛА были указаны границы возможных отклонений координат начального положения и скорости от их опорных значений:

$$\left\| X(0) - X^o(0) \right\| \le \rho_1, \quad T \left\| \dot{X} - \dot{X}^o \right\| \le \rho_2 / T, \tag{2}$$

где ρ_1, ρ_2 – известные положительные числа, а $\| \cdot \|$ обозначает евклидову норму, т.е. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ при $x \in R^n$.

Наблюдение за движением ЛА проводится с помощью неподвижного измерительного средства (ИС), которое позволяет определять направляющие косинусы ξ_1, ξ_2 и дальность ξ_3. Для простоты будем считать, что базовая система координат совпадает с локальной системой, связанной с данным ИС. Тогда преобразование от декартовых координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ к измеряемым $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ осуществляется по правилу

$$\Xi(t) = \Psi(X(t)), \quad \Psi : R^3 \to R^3, \quad \Psi(x) = \begin{bmatrix} x_1 / \|x\| \\ x_2 / \|x\| \\ \|x\| \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Допустим, что измерения проводятся в фиксированные моменты времени $t_1 = 0, t_2 = T/(N-1), ..., t_N = T$ со случайной аддитивной ошибкой $\varepsilon(t_k)$:

$$\tilde{\Xi}(t_k) = \Xi(t_k) + \varepsilon(t_k), \quad k = 1,...,N \tag{3}$$

Ошибка измерений $\{\varepsilon(t_1),...,\varepsilon(t_N)\}$ представляет собой набор независимых гауссовских векторов с нулевым математическим ожиданием $\mathsf{E}\{\varepsilon(t_k)\}=0$ и известной ковариационной матрицей $\mathrm{cov}\{\varepsilon(t_k),\varepsilon(t_k)\}=W$, причем W положительно определена.

Будем считать, что погрешность линеаризации уравнений (3) в окрестности опорной траектории пренебрежимо мала по сравнению со случайными ошибками наблюдений. Тогда вместо нелинейной модели регрессии (3) мы имеем право перейти к уравнению, линейному относительно параметров $\{\vartheta_1,...,\vartheta_6\}$:

$$\tilde{\Xi}(t_k)=\Psi(X^o(t_k))+D(t_k)a(t_k)(\vartheta-\vartheta^o)+\varepsilon(t_k),\quad k=1,...,N \tag{4}$$

где $D(t)$ – матрица частных производных $\left.\frac{\partial\Psi_i}{\partial x_j}\right|_{x=X^o}$, $i,j=1,2,3$:

$$D(t)=\left.\begin{pmatrix}\left(x_2^2+x_3^2\right)/\|x\|^3 & -x_1x_2/\|x\|^3 & -x_1x_3/\|x\|^3\\ -x_1x_2/\|x\|^3 & \left(x_2^2+x_3^2\right)/\|x\|^3 & -x_2x_3/\|x\|^3\\ x_1/\|x\| & x_2/\|x\| & x_3/\|x\|\end{pmatrix}\right|_{x=X^o}$$

$$\vartheta=\begin{bmatrix}\vartheta_1\\ \vdots\\ \vartheta_6\end{bmatrix},\quad \vartheta^o=\begin{bmatrix}\vartheta_1^0\\ \vdots\\ \vartheta_6^0\end{bmatrix},\quad a(t):=\begin{bmatrix}1&0&0&t/T&0&0\\0&1&0&0&t/T&0\\0&0&1&0&0&t/T\end{bmatrix}.$$

3. Постановка задачи

Целью обработки всего массива наблюдений (4) является наиболее точное восстановление траектории ЛА (1) в рамках описанной выше модели движения с учетом имеющейся априорной информации о неизвестных параметрах и ошибках наблюдения.

Для корректной формулировки данной задачи оценивания запишем сначала модель наблюдения в следующей векторной форме:

$$X=X^o+a\theta,\quad Y=Y^o+A\theta+\varepsilon \tag{5}$$

где X – оцениваемый вектор, Y – вектор наблюдений, ε – вектор ошибок наблюдений. При этом

$$X=o\begin{bmatrix}X(t_1)\\ \vdots\\ X(t_N)\end{bmatrix},\quad X^o=\begin{bmatrix}X^o(t_1)\\ \vdots\\ X^o(t_N)\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}\Xi(t_1)\\ \vdots\\ \Xi(t_N)\end{bmatrix},\quad Y^o=\begin{bmatrix}\Psi(X^o(t_1))\\ \vdots\\ \Psi(X^o(t_N))\end{bmatrix},$$

$$\varepsilon:=\begin{bmatrix}\varepsilon(t_1)\\ \vdots\\ \varepsilon(t_N)\end{bmatrix},\quad a:=\begin{bmatrix}a(t_1)\\ \vdots\\ a(t_N)\end{bmatrix},\quad A:=\begin{bmatrix}D(t_1)a(t_1)\\ \vdots\\ D(t_N)a(t_N)\end{bmatrix},$$

где $X, X^o, Y, Y^0, \varepsilon \in R^n$, $a, A \in R^{n\times 6}$, $n = 3N$, а $\theta = \vartheta - \vartheta^o \in R^6$ – вектор неопределенных параметров, который принадлежит следующему множеству:

$$\Theta = \{\mathrm{col}[u, v] : u \in \Theta_1, v \in \Theta_2\}.$$

Здесь $\mathrm{col}[u, v]$ обозначает вектор-столбец, составленный из двух подвекторов u, v, а множества Θ_1, Θ_2 представляют собой эллипсоиды:

$$\Theta_1 = \{u \in R^3 : \|u\| \le \rho_1\}, \quad \Theta_2 = \{v \in R^3 : \|v\| \le \rho_2\}.$$

Априорные предположения о векторе ε можно ввести следующим образом:

$$\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I_N \otimes W),$$

т.е. ε – гауссовский вектор с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$I_N \otimes W = \begin{pmatrix} W & O & \cdots & O \\ O & W & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & W \end{pmatrix} \in R^{n\times n}.$$

Рассмотрим произвольную линейную оценку вектора X по наблюдению Y: $\tilde{X} = \Lambda Y + f$, где $\Lambda \in R^{n\times n}$, $f \in R^n$. Качество этой оценки будем описывать с помощью среднеквадратичного критерия

$$\begin{aligned} J_\theta(F) &= \mathsf{E}\|\tilde{X} - X\|^2 = \mathrm{tr}\left[\mathrm{cov}\{\tilde{X} - X, \tilde{X} - X\}\right] + \|\mathsf{E}\{\tilde{X} - X\}\|^2 = \\ &= \mathrm{tr}\left[\Lambda(I_N \otimes W)\Lambda^*\right] + \|(\Lambda A - a)\theta + \Lambda Y^o - X^o + f\|^2, \end{aligned} \tag{6}$$

где tr – след матрицы, Λ^* – транспонированная матрица, а F обозначает оператор оценивания, т.е. отображение $y \mapsto \Lambda y + f$. Класс указанных операторов оценивания обозначим через $\mathcal{F}$.

Итак, задача оптимального оценивания в модели наблюдения (5) состоит в минимизации с.к. критерия $J_\theta(\cdot)$ на выбранном классе операторов оценивания $\mathcal{F}$. Однако при таком способе определения оптимальная оценка будет зависеть от значения вектора неизвестных параметров θ. Поэтому для корректной формулировки задачи оптимального оценивания воспользуемся минимаксным подходом, т.е. будем считать, что качество оценок $\tilde{X} = FY$ определяется гарантированным значением с.к. критерия

$$\max_{\theta \in \Theta} J_\theta(F) \tag{7}$$

на известном множестве неопределенности Θ.

Таким образом, искомая оценка $\hat{X} = \hat{F}Y$ определяется по правилу:

$$\hat{F} \in \arg\min_{F \in \mathcal{F}} \max_{\theta \in \Theta} J_\theta(F) \tag{8}$$

Иначе говоря, искомый оператор оценивания $\hat{F}$ представляет собой точку минимума функционала (7).

Далее оценку $\hat{X} = \hat{F}Y$ и соответствующий оператор $\hat{F}$ будем называть минимаксными.

4. Метод минимаксного оценивания

Итак, для синтеза оценки траектории движения ЛА по наблюдениям (4) с учетом ограничений (2) предлагается использовать минимаксный подход, для реализации которого необходимо решить задачу минимаксной оптимизации (8). Нетрудно видеть, что при каждом θ функционалы $J_\theta(\cdot)$ представляют собой неотрицательные квадратичные формы и потому являются выпуклыми. Следовательно, выпуклым будет также и их максимум, т.е. функционал (7) , но в отличие от квадратичных форм он будет негладким. Поэтому минимаксная задача (8) относится к классу задач недифференцируемой выпуклой оптимизации. Однако стандартными средствами выпуклого программирования [12] ее непосредственное решение невозможно в силу большой размерности.

Для построения минимаксной оценки в данной работе используется метод двойственной оптимизации. Для компактного его изложения немного упростим среднеквадратичный критерий. Заметим, что если вектор сдвига f в оценке $\tilde{X} = \Lambda Y + f$ выбрать равным $f = X^o - \Lambda Y^o$ и положить $V = \theta\theta^*$, то выражение (6) примет вид

$$J(\Lambda, V) = \mathrm{tr}\left[\Lambda(I_N \otimes W)\Lambda^* + (\Lambda A - a)V(\Lambda A - a)^*\right]. \tag{9}$$

Данный функционал является выпуклым по $\Lambda \in R^{n\times n}$ при любой неотрицательно определенной матрице $V \in R^{6\times 6}$ и линейным по V при всякой Λ. Вместо множества матриц вида $V = \theta\theta^*$, $\theta \in \Theta$, рассмотрим его выпуклую оболочку:

$$\mathcal{V} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \theta^{(i)} \left(\theta^{(i)}\right)^* : \theta^{(i)} \in \Theta, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, m \geq 1 \right\}. \tag{10}$$

В силу линейности функционала $J(\Lambda, \cdot)$ можно утверждать [10], что

$$\max_{\theta \in \Theta} J(\Lambda, \theta\theta^*) = \max_{V \in \mathcal{V}} J(\Lambda, V). \tag{11}$$

Тем самым расширение множества неопределенности не приводит к увеличению гарантированного значения критерия (7).

Итак, исходную минимаксную задачу можно заменить следующей:

$$\hat{\Lambda} \in \arg\min_{\Lambda \in R^{n\times n}} \overline{J}(\Lambda), \quad \overline{J}(\Lambda) = \max_{V \in \mathcal{V}} J(\Lambda, V). \tag{12}$$

Для ее решения воспользуемся методом двойственной оптимизации. Будем искать минимаксный оператор в виде $\hat{\Lambda} = \Lambda_{\hat{V}}$, где

$$\Lambda_V \in \arg\min_{\Lambda \in R^{n\times n}} J(\Lambda, V), \tag{13}$$

т.е. Λ_V – наилучший оператор оценивания, соответствующий фиксированной матрице V, а $\hat{V}$ представляет собой решение двойственной (максиминной) задачи:

$$\hat{V} \in \arg\max_{V \in \mathcal{V}} \underline{J}(V), \quad \underline{J}(V) = \inf_{\Lambda \in R^{n\times n}} J(\Lambda, V). \tag{14}$$

Функционал $\underline{J}(\cdot)$ в дальнейшем будем называть двойственным, а матрицу $\hat{V}$ наименее благоприятной. Таким образом, $\hat{V}$ представляет собой точку максимума двойственного функционала на множестве матриц (10).

По сравнению с прямой (минимаксной) задачей двойственная задача обладает рядом преимуществ. Во-первых, множество $\mathcal{V}$, по которому проводится оптимизация в (14), лежит в пространстве существенно меньшей размерности, чем в случае (12). Во-вторых, функционал $\underline{J}(\cdot)$ является гладким, вогнутым и имеет явный вид. В-третьих, наилучший оператор оценивания (13) также определяется аналитическим выражением. И наконец, для решения (14) можно использовать известные модификации градиентных алгоритмов, приспособленные к задачам условной оптимизации.

Отметим, что ключевыми условиями для справедливости описанной выше схемы являются требования выпуклости и компактности множества неопределенности $\mathcal{V}$, а также условие невырожденности ковариационной матрицы вектора шумов $\operatorname{cov}\{\varepsilon, \varepsilon\} = I_N \otimes W$.

При указанных условиях можно утверждать следующее [11]:

1) наилучший оператор $\Lambda_{\hat{V}}$, соответствующий решению $\hat{V}$ двойственной задачи (14), является минимаксным оператором (12) и определяет минимаксную оценку вектора X по правилу

$$\hat{X} = X_0 + \hat{\Lambda}(Y - Y_0);$$

2) минимаксный оператор $\hat{\Lambda}$ и решение двойственной задачи $\hat{V}$ образуют седловую точку с.к.-критерия, а именно,

$$J(\hat{\Lambda}, V) \le J(\hat{\Lambda}, \hat{V}) \le J(\Lambda, \hat{V}) \quad \forall \Lambda \in R^{n\times n} \quad \forall V \in \mathcal{V};$$

3) выполнено соотношение двойственности

$$\hat{J} = \overline{J}(\hat{\Lambda}) = \underline{J}(\hat{V}).$$

Число $\hat{J}$ далее будем называть оптимальным гарантированным значением с.к.-критерия.

5. Алгоритм вычисления минимаксной оценки

Для построения минимаксной оценки воспользуемся изложенной выше схемой.

Начнем с решения задачи о наилучшей линейной оценке (13). Значение критерия $J(\Lambda, V)$ совпадает со с.к.-погрешностью оценки $\widetilde{X}_V = X^o + \Lambda_V (Y - Y^o)$ в модели (5) при условии, что θ – случайный центрированный вектор с ковариационной матрицей V. Поэтому наилучший оператор оценивания определяется выражением [13]:

$$\Lambda_V = aVA^*(AVA^* + I_N \otimes W)^{-1},$$

которое можно записать без непосредственного обращения матриц большой размерности:

$$\Lambda_V = aK_V A^*(I_N \otimes W^{-1}),$$
$$K_V = \left(V^+ + P_V D P_V\right)^+, \quad D = A^*(I_N \otimes W^{-1})A, \quad P_V = VV^+,$$

где V^+ – псевдообращение матрицы V. При этом оценка $\widetilde{X}_V = X^o + \Lambda_V (Y - Y^o)$ допускает следующую запись:

$$\widetilde{X}_V = \mathrm{col}\left[\widetilde{X}_V(t_1), \dots, \widetilde{X}_V(t_N)\right], \quad \widetilde{X}_V(t_k) = X^o(t_k) + a(t_k)\widetilde{\theta}_V, \quad k = 1, \dots, N,$$
$$\widetilde{\theta}_V = K_V \sum_{l=1}^{N} A^*(t_l) W^{-1}(Y(t_l) - Y^o(t_l)), \quad D = \sum_{l=1}^{N} A^*(t_l) W^{-1} A(t_l).$$

Укажем выражение для критерия $J(\Lambda_V, U)$ на указанном выше операторе оценивания и некоторой матрице U:

$$J(\Lambda_V, U) = \mathrm{tr}\left[S\left\{K_V D K_V + (K_V D - I_6) U (K_V D - I_6)\right\}\right], \quad S = a^* a = \sum_{l=1}^{N} a^*(t_l) a(t_l),$$

где $I_6 \in R^{6\times 6}$ – единичная матрица. Тогда двойственный функционал принимает вид

$$\underline{J}(V) = J(\Lambda_V, V) = \mathrm{tr}\left[SK_V\right].$$

Отметим, что введенные выше матрицы $V, K_V, D, P_V, S, U, I_6$ – одинакового размера

Теперь опишем численную процедуру решения двойственной задачи (14).

Алгоритм 1. 0) Выбрать уровень погрешности $\bar{\delta} \geq 0$, положить $s = 0$ и выбрать произвольно матрицу $V^0 \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$.

1) Для наилучшего оператора оценивания Λ_{V^s} определить соответствующую наихудшую матрицу:

$$\overline{V}^s \in \arg\max_{V\in\mathcal{V}} J(\Lambda_{V^s}, V). \qquad (15)$$

2) Вычислить производную двойственного функционала в точке V^s по направлению $\overline{V}^s - V^s$ по следующему правилу:

$$\delta^s = J(\Lambda_{V^s}, \overline{V}^s) - \underline{J}(V^s).$$

3) Если $\delta^s \le \bar{\delta}$, то закончить итерационный процесс, положив

$$\hat{X} = \tilde{X}_{V^s}, \quad \hat{V} = V^s.$$

В противном случае перейти к следующему шагу.

4) Найти оптимальный сдвиг вдоль выбранного направления:

$$\gamma^s \in \arg\min_{\gamma\in[0,1]} \underline{J}(V^s + \gamma(\overline{V}^s - V^s)).$$

5) Положить $V^{s+1} = V^s + \gamma^s(\overline{V}^s - V^s)$ и перейти к шагу 1).

Данный алгоритм получен в результате применения метода условного градиента [14] к двойственной задаче (14). Если уровень погрешности $\bar{\delta}$ выбран нулевым, то алгоритм вырабатывает бесконечные последовательности матриц $\{V^s\}$ и операторов оценивания $\{\Lambda_{V^s}\}$. Известно, что $\{V^s\}$ сходится к множеству решений двойственной задачи (14), а $\{\Lambda_{V^s}\}$ сходится к минимаксному оператору оценивания [15]. Если же $\bar{\delta} > 0$, то оценка $\hat{X}$ и матрица $\hat{V}$, получаемые на 3-м шаге алгоритма, являются лишь приближениями искомой минимаксной оценки и наименее благоприятной матрицы соответственно. Для того чтобы судить о точности этих приближений, можно использовать неравенства:

$$\hat{J} - \underline{J}(V^s) \le \delta^s, \quad \overline{J}(\Lambda_{V^s}) - \hat{J} \le \delta^s.$$

где δ^s – число, определяемое на 2-м шаге алгоритма.

Задача одномерной оптимизации, возникающая на 4-м шаге, может быть решена с помощью стандартных процедур таких, как метод деления отрезка пополам или метод золотого сечения [16].

Таким образом, для практической реализации описанного выше алгоритма остается указать метод решения вспомогательной задачи (15). Так как эта задача представляет самостоятельный интерес, ее решение описано в следующем разделе.

6. Задача о наихудшем значении с.к.-критерия

Будем называть задачу максимизации (11) задачей о наихудшем значении с.к.-критерия. В силу конструкции функционала $J(\Lambda, V)$ можно утверждать, что вектор

$$\bar{\theta} \in \arg\max_{\theta\in\Theta} \theta^*(\Lambda A - a)^*(\Lambda A - a)\theta \tag{16}$$

позволяет указать решение задачи (11):

$$\bar{\theta}\bar{\theta}^* \in \arg\max_{V\in\mathcal{V}} J(\Lambda, V), \quad \max_{V\in\mathcal{V}} J(\Lambda, V) = \mathrm{tr}\left[\Lambda(I_N \otimes W)\Lambda^*\right] + \theta^*(\Lambda A - a)^*(\Lambda A - a)\theta.$$

В сформулированной ниже теореме указан способ вычисления «наихудшего» вектора параметров (16).

Теорема 1. *Пусть* $C \in R^{p\times p}$ *– неотрицательно определенная матрица, имеющая структуру*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} \end{bmatrix}, \quad C_{11} \in R^{p_1\times p_1}, \quad C_{12} \in R^{p_1\times p_2}, \quad C_{22} \in R^{p_2\times p_2}, \quad p = p_1 + p_2;$$

Θ *– подмножество* R^p *следующего вида:*

$$\Theta = \left\{\theta = \mathrm{col}[u, v] : u \in R^{p_1}, \|u\| \le \rho_1, v \in R^{p_2}, \|v\| \le \rho_2\right\}$$

Тогда

1) справедливо равенство

$$\max_{\theta\in\Theta} \theta^* C\theta = \min_{t\in(0,1)} \varphi(t), \quad \varphi(t) = \|E(t)CE(t)\|, \tag{17}$$

где $\|\cdot\|$ *– спектральная норма, а* $E(t) \in R^{p\times p}$ *– матричная функция вида*

$$E(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\rho_1}{\sqrt{1-t}} I_{p_1} & O \\ O & \dfrac{\rho_2}{\sqrt{t}} I_{p_2} \end{bmatrix}$$

причем I_{p_1}, I_{p_2}, O *– единичные и нулевая матрицы соответствующей размерности;*

2) $\varphi(t)$ *– строго выпуклая функция переменной* $t \in (0,1)$ *с единственной точкой минимума* $\bar{t}$ *;*

3) вектор $\bar{\theta} = E(\bar{t})\bar{e}$ *доставляет максимум в правой части (17), если* $\bar{e}$ *– нормированный собственный вектор матрицы* $E(\bar{t})CE(\bar{t})$, *соответствующий максимальному собственному значению.*

Доказательство теоремы 1 основано на применении несимметричной теоремы о минимаксе [17] к соотношению (17).

Теперь мы можем описать способ нахождения «наихудшей» матрицы (15):

а) составить матрицу $C^s = (DK_{V^s} - I_6)S(DK_{V^s} - I_6)$;

б) найти $\bar{t}^s \in \arg\min_{t\in(0,1)} \left\|E(t)C^s E(t)\right\|$;

в) определить нормированный собственный вектор $\bar{e}^s$ матрицы $E(\bar{t}^s)C^s E(\bar{t}^s)$, соответствующий максимальному собственному значению;

г) положить $\bar{\theta}^s = E(\bar{t}^s)\bar{e}^s$ и $\bar{V}^s = \bar{\theta}^s\left(\bar{\theta}^s\right)^*$.

7. Результаты компьютерного моделирования

Предположим, что истинный закон движения ЛА на интервале наблюдений $[0,T]$ описывается следующими уравнениями

$$X(t) = \begin{bmatrix} -1250 + 956\,t/T \\ 25200 + 1108\,t/T \\ 9560 + 32\,t/T \end{bmatrix},$$

где $T = 10\,\text{с}$.

При этом расчетный закон движения имеет вид

$$X^o(t) = \begin{bmatrix} -1000 + 700\,t/T \\ 25000 + 900\,t/T \\ 9500 + 50\,t/T \end{bmatrix}.$$

Даны априорные ограничения на значения параметров $\rho_1 = 250\,\text{м}$, $\rho_2 = 250\,\text{м}$.

Известна ковариационная матрица ошибки измеряемых координат $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$:

$$W = \begin{bmatrix} 302{,}0 & 44{,}4 & -20{,}84 \\ 44{,}4 & 414{,}0 & 30{,}63 \\ -20{,}84 & 30{,}63 & 403{,}17 \end{bmatrix},$$

причем ξ_1 $(10^3 \cdot \text{рад})$, ξ_2 $(10^3 \cdot \text{рад})$, ξ_3 (м).

Для приведенных выше исходных данных были смоделированы $N = 40$ наблюдений. Наряду с минимаксной оценкой траектории

$$\hat{X} = X_0 + \hat{\Lambda}(Y - Y_0),$$

были рассмотрены наилучшая линейная несмещенная оценка

$$\tilde{X} = X^o + \tilde{\Lambda}(Y - Y^o), \quad \tilde{\Lambda} = a\left(A^*(I_N \otimes W^{-1})A\right)^+ A^*(I_N \otimes W^{-1})$$

и опорная траектория X^o. Ниже приведены значения построенных оценок в начальный и конечный моменты времени.

Таблица 1. Координаты и их оценки в начальный момент

Истинное значение $X(0)$	Опорная траектория $X^o(0)$	Наилучшая линейная несмещенная оценка $\tilde{X}(0)$	Минимаксная оценка $\hat{X}(0)$

-1250	-1000	-1333	-1144
25200	25000	25103	25218
9560	9500	9813	9520

Таблица 2. Координаты и их оценки в конечный момент

Истинное значение $X(T)$	Опорная траектория $X^o(T)$	Наилучшая линейная несмещенная оценка $\tilde{X}(T)$	Минимаксная оценка $\hat{X}(T)$
-294	-300	-604,9	-582,6
26308	25900	26419	26308
9592	9550	9285	9580

Для сравнительного анализа результатов оценивания, были вычислены значения с.к.-критерия в естественной шкале

$$\sigma(\Lambda, V) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathsf{E}\left\|\bar{X}(t_k) - X(t_k)\right\|^2} = \sqrt{\frac{J(\Lambda, V)}{N}},$$

где $\bar{X} = X^o + \Lambda(Y - Y^o)$ – оценка, определяемая оператором оценивания Λ.

Таким образом, гарантированная с.к.-погрешность минимаксной оценки составила

$$\max_{V \in \mathcal{V}} \sigma(\hat{\Lambda}, V) = 213{,}6 \text{ м},$$

а с.к.-погрешность наилучшей линейной несмещенной оценки

$$\sigma(\tilde{\Lambda}, V) = 363{,}4 \text{ м} \quad \forall V$$

При этом максимальное отклонение от опорной траектории, при введенных ограничениях, равно

$$\max_{\theta \in \Theta} \sqrt{\frac{1}{N}\left\|X - X^o\right\|^2} = 382{,}2 \text{ м}.$$

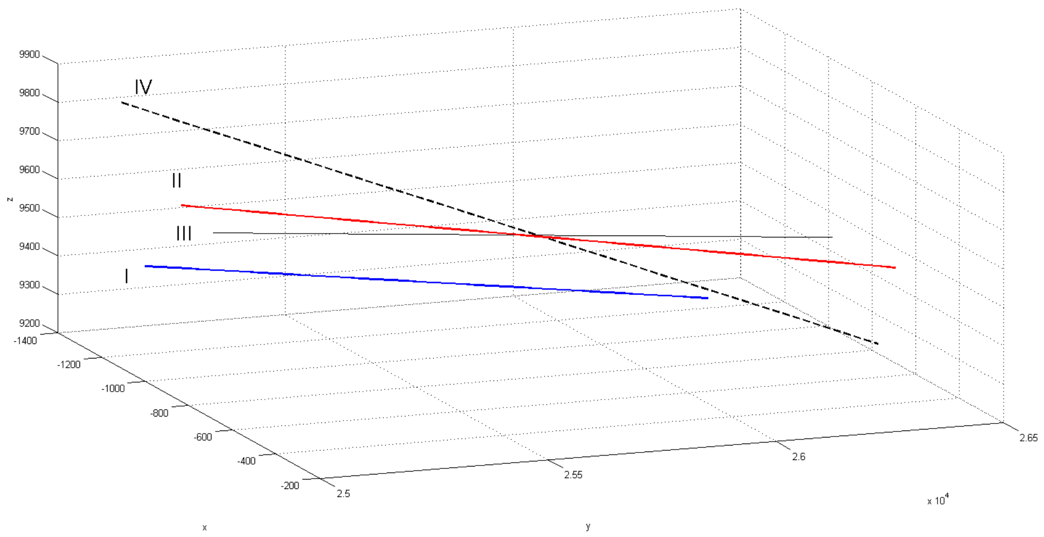

Рисунок 1. Траектория в декартовых координатах: I – опорная траектория; II – истинная траектория; III – минимаксная оценка; IV – наилучшая линейная несмещенная оценка.

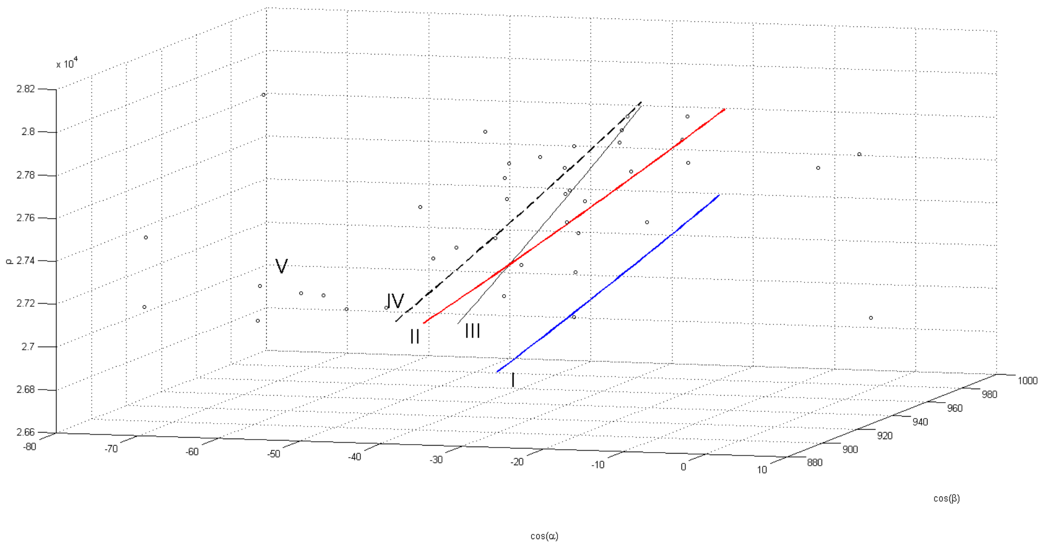

Рисунок 2. Траектория в измеряемых координатах: I – опорная траектория; II – истинная траектория; III – минимаксная оценка; IV – наилучшая линейная несмещенная оценка; V – наблюдения.

Итак, приведенные результаты статистического моделирования свидетельствуют о том, что учет априорных ограничений на параметры позволяет существенно повысить качество оценивания. В сравнении с наилучшими несмещенными оценками минимаксные оценки обладают не только меньшей погрешностью на имеющихся наблюдениях, но имеют также значительно меньшее гарантированное значение с.к.-погрешности.

8. Заключение

В работе на основе минимаксного подхода разработан метод оценивания траектории движения ЛА с использованием ограничений эллипсоидального типа на параметры кинематической модели. С помощью методов теории двойственности исходную трудоемкую задачу минимаксной оптимизации удалось свести к эквивалентной двойственной задаче, для которой предложен эффективный итерационный алгоритм. Для реализации данного алгоритма решена важная с практической точки зрения задача о наихудшем значении с.к.-критерия. В работе приведены результаты компьютерного моделирования, которые свидетельствует о преимуществах минимаксных методов в сравнении с традиционными методами несмещенного оценивания.

Библиографический список

1. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. – М.: Сов. радио, 1978.

2. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1989.

3. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. – М.: Наука, 1980.

4. *Лидов М.Л., Бахшиян Б.Ц., Матасов А.И.* Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания (обзор) // *Космич. исслед.* – 1991. – Т.29, № 5. – С. 659-684

5. *Панков А.Р., Платонов Е.Н., Семенихин К.В.* Гарантирующее вероятностное оценивание в линейных статистически неопределенных моделях // *Вестник компьютерных и информационных технологий.* – 2006. – № 9. – С. 8-13.

6. *Игнащенко Е.Ю., Панков А.Р., Семенихин К.В.* Минимаксно-статистический подход к повышению надежности обработки измерительной информации // *Автоматика и телемеханика.* – 2010. – № 2. – С. 76-91.

7. Кукс А., Ольман В. Минимаксная линейная оценка коэффициентов регрессии // *Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат.* – 1972. – Т.1, № 1. – С. 66-72

8. *Kurzhanski A. B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. – Laxenburg: IIASA, 1989.

9. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988.

10. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.

11. *Панков А.Р., Семенихин К.В.* Минимаксная идентификация в неопределенно-стохастической линейной модели // *Автоматика и телемеханика.* – 1988. – № 11. – С. 158-171.

12. *Ben-Tal A., Nemirovski A.* Lectures on modern convex optimization. Analysis, algorithms, and engineering applications. – Philadelphia: SIAM Publ., 2001.

13. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977.

14. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1980.

15. *Панков А.Р., Платонов Е.Н., Семенихин К.В.* Минимаксная квадратичная оптимизация и ее приложения к планированию инвестиций // *Автоматика и телемеханика*. – 2001. – № 12. – С. 55-73.

16. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.

17. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1980.

Сведения об авторах

Мамаев Артём Андреевич, студент Московского авиационного института (государственного технического университета) e-mail: artem-041988@yandex.ru, тел.: (499)-158-45-60

Семенихин Константин Владимирович, доцент Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н. МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3 125; e-mail: siemenkv@rambler.ru, тел.: (499)-158-45-60