УДК 519.85

Необходимые и достаточные условия экстремума в аналитических задачах оптимизации

В.Н. Нефедов

Аннотация

Рассматривается конечномерная задача математического программирования с ограничениями типа неравенств, а также задача безусловной оптимизации. Предполагается, что в окрестности нулевой точки (принадлежащей допустимому множеству) целевая функция и функции в ограничениях являются аналитическими. Предлагаются некоторые достаточно тонкие необходимые и достаточные условия локального минимума, позволяющие в ряде сложных для исследования случаев дать ответ на вопрос, является ли нулевая точка точкой локального минимума в рассматриваемой задаче или нет.

Предлагаемая работа представляет собой обзор, а также обобщение результатов двух работ автора, посвященных той же теме (см. [1,2]). В указанных работах приведены подробные доказательства большинства результатов, приводимых ниже. В настоящей работе эти доказательства, а также доказательства, сходные с приводимыми в [1,2], опускаются. Приводятся лишь формулировки основных утверждений, которые могут быть использованы в практических задачах.

В приводимых необходимых и достаточных условиях экстремума используются понятия квазиоднородной полиномиальной формы (см. [3]), а также строгой формы(см.[4]) степенного ряда.

Ключевые слова

задача математического программирования; аналитические задачи; оптимизация; необходимые и достаточные условия локального минимума; полиномиальные формы.

1. Основные определения и обозначения. Обозначим $\mathbf{R}_{\geq} = \{t \in \mathbf{R} \mid t \geq 0\}$, $\mathbf{Z}_{\geq} = \mathbf{Z} \cap \mathbf{R}_{\geq}$. Обозначим для любого натурального m $0_{(m)} = (0,...,0) \in \mathbf{R}^m$. Пусть $x, y \in \mathbf{R}^m$, $t \geq 0$. Обозначим $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_m y_m$, $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, $B^{(m)}[t] = \{x \in \mathbf{R}^m \,\big|\, |x| \leq t\}$. Обозначим, далее, через $\mathbf{R}\{x\}$ множество формальных степенных рядов, т.е. выражений вида

$$p(x) = \sum_{k \in Z^m_{\geq}} a_k x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m} ,$$

где $a_k \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{Z}^m_{\geq}$. При этом для вектора $k \in \mathbf{Z}^m_{\geq}$ обозначим: $x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$; $coef(p,k) = a_k$; $N_p = \{k \in \mathbf{Z}^m_{\geq} \mid coef(p,k) \neq 0\}$ - носитель ряда $p(x)$.

Будем для рядов $p(x), q(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ писать: $p \equiv 0$, если $N_p = \varnothing$; $\neg(p \equiv 0)$, если $N_p \neq \varnothing$; $q \rho p$, если а) $N_q \subseteq N_p$, б) $\forall k \in N_q$ $coef(q,k) = coef(p,k)$ (очевидно, что ρ - бинарное отношение частичного порядка на множестве $\mathbf{R}\{x\}$); $q \equiv p$, если $q \rho p$, $p \rho q$.

Будем говорить, что ряд $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ существенно зависит от переменной x_i, где $i \in \{1,2,...,m\}$, если $\exists k \in N_p : k_i > 0$. В противном случае говорим, что $p(x)$ не зависит от x_i.

Обозначим $\mathbf{R}\{x\}_a = \{p(x) \in \mathbf{R}\{x\} \mid \exists$ открытая окрестность точки $0_{(m)}$, в которой ряд $p(x)$ абсолютно сходится$\}$.

Пусть $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$, $i \in \{1,2,..., m\}$. Возможны случаи: а) в ряде $p(x)$ присутствуют ненулевые члены со сколь угодно большими значениями k_i; б) величины k_i в ненулевых членах ряда $p(x)$ ограничены сверху; в) $p \equiv 0$. Будем писать в случае а) $\deg_{x_i} p(x) = \infty$, а в случаях б) или в) пишем $\deg_{x_i} p(x) < \infty$. При этом в случае б) обозначаем $\deg_{x_i} p(x) = \max\{k_i \mid k \in N_p\}$.

Ряд $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ называется *правильным* (см. [5, стр. 340]) по переменной x_i (где $i \in \{1,2,..., m\}$), если $\exists k \in N_p : k_j = 0, j \in \{1,2,..., m\} \setminus \{i\}$, (т.е. $\neg[p(0,...,0, x_i, 0,...,0) \equiv 0]$).

Функция $f(x)$ называется *аналитической* на открытом множестве $D \subseteq \mathbf{R}^m$, если она определена на D и для любой точки $x^0 \in D$ найдется ряд $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}_a$, абсолютно сходящийся на некотором открытом множестве $V \subseteq \mathbf{R}^m$, где $0_{(m)} \in V$, $x^0 + V \subseteq D$ и такой, что $\forall x \in V$ $f(x + x^0) = p(x)$. Очевидно, что если для $x^0 \in D$ указанный ряд существует, то он единствен.

Будем для любого полинома $p(x)$ обозначать через $\deg_{p(x)}$ (или $\deg_p$) степень этого полинома.

Будем полином $\varphi(x)$ называть *A-квазиоднородной полиномиальной формой*, где $A \in \mathbf{N}^m$ ($\mathbf{N}$ – натуральный ряд), если $\neg[\varphi \equiv 0], \exists B \in \mathbf{Z}_{\geq}: \ \forall k \in N_\varphi \quad \langle A, k \rangle = B$. При этом обозначаем $B_{\varphi, A} = B$.

Будем говорить, что полином $\varphi(x)$ является квазиоднородной полиномиальной формой, если $\exists A \in \mathbf{N}^m$, что $\varphi(x)$ является A-квазиоднородной полиномиальной формой.

Будем квазиоднородную полиномиальную форму $\varphi(x)$ называть *неотрицательной*, если $\forall x \in \mathbf{R}^m \ \ \varphi(x) \geq 0$.

Будем квазиоднородную полиномиальную форму $\varphi(x)$ называть *невырожденной в сильном (слабом) смысле*, если $\forall x \in \mathbf{R}^m$ выполняется $x_{i_1}^2 + ... + x_{i_r}^2 \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) \neq 0 \quad (x_{i_1} \neq 0, ..., x_{i_r} \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) \neq 0)$, где $\{x_{i_1}, ..., x_{i_r}\}$ - множество переменных, от которых существенно зависит $\varphi(x)$.

Пример 1. 1) $\varphi_1(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1 x_2^2 + 2x_2^4$ является неотрицательной невырожденной в сильном смысле (2,1)-квазиоднородной полиномиальной формой; при этом $B_{\varphi_1, A} = 4$, где $A = (2,1)$.

2) $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1^6 + x_1^2 x_2^2$ является неотрицательной невырожденной в слабом смысле (1,2)-квазиоднородной полиномиальной формой; при этом $B_{\varphi_2, A} = 6$, где $A = (1,2)$.

Для ряда $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$, полинома $\varphi(x)$ и вектора $A \in \mathbf{N}^m$ будем говорить, что $\varphi(x)$ является главной A-квазиоднородной полиномиальной формой ряда $p(x)$, если

1) $\varphi \rho p$; 2) $N_\varphi = \{k \in N_p \mid \langle A, k \rangle = \min\{\langle A, k' \rangle \mid k' \in N_p\}\}$.

Будем говорить, что полином $\varphi(x)$ является главной квазиоднородной полиномиальной формой ряда $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$, если $\exists A \in \mathbf{N}^m$, что $\varphi(x)$ является главной A-квазиоднородной полиномиальной формой этого ряда.

Для ряда $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ обозначим через $G(p)$ множество всех его главных квазиоднородных полиномиальных форм.

Будем говорить, что полином $\varphi(x)$ является максимальной главной квазиоднородной полиномиальной формой ряда $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$, если 1) $\varphi(x) \in G(p)$;

2) $\forall g(x) \in G(p) \ \ \varphi \rho g \Rightarrow \varphi \equiv g$.

Для ряда $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ обозначим через $G^*(p)$ множество всех его максимальных главных квазиоднородных полиномиальных форм.

Пример 2. Пусть $p(x_1, x_2) = x_1^5 x_2 + 2x_1^4 x_2 - x_1^4 x_2^3 - 4x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^5 + 3x_1^3 x_2^5 - 6x_2^8.$ Тогда $G(p) = \{2x_1^4 x_2; 2x_1^4 x_2 - 4x_1^2 x_2^2; -4x_1^2 x_2^2; -6x_2^8; -4x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^5 - 6x_2^8\}$,

$G^*(p) = \{2x_1^4 x_2 - 4x_1^2 x_2^2; -4x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^5 - 6x_2^8\}$.

Например, $2x_1^4 x_2$ является главной (1,4)-квазиоднородной полиномиальной формой полинома $p(x_1, x_2)$, но не принадлежит $G^*(p)$.

Будем однородную полиномиальную форму $\varphi(x)$ называть *строго положительной*, если

$$\forall x \in \mathbf{R}^m \setminus \{0_{(m)}\} \quad \varphi(x) > 0.$$

Будем говорить, что ряд $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ находится в *(нижней) строгой форме*, если справедливо разложение

$$p(x) = \varphi_{l_1}(x_1, ..., x_{r_1}) + \psi_{l_1+1}(x) + \varphi_{l_2}(x_{r_1+1}, ..., x_{r_2}) +$$

(1.1)

$$+\psi_{l_2+1}(x_{r_1+1}, ..., x_m) + ... + \varphi_{l_s}(x_{r_{s-1}+1}, ..., x_{r_s}) + \psi_{l_s+1}(x_{r_{s-1}+1}, ..., x_m),$$

где $s \ge 1, 1 \le r_1 < r_2 < ... < r_s \le m$ (пусть, кроме того, $r_0 = 0$), $2 \le l_1 < l_2 < ... < l_s$; для каждого номера $i \in \{1,2,...,s\}$ φ_{l_i} - строго положительная однородная полиномиальная форма степени l_i, ψ_{l_i+1}- ряд из $\mathbf{R}\{x_{r_{i-1}+1}, ..., x_m\}$, ненулевые члены которого имеют степени не меньше $l_i + 1$ и в каждом ненулевом члене которого присутствует хотя бы одна из переменных $\{x_{r_{i-1}+1}, ..., x_{r_i}\}$ с ненулевым показателем степени.

Пример 3. Полином $p(x) = x_1^2 + (x_1^3 x_2^4 + 5x_1^2 x_3 - 2x_1 x_2 x_3^6 x_4 + x_1^2 x_5^9) + x_2^4 - x_2^2 x_3^2 + x_3^4 +$
$+ (x_2^2 x_3 x_4^2 x_5 + 3x_2 x_3^6 x_5) + 3x_4^8 + (4x_4^{16} - 7x_4^6 x_5^3)$ находится в строгой форме (здесь $m = 5$).

Рассмотрим бинарное отношение (Парето) $\le$ на $\mathbf{R}^m$: $a \le b \Leftrightarrow a_i \le b_i, i = 1,2,...,m.$ Для любого множества $V \subseteq \mathbf{R}^m$ обозначим $P(V) = \{x \in V \mid \forall \tilde{x} \in V \quad (\tilde{x} \le x \Rightarrow \tilde{x} = x)\}$ - совокупность минимальных по Парето точек множества V. Очевидно, что справедливо

Утверждение 1. Пусть $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$, $\neg(p \equiv 0)$, $\varphi(x) \in G(p)$. Тогда $N_\varphi \neq \varnothing$, $N_\varphi \subseteq P(N_p)$.

Покажем, что справедливо

Утверждение 2. Пусть $N \subseteq \mathbf{Z}^m_{\geq}$. Тогда $P(N)$ - конечное множество.

Доказательство проведем индукцией по m. При $m = 1$ утверждение 2 выполняется. Предположим, что оно верно для $m-1$, где $m \geq 2$. Покажем его справедливость для m. Предположим, что множество $P(N)$ бесконечно. Тогда из него можно выделить последовательность $\{x(n)\}$ такую, что по некоторой компоненте, например, по m-й, выполняется

$$x_m(1) < x_m(2) < ... < x_m(n) < ... \qquad (1.2)$$

Обозначим $V = \{v(n) \in \mathbf{Z}^{m-1} \mid v(n) = (x_1(n),..., x_{m-1}(n)), n \in \mathbf{N}\}$. В силу того, что $x(n) \in P(N)$, $n \in \mathbf{N}$, используя (1.2), получаем

$$\forall i \in \mathbf{N}, \qquad \forall j \geq i \qquad \neg(v(i) \leq v(j)). \qquad (1.3)$$

Введем в рассмотрение непустые конечные множества

$$V_1 = \{v \in V \mid v \leq v(1)\},\ V_{i+1} = \{v \in V \mid v \leq v(n_i + 1)\},$$

где $n_i = \max\{n : v(n) \in V_i\}$, $i = 1,2,...$. Используя (1.3), получаем, что множества V_i попарно не пересекаются, откуда, в силу того, что $P(V_i) = V_i \cap P(V), i = 1,2,...$, получаем бесконечность множества $P(V)$, а это противоречит индуктивному предположению (в силу $V \subseteq \mathbf{Z}^{m-1}_{\geq}$).

Из утверждений 1,2 следует, что для любого ряда $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ множества $G(p)$, $G^*(p)$ конечны и могут быть определены по конечному числу нижних однородных полиномиальных форм ряда $p(x)$.

2. Вспомогательные сведения. В этом разделе приводятся некоторые утверждения относительно параметрических аналитических задач оптимизации. Нам понадобятся дополнительные обозначения. Пусть $r \in \mathbf{N}$. Обозначим через $\mathbf{R}^r\{t\}$ кольцо формальных степенных рядов вида $\sum\limits_{n \in N} a_n t^{n/r}$, где $a_n \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Соответственно, через $\mathbf{R}^r\{t\}_a$ обозначим кольцо степенных рядов из $\mathbf{R}^r\{t\}$, абсолютно сходящихся при достаточно малых $t>0$. Обозначим, кроме того,

$$\mathbf{R}^\infty\{t\}_a = \bigcup_{r\in N} \mathbf{R}^r\{t\}_a$$

- кольцо степенных рядов.

Пусть D - открытое множество из $\mathbf{R}^{m+1}$, $p_0(t,x),\dots p_l(t,x)$ – функции, аналитические на D. Рассмотрим однопараметрическую задачу минимизации (с параметром $t\in\mathbf{R}$):

$$p_0(t,x)\to\min;\ (t,x)\in D,\ p_i(t,x)=0, i=1,2,\dots,l_1,\ p_j(t,x)\le 0,\ j=l_1+1,\dots,l,$$

(2.1)

где $l_1\le l$ (возможно, что $l_1=0$ и даже $l=0$). Обозначим через P задачу (2.1), а через $P(t)$ задачу (2.1) при фиксированном $t\in\mathbf{R}$. Пусть $\operatorname{Arg\,min} P(t)$ - множество точек глобального минимума в задаче $P(t)$.

Лемма 1 [2, стр. 88]. Пусть $t_0>0$, и выполняются условия:

а) $\forall t\in[0,t_0]$ задача $P(t)$ разрешима и $v_0(t)$ - значение глобального минимума в этой задаче;

б) функция $v_0(t)$ непрерывна на $[0,\ t_0]$;

в) $\bigcup_{t\in[0,t_0]}\{t\}\times\operatorname{Arg\,min} P(t)$ - ограниченное множество, замыкание которого содержится в D.

Тогда для некоторых $t_1\in(0,t_0], q(t)\in\mathbf{R}^\infty\{t\}_a$ выполняется:

1) $q(t)$ абсолютно сходится при $t\in[0,t_1]$;

2) $\forall t\in[0,t_1]\ v_0(t)=q(t)$.

Замечание 1. Условие б) в лемме 1 может быть заменено на условие: $v_0(t)$ является монотонно невозрастающей функцией на $[0,t_0]$ и такой, что $v_0(t)\to v_0(0)$ при $t\to 0+$.

Для доказательства леммы 1 с условием б) из замечания 1 дополнительно потребуются следующие два простых утверждения.

Утверждение 3. Пусть $q_i(t)\in\mathbf{R}^\infty\{t\}_a$, $i=1,2,\dots,s$, и $\forall i,j\in\{1,2,\dots,s\}$ выполняется $\neg(q_i(t)\equiv q_j(t))$ при $i\ne j$. Тогда $\exists t_0>0, i_1,\dots,i_s\in\{1,2,\dots,s\}$:

$$\{i_1,\dots,i_s\}=\{1,2,\dots,s\},\ \forall t\in(0,t_0)\ q_{i_1}(t)<q_{i_2}(t)<\dots<q_{i_s}(t).$$

Утверждение 4. Пусть $t_0 > 0$, ряды $q_i(t) \in \mathbf{R}^{\infty}\{t\}_a$, $i = 1,2,...,s$, абсолютно сходятся на $[0,t_0]$. Пусть функция $v_0(t)$ определена на $[0,t_0]$ и удовлетворяет условиям:

1) $v_0(t)$ монотонно не возрастает на $[0,t_0]$;

2) $\lim_{t \to 0+} v_0(t) = v_0(0)$;

3) $\forall t \in [0,t_0]$ $v_0(t) \in \{q_1(t),...,q_s(t)\}$.

Тогда $\exists t_1 \in (0,t_0], i \in \{1,2,...,s\}: \forall t \in [0,t_1]$ $v_0(t) = q_i(t)$.

Пусть теперь D - открытое множество из $\mathbf{R}^m$, $p_0(x),...p_l(x)$ – функции, аналитические на D. Рассмотрим однопараметрическую задачу минимизации (с параметром $t \in \mathbf{R}$):

$$p_0(x) \to \min;\ x \in D,\ p_i(x) \le 0, i = 1,2,...,l_1,\ p_j(x) \le t,\ j = l_1 + 1,...,l,$$

(2.2)

где $l_1 \le l$ (возможно, что $l_1 = 0$ и даже $l = 0$). Обозначим для каждого фиксированного $t \in \mathbf{R}$ задачу (2.2) через $P_0(t)$. Если при некотором $t \in \mathbf{R}$ задача $P_0(t)$ разрешима, то значение глобального минимума в этой задаче обозначим через $v_0(t)$. Следствием леммы 1 , а также замечания 1 является

Лемма 2 . Пусть $t_0 > 0$, и выполняются условия:

а) $\{x \in D \mid p_i(x) \le 0, i = 1,2,...,l_1, p_j(x) \le 0, j = l_1 + 1,...,,l\} \ne \varnothing$;

б) $\{x \in D \mid p_i(x) \le 0, i = 1,2,...,l_1, p_j(x) \le t_0, j = l_1 + 1,...,l\}$

- замкнутое ограниченное множество.

Тогда для некоторых $t_1 \in (0,t_0]$, $q(t) \in \mathbf{R}^{\infty}\{t\}_a$ выполняется

1) для любого $t \in [0,t_1]$ задача $P_0(t)$ разрешима;

2) ряд $q(t)$ абсолютно сходится при $t \in [0,t_1]$;

3) $\forall t \in [0,t_1]$ $v_0(t) = q(t)$.

Приведем пример задачи вида (2.2), удовлетворяющей условиям леммы 2.

Пример 4. Рассмотрим задачу минимизации

$$p_0(x) = \sin x_1^3 + x_2^{-2} e^{-x_3^3} \to \min;\ (x_1, x_2, x_3) \in D,\ x_2 \ge 1,$$

$$p_1(x) = [3x_1^3 + \mathrm{arctg}(1 - 2x_2 e^{-3x_1^2}) - 9x_3]^4 \le t, p_2(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^4 - 10 \le t,$$

где $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_2 > 0\}$, которую для каждого фиксированного $t \in \mathbf{R}$ обозначим через $P_0(t)$. В силу леммы 2 $\exists t_1 > 0$, $q(t) \in \mathbf{R}^{\infty}\{t\}_a$, что выполняются условия 1)-3) этой леммы.

Приведем одно из следствий леммы 2. В работе [6] был описан метод вычисления с заданной точностью значения глобального минимума в задаче $P_0(0)$. Предлагаемый в [6] метод обосновывается для случая, когда для функции $v_0(t)$ выполняются условия 1)-3) леммы 2. В [6] приводится утверждение, показывающее, что лемма 2, в частности, справедлива для случая, когда $p_i(x), i = 1,2,...,l,$ - полиномы (см. теорему 3 из [6]; доказательство этой теоремы приведено в [7]). Таким образом, лемма 2 существенно расширяет класс задач, к которым применим метод из [6].

Нам понадобится следующее обозначение. Пусть V - множество из $\mathbf{R}^m$, $f_i(x),\ i = 1,2,...,r,$ - функции, определенные на V. Введем множества

$$V_0 = V, V_i = \{x \in V_{i-1} \mid f_i(x) = \inf\{f_i(x') \mid x' \in V_{i-1}\}\}, i = 1,2,...,r.$$

lexArg $[V, f_1(x),..., f_r(x)] = V_r$ (возможно, что $V_r = \varnothing$).

Рассмотрим теперь задачу

$$p_0(x) \to \min; x \in D,\ p_i(x) = 0, i = 1,2,...,l,$$

(2.3)

где D - открытое множество из $\mathbf{R}^m$, $p_0(x),..., p_l(x)$ - функции, аналитические на D, $l \geq 0$,

$$0_{(m)} \in D,\ \ p_i(0_{(m)}) = 0, i = 1,2,...,l.$$

(2.4)

Обозначим

$$\mathrm{X} = \{\, x \in D \mid p_i(x) = 0, i = 1,2,...,l\}, X(t) = \{x \in X \mid |x|^2 = t\},$$

(2.5)

где $t \geq 0$. Тогда справедлива

Лемма 3 [2, стр. 92]. Пусть $\bar{t} > 0$ - число такое, что $B^{(m)}[\bar{t}^{1/2}] \subset D$,

$$\forall t \in [0, \bar{t}] \qquad X(t) \neq \varnothing.$$

(2.6)

Пусть, далее,

$$\forall t \in [0, \bar{t}] \quad v_0(t) = \min\{p_0(x) \mid x \in X(t)\}, \quad V(t) = \{x \in X(t) \mid p_0(x) = v_0(t)\},$$

$\{x^0(\mathrm{t})\} = \mathrm{lexArg}\,[V(t), x_1,..., x_m]$.

Тогда для некоторого числа $t_1 \in (0,\bar{t}\,]$ справедливо:

1) найдется ряд $g_0(t,v) \in \mathbf{R}\{t,v\}_a$ такой, что

а) $0 < \deg_v g_0(t,v) < \infty$;

б) ряд $g_0(t,v)$ является правильным по переменной v и при этом $g_0(0,0) = 0$;

в) ряд $g_0(t,v)$ абсолютно сходится при $|\,t\,| \le t_1$;

г) $\forall t_0 \in [0,t_1]$ величина $v_0(t_0)$ является корнем полиномиального уравнения $g_0(t_0,v) = 0$ (относительно переменной v) положительной степени;

2) для каждого $i \in \{1,2,..., m\}$ найдется ряд $g_i(t,x_i) \in \mathbf{R}\{t,x_i\}_a$ такой, что

а) $0 < \deg_{x_i} g_i(t,x_i) < \infty$;

б) ряд $g_i(t,x_i)$ является правильным по переменной x_i и при этом $g_i(0,0) = 0$;

в) ряд $g_i(t,x_i)$ абсолютно сходится при $|\,t\,| \le t_1$;

г) $\forall t_0 \in [0,t_1]$ величина $x_i^0(t_0)$ является корнем полиномиального уравнения $g_i(t_0,x_i) = 0$ (относительно переменной x_i) положительной степени.

Замечание 2. Пусть мы находимся в условиях леммы 3 и функция $v_0(t)$ непрерывна на $[0,\bar{t}\,]$ (это условие очевидным образом выполняется при $l = 0$). Тогда, используя лемму 1, получаем, что найдутся $t_1 \in (0,t_0]$, $q(t) \in \mathbf{R}^{\infty}\{t\}_a$ такие, что выполняются утверждения 1),2) леммы 1.

Кроме того, нам понадобится (см. раздел 4) следующее утверждение относительно задачи (2.3),(2.4).

Лемма 4 [2, стр. 95]. Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $B^{(m)}[\varepsilon] \subset D$ и множество значений целевой функции $p_0(x)$ в точках локального минимума задачи (2.3),(2.4), принадлежащих множеству $B^{(m)}[\varepsilon]$, является конечным.

Замечание 3. Все приведенные в настоящем параграфе утверждения доказаны в [2] с применением оператора исключения переменных в параметрических аналитических задачах оптимизации, описанного в этой же работе. Указанный оператор во многом подобен алгоритму исключения переменных в параметрических полиномиальных задачах оптимизации (см.[8,9]), однако, при его описании используются также некоторые специальные приемы.

3. *Безусловные задачи оптимизации.* Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $p(x)$ - функция, аналитическая в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$. Рассмотрим задачу проверки того, является ли $0_{(m)}$ точкой локального минимума функции $p(x)$. Будем предполагать, что

$$p(0_{(m)}) = 0,\ p'(0_{(m)}) = 0_{(m)},$$

(3.1)

и этому условию удовлетворяют функции из рассматриваемых ниже классов функций.

Обычно при проверке того, является ли $0_{(m)}$ точкой локального минимума функции $p(x)$, ограничиваются исследованием $p''(0_{(m)})$, где $p''(x) = \left[\dfrac{\partial^2 p(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ - матрица вторых производных функции $p(x)$. Тогда, если $p''(0_{(m)}) > 0$ (т.е., если матрица $p''(0_{(m)})$ является положительно определенной), то $0_{(m)}$ - точка локального минимума функции $p(x)$; если не выполняется условие $p''(0_{(m)}) \geq 0$ (неотрицательная определенность матрицы $p''(0_{(m)})$), то $0_{(m)}$ не является точкой локального минимума функции $p(x)$; а если $p''(0_{(m)}) \geq 0$, но не выполняется условие $p''(0_{(m)}) > 0$, то нужны более тонкие исследования (по сравнению с указанным исследованием матрицы $p''(0_{(m)})$). Таким образом, положительный ответ на вопрос о том, является ли $0_{(m)}$ точкой локального минимума функции $p(x)$, дается лишь в случае $p''(0_{(m)}) > 0$, т.е. в случае, когда функция $p(x)$ является сильно выпуклой в некоторой открытой выпуклой окрестности точки $0_{(m)}$ (см. [10, стр. 185]), а следовательно, уже случай несильной выпуклости $p(x)$ в любой сколь угодной малой открытой окрестности точки $0_{(m)}$ требует привлечения «более тонких исследований». Так, если бы мы имели простой способ проверки локальной выпуклости аналитической функции $p(x)$ в точке $0_{(m)}$ (т.е. выпуклости $p(x)$ в некоторой открытой выпуклой окрестности точки $0_{(m)}$), то такая проверка и представляла бы собой пример «более тонких исследований». Отметим, однако, что проверка локальной выпуклости аналитической функции $p(x)$ (и даже полинома $p(x)$) является задачей такого же порядка сложности, что и рассматриваемая задача исследования на локальный минимум. В связи со сказанным представляется, что существенное продвижение вперед в построении методов исследования на локальный минимум аналитической функции $p(x)$ в точке $0_{(m)}$ по сравнению с указанным выше методом, использующим матрицу $p''(0_{(m)})$, дает подход, заключающийся в выделении класса функций от переменных x, каждая из которых является аналитической в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$, и удовлетворяющего следующим условиям:

1) Этот класс является более широким, чем класс фукций от x, каждая из которых является аналитической и выпуклой в некоторой открытой выпуклой окрестности точки $0_{(m)}$.

2) для любой функции из этого класса точка $0_{(m)}$ является точкой локального минимума этой функции.

3) Проверка принадлежности произвольной аналитической в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$ функции от x этому классу осуществляется с помощью простого практически реализуемого алгоритма.

В настоящем параграфе определяется класс функций $M[x]$, удовлетворяющий перечисленным свойствам 1)-3). Используя этот класс, для проверки того, является ли $0_{(m)}$ точкой локального минимума функции $p(x)$, являющейся аналитической в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$ и удовлетворяющей условию (3.1), проверяем выполнение условия $p(x) \in M[x]$. Тогда, если $p(x) \in M[x]$, то $0_{(m)}$- точка локального минимума функции $p(x)$(см. условие 2)). В противном случае нужны более тонкие исследования. Кроме того, приводятся достаточно простые условия (они проверяются в ходе выполнения алгоритма, указанного в свойстве 3)), при выполнении которых $0_{(m)}$ не является точкой локального минимума функции $p(x)$. Эти условия являются гораздо более тонкими по сравнению с условиями невыполнения $p''(0_{(m)}) \geq 0$.

Замечание 4. Отметим, что для случая, когда $p(x)$- полином, удалось сомкнуть необходимое и достаточное условия (см.[3, стр. 211,212]), т.е. описать алгоритм, который за конечное число простых практически реализуемых шагов (типа сложения, умножения, дифференцирования полиномов и нахождения действительных корней полинома от одной переменной) дает ответ на вопрос, является ли $0_{(m)}$ точкой локального минимума полинома $p(x)$ или нет. Однако, этот алгоритм является весьма трудоемким и вследствие этого его описание является лишь фактом теоретического характера.

Нам понадобятся следующие утверждения, являющиеся обобщениями теорем 1,2 из [3].

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие экстремума). Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $p(x)$- функция, аналитическая в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$, $p(0_{(m)}) = 0,\ p'(0_{(m)}) = 0_{(m)}$. Тогда для того, чтобы точка $0_{(m)}$ была точкой локального минимума функции $p(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

Условие P. Для любых полиномов $q_i(t)$ (где $t \in \mathbf{R}$) таких, что $q_i(0) = 0, i = 1,2,...,m,$ найдется число $t_0 > 0$ такое, что $\forall t \in [0, t_0]$ $p(q_1(t),...,q_m(t)) \geq 0$.

Доказательство теоремы 1 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [3]. При этом , как и при доказательстве теоремы 1 из [3] следует предварительно доказать лемму, аналогичную лемме 6 из [3], для доказательства которой вместо леммы 3 из [3] используем лемму 1 из настоящей работы, а вместо леммы 5 из [3] используем лемму 3 настоящей работы (при $l = 0$).

Будем в дальнейшем для любой функции $p(x)$, где $x \in \mathbf{R}^m$, аналитической в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$, степенной ряд из $\mathbf{R}\{x\}_a$, являющийся разложением этой функции в окрестности точки $0_{(m)}$, также обозначать через $p(x)$.

Совершенно аналогично доказательству теоремы 2 из [3] (это доказательство опирается на теорему 1 из [3]) нетрудно показать, что справедлива

Теорема 2. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $p(x)$- функция, аналитическая в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$, $p(0_{(m)}) = 0$, $p'(0_{(m)}) = 0_{(m)}$**.** Пусть, далее, все главные квазиоднородные полиномиальные формы ряда $p(x)$ являются неотрицательными и невырожденными в слабом смысле. Тогда $0_{(m)}$- точка локального минимума функции $p(x)$.

Таким образом, теорема 1 дает нам необходимое и достаточное условие оптимальности, которое, однако, не является конструктивно проверяемым. Теорема 2 дает достаточное условие, не являющееся, вообще говоря, необходимым, но которое во многих примерах достаточно легко проверяется.

Приведем, кроме того, необходимое условие оптимальности.

Лемма 5. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $p(x)$- функция, аналитическая в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$. Тогда любая главная квазиоднородная полиномиальная форма ряда $p(x)$ является неотрицательной.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству замечания 3 к лемме 8 из [3].

Пример 5. 1) Пусть $p_1(x_1,x_2)=x_1^2x_2^6-1{,}98x_1^4x_2^5+x_1^6x_2^4+x_2^{10}-10x_1x_2^9-20x_1^8x_2^4$. Тогда главными квазиоднородными полиномиальными формами этого полинома являются:

а) $\varphi_1(x_1,x_2)=x_1^2x_2^6-1{,}98x_1^4x_2^5+x_1^6x_2^4=0{,}99x_1^2x_2^4(x_2-x_1^2)^2+0{,}01x_1^2x_2^4(x_2^2+x_1^4)$ - неотрицательная невырожденная в слабом смысле (если $x_1\neq 0, x_2\neq 0$, то $\varphi_1(x_1,x_2)>0$);

б) $\varphi_2(x_1,x_2)=x_2^{10}$ - неотрицательная невырожденная в сильном смысле;

в) $\varphi_3(x_1,x_2)=x_2^{10}+x_1^2x_2^6$ - неотрицательная невырожденная в слабом смысле;

г) $\varphi_4(x_1,x_2)=x_1^2x_2^6$ - неотрицательная невырожденная в слабом смысле;

д) $\varphi_4(x_1,x_2)=x_1^6x_2^4$ - неотрицательная невырожденная в слабом смысле.

Но тогда, в силу теоремы 2, $0_{(2)}$ - точка локального минимума полинома $p_1(x_1,x_2)$.

2) Пусть $p_2(x_1,x_2)=x_1^2x_2^6-2{,}01x_1^4x_2^5+x_1^6x_2^4+x_2^{10}-10x_1x_2^9-20x_1^8x_2^4$. Тогда главная квазиоднородная полиномиальная форма $\eta(x_1,x_2)=x_1^2x_2^6-2{,}01x_1^4x_2^5+x_1^6x_2^4$ полинома $p_2(x_1,x_2)$ не является неотрицательной ($\eta(1{,}1)=-0{,}01$), а следовательно, в силу леммы 5, $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума полинома $p_2(x_1,x_2)$.

3) Пусть $p_3(x_1,x_2)=x_1^2x_2^6-2x_1^4x_2^5+x_1^6x_2^4+x_2^{10}-10x_1x_2^9-20x_1^8x_2^4$. Тогда все главные квазиоднородные полиномиальные формы полинома $p_3(x_1,x_2)$, включая $\phi(x_1,x_2)=x_1^2x_2^6-2x_1^4x_2^5+x_1^6x_2^4$, являются неотрицательными, однако, $\phi(1{,}1)=0$, т.е. не можем воспользоваться утверждениями теоремы 2 или леммы 5. Вопрос о том, является ли $0_{(2)}$ точкой локального минимума полинома $p_3(x_1,x_2)$ остается открытым (ответ на него можно получить, например, используя метод из [3, стр. 211,212]).

Таким образом, получены достаточно тонкие необходимые и достаточные условия, позволяющие в ряде случаев ответить на вопрос, является ли $0_{(m)}$ точкой локального минимума функции $p(x)$, где $x\in\mathbf{R}^m$, являющейся аналитической в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$ и удовлетворяющей (3.1). Эти условия используют лишь конечное число первых членов ряда $p(x)$, что позволяет говорить о практической значимости этих условий. Действительно, для любой главной квазиоднородной полиномиальной формы $\varphi(x)$ ряда $p(x)$ выполняется $N_\varphi \subseteq P(N_p)$, а $P(N_p)$ является конечным множеством (см. утверждения 1,2).

Заметим, однако, что полученные условия страдают следующим существенным недостатком. Если эти условия применимы к некоторой функции $p(x)$, где $x \in \mathbf{R}^m$, т.е. дают ответ на вопрос, является ли $0_{(m)}$ точкой локального минимума этой функции, то они могут оказаться неприменимыми к функции $\widetilde{p}(x) = p(Ux)$, где U - некоторая квадратная матрица (например, эти условия оказываются неприменимыми к полиномам $p_1(Ux), p_2(Ux)$, где $p_1(x), p_2(x)$ - полиномы из примера 5, $U = [u_{ij}]$- квадратная матрица порядка 2 такая, что $u_{ij} = 1, i = 1,2, j = 1,2$).

Тем не менее, как показывается в дальнейшем, указанный недостаток оказывается устранимым в случае, если в достаточном условии вместо слабой невырожденности проверяется сильная невырожденность главных квазиоднородных полиномиальных форм исследуемого ряда (т.е. огрубляем достаточное условие по сравнению с утверждением теоремы 2). Таким образом, вопрос о полном устранении указанного недостатка остается пока открытым.

Нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$. Обозначим через $H\{x\}$ (соответственно, через $H\{x\}_a$) класс степенных рядов $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ (соответственно, $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}_a$), удовлетворяющих условиям:

а) $p(x)$ находится в нижней строгой форме;

б) любая главная квазиоднородная полиномиальная форма ряда $p(x)$ является неотрицательной и невырожденной в сильном смысле.

Кроме того, будем через $H[x]$ обозначать класс всех функций от x таких, что каждая функция $p(x)$ из этого класса является аналитической в некоторой окрестности точки $0_{(m)}$ и для степенного ряда $p(x)$ выполняется $p(x) \in H\{x\}_a$.

Обозначим теперь через $M\{x\}_a$ класс всех степенных рядов из $\mathbf{R}\{x\}_a$ таких, что для каждого ряда $p(x)$ из этого класса найдутся ряд $p_0(x) \in H\{x\}_a$ и квадратная матрица U порядка m (матрица U может быть вырожденной) такие, что $p(x) = p_0(Ux)$. Аналогично определяется класс $M\{x\}$.

Кроме того, будем через $M[x]$ обозначать класс всех функций от x таких, что каждая функция $p(x)$ из этого класса является аналитической в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$ и для степенного ряда $p(x)$ выполняется $p(x) \in M\{x\}_a$. Ниже будет показано, что класс функций $M[x]$ удовлетворяет перечисленным ранее условиям 1)-3).

Используя теорему 2, получаем, что справедливо

Утверждение 5. Если $p(x) \in H[x]$, то $0_{(m)}$ является точкой локального минимума функции $p(x)$.

Нам понадобится следующее простое

Утверждение 6. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $f(x)$- функция, определенная в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$, являющейся точкой локального минимума функции $f(x)$. Тогда для любой квадратной матрицы U порядка m точка $0_{(m)}$ является точкой локального минимума функции $f(Ux)$.

Из утверждений 5,6 получаем, что справедлива

Теорема 3. Если $p(x) \in M[x]$, то $0_{(m)}$ **-** точка локального минимума функции $p(x)$.

Отметим, далее, что, как показано в работе [11, стр. 26], если $x \in \mathbf{R}^m$, $p(x)$- функция, являющаяся аналитической и выпуклой в некоторой открытой выпуклой окрестности точки $0_{(m)}$, то найдется ортогональная матрица W порядка m, такая, что $p(Wx) \in H[x]$, а следовательно, $p(x) = p_0(Ux)$, где $p_0(x) = p(Wx) \in H[x]$, $U = W^T$, т.е. $p(x) \in M[x]$.

Таким образом, свойства 1),2) для класса $M[x]$ доказаны. Осталось доказать свойство 3).

Нам понадобятся обозначения, связанные с однородными полиномиальными формами. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$. Будем через $\Phi[x]$ обозначать класс однородных полиномиальных форм $\varphi(x)$, для каждой из которых найдутся строго положительная однородная полиномиальная форма $\widetilde{\varphi}(x_1,...,x_r)$ (где $1 \le r \le m$), а также ненулевая прямоугольная матрица W размерности $r \times m$ такие, что $\varphi(x) \equiv \widetilde{\varphi}(Wx)$. Очевидно, что $\forall \varphi(x) \in \Phi[x]\ \neg(\varphi(x) \equiv 0)$.

В работе [4, стр. 849] приводится **алгоритм 1**, позволяющий для произвольной полиномиальной формы $\varphi(x) \in \Phi[x]$ (в [4] вместо $\Phi[x]$ используется обозначение $S[x]$) построить ортогональную матрицу U порядка m такую, что для некоторого $r \in \mathbf{N}$, где

$1 \le r \le m$, $\varphi(Ux)$ существенно зависит лишь от переменных $x_1,...,x_r$ и при этом однородная полиномиальная форма $\widetilde{\varphi}(x_1,...,x_r) \equiv \varphi(Ux)$ является строго положительной.

Кроме того, нам понадобится алгоритм, позволяющий для произвольного ряда $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$, находящегося в строгой форме, т.е. удовлетворяющего (1.1), проверить выполнение условия $p(x) \in H\{x\}$. Этот алгоритм основывается на следующих утверждениях.

Лемма 6. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$, $A \in \mathbf{N}^m$, $\varphi(x)$ - главная A-квазиоднородная полиномиальная форма ряда $p(x)$. Пусть, далее, $1 \le r \le m$, $\varphi(x)$ существенно зависит лишь от переменных $x_1,...,x_r$ и при этом $\forall i \in \{1,2,...,r\}$ $\varphi(x)$ содержит член вида $a_i x_i^{k_i}$, где $a_i \ne 0$, $k_i \in \mathbf{N}$. Тогда для выполнения $\{\varphi\} = G^*(p)$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall k \in P(N_p) \setminus N_\varphi$ $A_1 k_1 + ... + A_r k_r \ge B_{\varphi,A}$.

Лемма 6 является очевидным следствием леммы 4.1 из [2]. Соответствующие утверждения в [2] сформулированы относительно полиномов, но они очевидным образом переносятся и на степенные ряды из $\mathbf{R}\{x\}$.

Лемма 7 [2, стр. 12-13]. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $p(x) \in H\{x\}$, для степенного ряда $p(x)$ справедливо разложение (1.1) (см. определение класса $H\{x\}$),

$$A \in \mathbf{N}^m, \qquad l = \text{НОК}(l_1,...,l_s), A_i = l / l_{j(i)}, \text{где} \qquad j(i) \in \{1,...,s\}, \tag{3.2}$$

$$r_{j(i)-1} + 1 \le i \le r_{j(i)}, i = 1,2,...,r_s.$$

Пусть, далее, $p^*(x)$ - полином, являющийся главной A-квазиоднородной полиномиальной формой ряда $p(x)$. Тогда

1) $\{p^*(x)\} = G^*(p)$;

2) $p^*(x)$ существенно зависит от переменных $x_1,...,x_{r_s}$ и только от этих переменных;

3) $\forall i \in \{1,...,s\}$ выполняется $\varphi_{l_i} \rho p^*$.

Лемма 8 [2, стр. 16]. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ - ряд, находящийся в строгой форме, т.е. удовлетворяющий (1.1). Пусть, далее, $G^*(p) = \{p^*(x)\}$, $p^*(x)$ существенно зависит от переменных $x_1,...,x_{r_s}$ и только от этих переменных, $J = \{1,2,...,r_s\}$. Тогда

$\forall g(x) \in G(p)$, если $\{x_i, i \in I\}$ - набор переменных, от которых существенно зависит $g(x)$, то $I \subseteq J,\ g(x) = p^*(x)\Big|_{x_j=0,\, j\in J\setminus I}$.

Перейдем теперь непосредственно к описанию алгоритма.

Алгоритм 2

Шаг 1. Положим $l = \text{НОК}(l_1,...,l_s), A_i = l / l_{j(i)}$, где $j(i) \in \{1,...,s\}$, $r_{j(i)-1} + 1 \le i \le r_{j(i)}$, $i = 1,2,...,r_s$; $A_i = 1$, $i = r_s + 1,...,m$. Выделим в $p(x)$ главную A-квазиоднородную полиномиальную форму $p^*(x)$. Проверим выполнение условий 2),3) из леммы 7. Если $p^*(x)$ не удовлетворяет любому из этих условий, то $p(x) \notin H\{x\}$ (проверка выполнения условий 2),3) из леммы 7 осуществляется очевидным образом) и на этом работа алгоритма заканчивается. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Проверяем выполнение условия (см. утверждение 2 о конечности $P(N_p)$)

$$\forall k \in P(N_p) \setminus N_{p^*} \qquad A_1 k_1 + ... + A_r k_r \ge B_{p^*, A}. \tag{3.3}$$

Если условие (3.3) не выполняется, то, используя леммы 6,7, заключаем, что $p(x) \notin H\{x\}$. В противном случае (т.е. в случае выполнения условия (3.3)) в силу леммы 6 справедливо $G^*(p) = \{p^*(x)\}$, а следовательно, мы находимся в условиях леммы 8, и тогда переходим к шагу 3.

Шаг 3. Проверяем, является ли $p^*(x)$ невырожденной в сильном смысле квазиоднородной полиномиальной формой (см. замечание 5). Если это не так, то $p(x) \notin H\{x\}$, и на этом работа алгоритма заканчивается. В противном случае, используя лемму 8 (см. условие перехода к шагу 3), получаем, что $\forall g(x) \in G(p)$ $g(x)$ является невырожденной в сильном смысле квазиоднородной полиномиальной формой, а следовательно, $p(x) \in H\{x\}$ (см. определение $H\{x\}$).

Замечание 5. Для того, чтобы определить, является ли некоторая квазиоднородная полиномиальная форма $\varphi(x)$, где $\deg\varphi > 0$, неотрицательной и невырожденной в сильном смысле, достаточно совершить действия согласно следующему алгоритму.

Алгоритм 3

Шаг 1. Выделяем совокупность переменных $x_i, i \in I,$ от которых существенно зависит $\varphi(x)$. Пусть для простоты обозначений этими переменными являются $x_1,...,x_r$, где $1 \le r \le m$. Обозначим $\bar{x} = (x_1,...,x_r)$. Тогда вместо $\varphi(x)$ можно писать $\varphi(\bar{x})$.

Шаг 2. Если для некоторого номера $i \in \{1,2,...,r\}$ в $\varphi(\bar{x})$ отсутствует член вида $a_i x_i^{k_i}$, где $a_i > 0, k_i \in \mathrm{N}$, k_i четно, то $\varphi(\bar{x})$ не является неотрицательной и невырожденной в сильном смысле квазиоднородной полиномиальной формой и на этом работа алгоритма заканчивается. В противном случае переходим к шагу 3.

Шаг 3. Решаем задачу математического программирования (см.также замечание 6)

$$\varphi(\bar{x}) \to \min(=\varphi^*)\,; \bar{x} \in S^{(r)} = \{\bar{x} \in \mathbf{R}^r \mid |\bar{x}| = 1\}\,.$$

(3.4)

Тогда, если $\varphi^* > 0$, то $\varphi(\bar{x})$- неотрицательная и невырожденная в сильном смысле квазиоднородная полиномиальная форма; в противном случае она не является таковой (см. лемму 9 из [3]).

Замечание 6. В задаче (3.4) вместо $S^{(r)}$ можно использовать множество $S_\psi = \{\bar{x} \in \mathbf{R}^r \mid \psi(\bar{x}) = 1\}$, где $\psi(\bar{x})$- произвольная функция, определенная и непрерывная на $\mathbf{R}^r$, и такая, что

$$\psi(\ 0_{(m)}\ ) = 0,\ \ \varliminf_{|\bar{x}| \to \infty} \psi(\bar{x}) > 1.$$

Очевидно, что при этом множество S_ψ является ограниченным и замкнутым и $0_{(m)} \notin S_\psi$. С вычислительной точки зрения представляется наиболее эффективным выбрать в качестве ψ функцию $\psi(\bar{x}) = \max\{|x_i| \mid i = 1,2,...,r\}$. В этом случае задача вида (3.4) (при замене $S^{(r)}$ на S_ψ) распадается на $2r$ задач минимизации полиномов на $(r-1)$-мерных кубах, для решения которых существуют достаточно эффективные методы (см., например, [10]).

Замечание 7. Приведенный в замечании 5 алгоритм, в частности, применим для определения для произвольной однородной полиномиальной формы $\varphi(x)$, является ли она строго положительной.

Замечание 8. Более тонкие методы исследования полинома на строгую положительность полинома предлагаются в [13,14].

Пример 6. 1) Пусть $x \in \mathbf{R}^3$, $p(x) = x_1^2 + (x_1x_2^2 - 3x_1x_2^3) + x_2^4 + (x_2^4x_3 - 2x_2^4x_3^3)$- полином, находящийся в строгой форме. Тогда для полинома $p^*(x)$, выделяемого на шаге 1 алгоритма 2, выполняется $p^*(x) = x_1^2 + x_1x_2^2 + x_2^4$ и при этом справедливы условия 2),3) из утверждения леммы 7, а также условие (3.3), а следовательно, $G^*(p) = \{p^*(x)\}$. Заметим теперь, что $p^*(x)$ – невырожденная в сильном смысле квазиоднородная полиномиальная форма, а следовательно, $p(x) \in H\{x\}$.

2) Пусть $x \in \mathbf{R}^3$, $p(x) = x_1^4 + x_1^3x_2^5$- полином, находящийся в строгой форме. Тогда для полинома $p^*(x)$, выделяемого на шаге 1 алгоритма 2, выполняется $p^*(x) = x_1^4$ и при этом справедливы условия 2),3) из утверждения леммы 7, но не выполняется условие (3.3), а следовательно, $p(x) \notin H\{x\}$ (см. шаг 2 алгоритма 2).

3) Пусть $x \in \mathbf{R}^3$, $p(x) = x_1^2 + x_1x_3^3 + x_2^4$- полином, находящийся в строгой форме. Тогда для полинома $p^*(x)$, выделяемого на шаге 1 алгоритма 2, справедливо $p^*(x) = p(x)$ и при этом не выполняется условие 2) из утверждения леммы 7, а следовательно, $p(x) \notin H\{x\}$.

4) Пусть $x \in \mathbf{R}^2$, $p(x) = x_1^2 + x_1x_2^2 + x_2^6$- полином, находящийся в строгой форме. Тогда для полинома $p^*(x)$, выделяемого на шаге 1 алгоритма 2, справедливо $p^*(x) = x_1x_2^2$ и при этом не выполняется условие 3) из утверждения леммы 7, а следовательно, $p(x) \notin H\{x\}$.

5) Пусть $x \in \mathbf{R}^2$, $p(x) = x_1^2 + (2x_1x_2^2 - x_1x_2^3) + x_2^4$- полином, находящийся в строгой форме. Тогда для полинома $p^*(x)$, выделяемого на шаге 1 алгоритма 2, справедливо $p^*(x) = x_1^2 + 2x_1x_2^2 + x_2^4$, и при этом справедливы условия 2),3) из утверждения леммы 7, а также условие (3.3), а следовательно, $G^*(p) = \{p^*(x)\}$. Заметим теперь, что $p^*(x)$ не является невырожденной в сильном смысле квазиоднородной полиномиальной формой (например, $p^*(-1,1) = 0$), а следовательно, $p(x) \notin H\{x\}$.

Опишем теперь алгоритм, позволяющий для произвольного ряда $p_0(x) \in M\{x\}$ (где $x \in \mathbf{R}^m$) определить ортогональную матрицу U такую, что $p_0(Ux) \in H\{x\}$.

Алгоритм 4

Шаг 1. Выделяем в $p_0(x)$ нижнюю однородную полиномиальную форму $\tilde{\varphi}_1(x)$, где $\neg(\tilde{\varphi}_1(x) \equiv 0)$ (т.е. ненулевую однородную полиномиальную форму минимальной степени).

Шаг 2. Используя алгоритм 1, находим квадратную ортогональную матрицу $\widetilde{U}_1$ порядка m такую, что для некоторого числа $r_1 > 1$ полином $\varphi_1(x_1,...,x_{r_1}) \equiv \widetilde{\varphi}_1(\widetilde{U}_1 x)$ является строго положительной однородной полиномиальной формой (см. замечания 9,10).

Шаг 3. Полагаем $p_1(x_{r_1+1},...,x_m) = \widetilde{p}_0(0,...,0,x_{r_1+1},...,x_m)$, где $\widetilde{p}_0(x) = p_0(\widetilde{U}_1 x)$.

Шаг 4. Выделяем в $p_1(x_{r_1+1},...,x_m)$ нижнюю однородную полиномиальную форму $\widetilde{\varphi}_2(x_{r_1+1},...,x_m)$, где $\neg(\widetilde{\varphi}_2(x_{r_1+1},...,x_m) \equiv 0)$ (если она существует).

Шаг 5. Используя алгоритм 1, находим ортогональную матрицу $\widetilde{U}_2$ порядка $m - r_1$ такую, что для некоторого числа $r_2 > r_1$ полином $\varphi_2(x_{r_1+1},...,x_{r_2}) \equiv \widetilde{\varphi}_2(\widetilde{U}_2(x_{r_2+1},...,x_m)^T)$ является строго положительной однородной полиномиальной формой.

Шаг 6. Полагаем $p_2(x_{r_2+1},...,x_m) = \widetilde{p}_1(0,...,0,x_{r_2+1},...,x_m)$, где $\widetilde{p}_1(x_{r_1+1},...,x_m) \equiv p_1(\widetilde{U}_2(x_{r_1+1},...,x_m)^T)$.

Шаг 7. Далее, аналогично шагам 4 и 5, находим по ряду $p_2(x_{r_2+1},...,x_m)$ ортогональную матрицу $\widetilde{U}_3$ порядка $m - r_2$ и т.д.

Действуя таким образом, находим последовательность матриц $\widetilde{U}_1,\ldots,\widetilde{U}_s$, где s - минимальное число такое, что $p_s(x_{r_s+1},...,x_m) \equiv 0.$ Затем полагаем

$$U_1 = \widetilde{U}_1, U_i = \left[\begin{array}{c|c} E_{(r_{i-1})} & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{U}_i \end{array}\right], i = 2,3,...,s$$

(где $\forall k \geq 1$ $E_{(k)}$- единичная матрица порядка k), и наконец, окончательно находим $U = U_1 \cdots U_s$.

Замечание 9. Очевидно, что алгоритм 4 применим к некоторому ряду $p_0(x) \in \mathbf{R}\{x\}$ (при этом не обязательно $p_0(x) \in M\{x\}$), тогда и только тогда, когда для всякой очередной полиномиальной формы $\widetilde{\varphi}_i(x_{r_{i-1}+1},...,x_m)$ (где $i \geq 1, r_0 = 0$) выполняется $\widetilde{\varphi}_i(x_{r_{i-1}+1},...,x_m) \in \Phi[x_{r_{i-1}+1},...,x_m]$ и в этом случае для ортогональной матрицы U, построенной по алгоритму 4, ряд $p_0(Ux)$ находится в строгой форме.

В работе [2, стр. 40-47] показано, что справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $x \in \mathbf{R}^m$, $p_0(x) \in \mathbf{R}\{x\}$, $\neg(p_0(x) \equiv 0)$. Тогда для того, чтобы $p_0(x) \in M\{x\}_a$, необходимо и достаточно, чтобы алгоритм 4 был применим к $p_0(x)$, и для ортогональной матрицы U порядка m, являющейся результатом применения к $p_0(x)$ алгоритма 4, выполнялось $p_0(Ux) \in H\{x\}_a$.

Из теоремы 4 следует, что для того, чтобы для некоторого ряда $p_0(x) \in R\{x\}_a$, где $x \in \mathbf{R}^m$, проверить выполнение условия $p_0(x) \in M\{x\}_a$ достаточно совершить действия согласно следующему алгоритму.

Алгоритм 5

Шаг 1. Применяем к $p_0(x)$ алгоритм 4. Тогда, если окажется, что алгоритм 4 неприменим к ряду $p_0(x)$ (см. замечание 9), то $p_0(x) \notin M\{x\}$ (см. теорему 4).

Шаг 2. Пусть теперь алгоритм 4 применим к ряду $p_0(x)$ и результатом применения этого алгоритма к ряду $p_0(x)$ является ортогональная матрица U. Тогда (см. замечание 9) ряд $p(x) = p_0(Ux)$ находится в строгой форме.

Шаг 3. Применяем к $p(x)$ алгоритм 2, осуществляющий проверку выполнения условия $p(x) \in H\{x\}$. Если это условие выполняется, то, используя то, что $p_0(x) \in R\{x\}_a$, имеем $p(x) \in H\{x\}_a$, а следовательно, в силу теоремы 4, $p_0(x) \in M\{x\}_a$. В противном случае, в силу той же теоремы, получаем, что $p_0(x) \notin M\{x\}_a$.

Заметим, что все приведенные алгоритмы 2-5 используют лишь конечное число первых членов рядов, что позволяет говорить об их практической значимости.

Теперь для проверки выполнения условия $p(x) \in M[x]$, где $x \in \mathbf{R}^m$, $p(x)$ - функция, являющаяся аналитической в некоторой открытой окрестности точки $0_{(m)}$, достаточно к ряду $p(x)$ применить алгоритм 5. При этом потребуется лишь конечное число первых членов этого ряда.

Замечание 10. Если на шаге 1 алгоритма 5 в процессе работы алгоритма 4 для некоторого $i \ge 0$ оказалось, что $\widetilde{\varphi}_1(x_1,...,x_m) \in \Phi[x_1,...,x_m], \ldots, \widetilde{\varphi}_i(x_{r_{i-1}+1},...,x_m) \in \Phi[x_{r_{i-1}+1},...,x_m]$, а $\widetilde{\varphi}_{i+1}(x_{r_{i-1}+1},...,x_m)$ не является неотрицательной однородной полиномиальной формой, то в этом случае $0_{(m)}$ не является точкой локального минимума функции $p_0(x)$. Действительно, если $0_{(m)}$ - точка локального минимума функции $p_0(x)$, то последовательно получаем, что

$0_{(m)}$ - точка локального минимума функций, соответствующих рядам (см. описание алгоритма 4): $\widetilde{p}_0, p_1, \widetilde{p}_1, p_2, ..., \widetilde{p}_{i-1}, p_i$. Заметим, далее, что $\widetilde{\varphi}_{i+1}$ - главная квазиоднородная полиномиальная форма ряда p_i, а следовательно, является неотрицательной (см. лемму 5), т.е. пришли к противоречию со сделанным предположением. Таким образом, мы получили также достаточно тонкое необходимое условие оптимальности.

Замечание 11. Отметим, что используемые нами главные квазиоднородные полиномиальные формы ряда $p(x) \in \mathbf{R}\{x\}$, где $x \in \mathbf{R}^m$, естественно назвать главными нижними квазиоднородными полиномиальными формами этого ряда. Для полинома $p(x)$ можно, кроме того, определить главные верхние квазиоднородные полиномиальные формы этого полинома (см. [12, стр. 96]). Отличие этого определения от определения главных нижних квазиоднородных полиномиальных форм полинома заключается в замене $\min$ на $\max$. Продолжая аналогию, можно определить максимальные главные верхние квазиоднородные полиномиальные формы полинома и верхнюю строгую форму полинома (см. [12]). Обозначим через $\breve{G}(p), \breve{G}^*(p)$, соответственно, совокупности главных верхних квазиоднородных полиномиальных форм и максимальных главных верхних квазиоднородных полиномиальных форм полинома $p(x)$. Обозначим, далее, класс полиномов, определяемый аналогично классу рядов $H\{x\}$, но при замене в этом определении строгой формы на верхнюю строгую форму и главной квазиоднородной полиномиальной формы на главную верхнюю квазиоднородную полиномиальную форму, через $\breve{H}\{x\}$, а класс полиномов, определяемый аналогично $M\{x\}$, (но теперь уже используем $\breve{H}\{x\}$ вместо $H\{x\}$), через $\breve{M}\{x\}$. Тогда все свойства рядов из $H\{x\}$, $M\{x\}$, приведенные в настоящем параграфе, можно переформулировать для полиномов из $\breve{H}\{x\}$, $\breve{M}\{x\}$ (при соответствующем изменении в терминах). Но тогда при соответствующих изменениях и алгоритм проверки выполнения условия $p(x) \in M[x]$ переходит в алгоритм проверки выполнения условия $p(x) \in \breve{M}\{x\}$ (где $p(x)$ - полином). Указанный алгоритм может быть использован при исследовании на разрешимость безусловной задачи минимизации.

$$p(x) \to \min, \tag{3.5}$$

где $p(x)$ - полином. Действительно, нетрудно показать, что, если $p(x) \in \breve{M}\{x\}$, то задача (3.5) разрешима. Но тогда алгоритм проверки выполнения условия $p(x) \in \breve{M}\{x\}$

представляет собой алгоритм проверки достаточного условия разрешимости задачи (3.5). Аналогичным образом переносится и процедура проверки необходимого условия для разрешимости задачи (3.5) (см. замечание 10).

4. *Задачи оптимизации с ограничениями типа равенств.*

Пусть D - открытое множество из $\mathbf{R}^m$, $p_0(x),...,p_l(x)$ - функции, аналитические на D. Рассмотрим задачу минимизации (2.3),(2.4). При этом будем использовать обозначения (2.5). В этом параграфе приводятся некоторые необходимые и достаточные условия того, что $0_{(m)}$ является точкой локального минимума задачи (2.3),(2.4).

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 9. Пусть мы находимся в условиях леммы 3. Тогда $\exists t' \in (0,\bar{t}]$, что функции $v_0(t), x_1^0(t),..., x_m^0(t)$ представимы на $[0,t']$ в виде абсолютно сходящихся на этом отрезке рядов из $\mathbf{R}^{\infty}\{t\}_a$.

Доказательство леммы 9 является дословным повторением доказательства леммы 1.4 из [1].

Используя леммы 4,9, мы можем совершенно аналогично доказательству леммы 1.2 из [1] показать, что справедлива

Лемма 10. Для того, чтобы точка $0_{(m)}$ не являлась изолированной точкой множества X (см. (2.5)) необходимо и достаточно, чтобы $\exists \bar{t} > 0$, что справедливо (2.6).

Таким образом, лемма 10 дает нам простое необходимое и достаточное условие для выполнения (2.6) при некотором $\bar{t} > 0$.

Будем для ряда $p(t) \in \mathbf{R}\{t\}$ и числа $k \in \mathbf{N}$ писать $p(t) = o(t^k)$, если $\forall\, \nu \in N_p$ $\nu > k$.

Теперь мы можем показать, что справедлива

Лемма 11(необходимое и достаточное условие экстремума). Для того, чтобы точка $0_{(m)}$ была точкой локального минимума в задаче (2.3),(2.4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

Условие Q. Для любых $q_i(t) \in \mathbf{R}\{t\}_a$ $(i = 1,2,...,m)$, таких, что для некоторого $t_0 > 0$ ряды $q_i(t), i = 1,2,...,m,$ абсолютно сходятся при $t \in [0,t_0]$ и выполняется: $q_i(0) = 0, i = 1,2,...,m,$ $p_j(q_1(t),...,q_m(t)) \equiv 0, j = 1,2,...,l,$ справедливо: либо $p_0(q_1(t),...,q_m(t)) \equiv 0,$ либо $p_0(q_1(t),...,q_m(t)) \equiv at^k + o(t^k),$ где $a > 0, k \in \mathbf{N}$.

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству леммы 1.5 из [1] и вместо лемм 1.2,1.4 из [1] использует леммы 9,10, соответственно.

Сформулированное в лемме 11 необходимое и достаточное условие локального минимума точки $0_{(m)}$ в задаче (2.3),(2.4) не является конструктивно проверяемым. Тем не менее, оно является основой для получения приводимых ниже условий, проверка которых сводится к исследованию главных квазиоднородных полиномиальных форм рядов $p_j(x),\ j = 0,1,...,l.$ Во многих случаях эти исследования могут быть проведены практически.

Нам потребуются следующие обозначения. Пусть $A \in \mathbf{N}^m,\ j \in \{0,1,...,l\}.$ Обозначим через $\varphi_{A,j}(x)$ главную A-квазиоднородную полиномиальную форму полинома $p_j(x).$ Обозначим, кроме того, задачу (2.3),(2.4) через M. Пусть $I \subseteq I_m = \{1,2,...,m\}, I \neq \varnothing.$ Рассмотрим наряду с задачей M задачу M_I относительно переменных $x_{i_1},...,x_{i_r},$ где $1 \le i_1 \le ... \le i_r \le m,\ \{i_1,...,i_r\} = I,$ получаемую из M подстановкой $x_i = 0, i \in I_m \setminus I.$ При этом, очевидно, $M_{I_m} = M$. Обозначим, далее,

$$H_A = \{h \in \mathbf{R}^m \Big| \, |h| = 1, h_i \neq 0, i = 1,2,...,m, \varphi_{A,j}(h) = 0, j = 1,2,...,l\}.$$

Введем условие U_M относительно задачи M:

$$\forall A \in \mathbf{N}^m, \forall h \in H_A \qquad \varphi_{A,0}(h) > 0.$$

(4.1) Аналогичные условия относительно задач M_I, где $I \subseteq I_m, I \neq \varnothing,$ будем обозначать через U_{M_I}.

Лемма 12 (достаточное условие экстремума). Если для любого непустого множества $I \subseteq I_m$ выполняется: либо $0_{(|I|)}$ - точка локального минимума задачи M_I, либо справедливо условие U_{M_I}, то $0_{(m)}$ - точка локального минимума задачи (2.3),(2.4).

Доказательство леммы 12 является дословным повторением доказательства леммы 2.1 из [1]; при этом вместо леммы 1.5 из [1] используем лемму 11.

Теперь сформулируем необходимое условие локального минимума для точки $0_{(m)}$ в задаче (2.3),(2.4). Пусть $A \in \mathbf{N}^m$. Обозначим

$$H'_A = \{h \in \mathbf{R}^m \,|\, \varphi_{A,j}(h) = 0, j = 1,2,...,l\}.$$

Лемма 13 (необходимое условие экстремума). Если $0_{(m)}$ - точка локального минимума задачи (2.3),(2.4), то для любых $A \in \mathbf{N}^m$, $h \in H'_A$, если ранг матрицы

$J_A(x)=[\partial\varphi_{A,i}(x)/\partial x_j]$, где $i=1,2,...,l, j=1,2,...,m,$ при $x=h$ равен l (т.е. числу равенств в задаче (2.3),(2.4)), то $\varphi_{A,0}(h)\geq 0.$

Доказательство леммы 13 проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 2.2 из [1].

Замечание 12. Очевидно, что при проверке условий лемм 12,13 достаточно ограничиться рассмотрением $A\in\mathbf{N}^m$, удовлетворяющих дополнительному условию НОД($A_1,...,A_m$)=1, так как $\forall A\in\mathbf{N}^m, \forall k\in\mathbf{N}$ главная A-квазиоднородная полиномиальная форма произвольного полинома $g(x)$ (где $x\in\mathbf{R}^m$) совпадает с главной kA- квазиоднородной полиномиальной формой этого полинома.

Замечание 13. В формуле для H_A вместо $|h|$ можно использовать любую непрерывную неотрицательную на $\mathbf{R}^m$ функцию $\varphi(h)$, удовлетворяющую условиям:

$$\psi(0_{(m)})=0, \quad \varliminf_{\Delta(h)\to\infty}\psi(h)>1, \text{где } \Delta(h)=\min_{1\leq i\leq m}|h_i|.$$

Примеры таких функций: $|h_1|,\dots,|h_m|$, $\Delta(h)$, $h_1^2+h_2^4+...+h_m^{2m}$ и т.д. При этом при каждом фиксированном $A\in\mathbf{N}^m$ можно вместо $|h|$ использовать свою функцию $\varphi_A(h)$.

Замечание 14. При проверке выполнения необходимого условия оптимальности (согласно лемме 13) достаточно для каждого $A\in\mathbf{N}^m$ ограничиться проверкой элементов $h\in H'_A$, удовлетворяющих дополнительному условию нормировки $\chi_A(h)=1,$ где $\chi_A(h)$- произвольная непрерывная и неотрицательная на $\mathbf{R}^m$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$\chi_A(0_{(m)})=0, \forall x\in\mathbf{R}^m\setminus\{0_{(m)}\}\ \chi_A(x)>0, \varliminf_{|h|\to\infty}\chi_A(h)>1$$

(примерами таких функций могут служить любая норма, или неотрицательная невырожденная в сильном смысле квазиоднородная полиномиальная форма, существенно зависящая от переменных $x_1,...,x_m$). Действительно, если необходимое условие, сформулированное в лемме 13 выполняется при всех $h\in H'_A$, удовлетворяющих условию $\chi_A(h)=1,$ то оно будет выполняться и для любых $h\in H'_A$, и, соответственно, если оно не выполняется при некотором $h\in H'_A$, то оно не будет выполняться и при некотором $\widetilde{h}\in H'_A$, удовлетворяющем дополнительному условию $\chi_A(\widetilde{h})=1$. Для доказательства этих фактов следует воспользоваться некоторыми свойствами квазиоднородных полиномиальных форм, приведенными в [12, стр. 93,94].

Пример 7. Покажем, что $0_{(2)}$ является точкой локального минимума в задаче

$M:\quad p_0(x_1,x_2)=x_1x_2^4-1{,}99x_2^6-5x_1^4+6x_1^6x_2\to\min,$

$$p_1(x_1,x_2)=x_1^2-7x_1x_2^2+10x_2^4+x_1x_2^{34}-2x_1^3=0.$$

В данном примере $I_m=I_2=\{1,2\}$. При $I=\{1\}$ имеем задачу $M_I=M_{\{1\}}$:

$$-5x_1^4\to\min;\ \ x_1^2-2x_1^3=0,$$

в которой точка $x_1=0,$ очевидно, является точкой локального минимума. При $I=\{2\}$ имеем задачу $M_I=M_{\{2\}}$:

$$-1{,}99x_2^6\to\min;\ \ 10x_2^4=0,$$

в которой точка $x_2=0,$ очевидно, является точкой локального (и даже глобального) минимума. Осталось рассмотреть случай $I=I_M$ и проверить выполнение условия U_M (см. (4.1)). Заметим, что, варьируя $A\in\mathbf{N}^2$, можно получить в полиноме $p_1(x_1,x_2)$ три возможные главные A-квазиоднородные полиномиальные формы:

а) x_1^2 (например, при $A=(1,1)$;

б) $10x_2^4$ (например, при $A=(4,1)$);

в) $x_1^2-7x_1x_2^2+10x_2^4$ (например, при $A=(2,1)$).

Последовательно рассмотрим все три случая. В случае а) при любом допустимом $A\in\mathbf{N}^2$ имеем

$$H_A=\{(h_1,h_2)\in\mathbf{R}^2\,|\,|h|=1,h_i\neq 0,i=1,2,h_1^2=0\}=\varnothing,$$

т.е. в этом случае (4.1) очевидным образом выполняется. Аналогичная ситуация имеет место и в случае б). В случае в) при любом допустимом A (очевидно, что семейством допустимых $A\in\mathbf{N}^2$ в этом случае является множество $\{(A_1,A_2)\in\mathbf{N}^2\,|\,A_1=2A_2\}$ и с учетом условия НОД(A_1,A_2)=1 имеем единственное $A=(2,1)$) получаем (для удобства вместо $|h|$ используем $|h_2|$; см. замечание 13)

$$H_A=\{(h_1,h_2)\in\mathbf{R}^2\,\big|\,|h_2|=1,h_i\neq 0,i=1,2,h_1^2-7h_1h_2^2+10h_2^4=0\}=$$

$$=\{(2,1),(2,-1),(5,1),(5,-1)\},\ \varphi_{A,0}(x_1,x_2)=x_1x_2^4-1{,}99x_2^6.$$

При этом, очевидно, $\forall h\in H_A\quad \varphi_{A,0}(h)>0.$ Таким образом, условие U_M также выполняется, а следовательно, $0_{(2)}$ - точка локального минимума в задаче M.

Пример 8. Покажем, что $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума в задаче M: $p_0(x_1,x_2)=x_1x_2^4-2{,}01x_2^6-5x_1^4+6x_1^6x_2\to\min,$

$$p_1(x_1,x_2)=x_1^2-7x_1x_2^2+10x_2^4+x_1x_2^{34}-2x_1^3=0.$$

Для $A=(2,1)$ главными A-квазиоднородными полиномиальными формами полиномов $p_0(x_1,x_2),p_1(x_1,x_2)$, соответственно, являются $x_1x_2^4-2{,}01x_2^6,\ x_1^2-7x_1x_2^2+10x_2^4$ и при этом

$$J_A(x_1,x_2)=[2x_1-7x_2^2 \quad -14x_1x_2+40x_2^3].$$

Заметим, что в точке $(2,1)\in H'_A$ справедливо: $2x_1-7x_2^2\neq 0$ (т.е. ранг матрицы $J_A(2,1)$ равен 1), $x_1x_2^4-2{,}01x_2^6<0$, т.е. необходимое условие локального минимума (см. лемму 13) не выполняется, а следовательно, $0_{(2)}$ не является точкой локального минимума задачи M.

Простые примеры показывают, что приведенные в леммах 12,13 необходимые и достаточные условия экстремума не всегда позволяют ответить на вопрос, является ли $0_{(m)}$ точкой локального минимума в задаче (2.3),(2.4) (т.е. в этих примерах условия экстремума «не работают»). В связи с этим приведем некоторые модификации лемм 12,13, целью которых является расширение круга задач, на которых «работают» условия экстремума.

Для дальнейшего понадобятся следующие определения. Пусть $x\in\mathbf{R}^m$,

$\varphi_1(x),\ldots,\varphi_r(x)$- полиномы, где $r\geq 2$. Будем говорить, что $\varphi_1(x)$ выражается через $\varphi_2(x),\ldots,\varphi_r(x)$, если для некоторых полиномов $g_2(x),\ldots,g_r(x)$ выполняется

$$\varphi_1(x)\equiv g_2(x)\varphi_2(x)+\ldots+g_r(x)\varphi_r(x).$$

(4.2) Систему полиномов $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_r(x)$, где $r\geq 1$, назовем *независимой,* если либо $r=1$ и $\neg(\varphi_1\equiv 0)$, либо ни один из полиномов этой системы не выражается через другие.

Пусть $x\in\mathbf{R}^m$, $A\in\mathbf{N}^m$, $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_r(x)$(где $r\geq 2$) – полиномы, являющиеся A-квазиоднородными полиномиальными формами, причем $\neg(\varphi_i\equiv 0), i=1,2,\ldots,r.$ В работе [1] приводится простой **алгоритм 6** проверки, выражается ли $\varphi_1(x)$ через $\varphi_2(x),\ldots,\varphi_r(x)$. Он сводит эту проверку к решению системы линейных алгебраических уравнений. В случае, если $\varphi_1(x)$ выражается через $\varphi_2(x),\ldots,\varphi_r(x)$ этот алгоритм находит полиномы $g_2(x),\ldots,g_r(x)$ из разложения (4.2), причем эти полиномы являются A-квазиоднородными полиномиальными формами.

Утверждение леммы 12 можно усилить, заменив условие U_{M_I} на более слабое $\widetilde{U}_{M_I}$ (которое будет сформулировано ниже). Кроме того, будет усилено и утверждение леммы 13. Для простоты обозначений сформулируем упомянутое условие $\widetilde{U}_{M_I}$ для случая $I = I_M$, т.е. при $M_I = M_{I_M} = M$. Предварительно введем для произвольного вектора $A \in \mathbf{N}^m$ множества $\widetilde{H}_A$, $\widetilde{H}'_A$, используя

Алгоритм 7

Шаг 1. Если главные A-квазиоднородные полиномиальные формы

$\varphi_{A,1},\ldots,\varphi_{A,l}$

(4.3)

полиномов $p_1,\ldots,p_l$ независимы, то полагаем $\widetilde{H}_A = H_A, \widetilde{H}'_A = H'_A$. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Используя алгоритм 6, выражаем одну из форм системы (4.3) через другие формы этой системы. Пусть например, $\varphi_{A,l} \equiv g_1\varphi_{A,1} + \ldots + g_{l-1}\varphi_{A,l-1}$, где g_i являются A-квазиоднородными полиномиальными формами. Произведем преобразование задачи M, т.е. заменим задачу M на эквивалентную ей, присвоив $p_l := p_l - g_1 p_1 - \ldots - g_{l-1}p_{l-1}$. В результате такого преобразования могут сузиться множества H_A, H'_A (в частности, они могут оказаться пустыми). Если $p_l \equiv 0$, то исключаем l-ое ограничение из дальнейшего рассмотрения, положив $l := l-1$. Переходим к шагу 1.

Введем теперь A-квазиоднородную полиномиальную форму $\widetilde{\varphi}_{A,0}(x)$, используя следующий

Алгоритм 8

Шаг 1. Используя алгоритм 6, определяем A-квазиоднородные полиномиальные формы $g_i(x), i = 1,2,\ldots,l,$ чтобы выполнялось $\varphi_{A,0} \equiv g_1\varphi_{A,1} + \ldots + g_l\varphi_{A,l}$. Если таких $g_i, i = 1,2,\ldots,l,$ не существует, то полагаем $\widetilde{\varphi}_{A,0} \equiv \varphi_{A,0}$. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Производим преобразование задачи M (см. замечание 15), т.е. заменяем задачу M на эквивалентную ей, присвоив $p_0 := p_0 - g_1 p_1 - \ldots - g_l p_l$. Если при этом оказывается, что $p_0 \equiv 0$, то $0_{(m)}$ заведомо является точкой локального (и даже глобального) минимума задачи M. Если же $\neg(p_0 \equiv 0)$, то переходим к шагу 1.

Замечание 15. Алгоритм 8 применяется к задаче M не в исходном виде, а в преобразованном, полученном в результате применения к этой задаче алгоритма 7 (при этом для простоты обозначений для преобразованной задачи сохраняем в алгоритме 8 те же обозначения, что и для исходной задачи M).

Обозначим теперь через $\widetilde{U}_M$ условие

$\forall A \in \mathbf{N}^m$, $\forall h \in \widetilde{H}_A \quad \widetilde{\varphi}_{A,0}(h) > 0.$

Аналогичное условие относительно задач M_I, где $I \subseteq I_M$, $I \neq \varnothing$, будем обозначать через $\widetilde{U}_{M_I}$. Совершенно аналогично леммам 8,9 нетрудно показать, что справедливы следующие леммы.

Лемма 14 (достаточное условие экстремума). Если для любого непустого множества $I \subseteq I_M$ выполняется : либо $0_{(|I|)}$ - точка локального минимума задачи M_I, либо справедливо условие $\widetilde{U}_{M_I}$, то $0_{(m)}$ - точка локального минимума задачи (2.3),(2.4).

Лемма 15 (необходимое условие экстремума). Если $0_{(m)}$ - точка локального минимума задачи (2.3),(2.4), то для любых $A \in \mathbf{N}^m$, $h \in \widetilde{H}'_A$, если ранг матрицы $J_A(x)$ (см. замечание 16, приводимое ниже) при $x = h$ равен l (т.е. числу равенств в задаче M), то $\widetilde{\varphi}_A(h) \geq 0.$

Замечание 16. Матрица $J_A(x)$ и число l в лемме 15 определяются по системе равенств задачи M не в исходном виде, а в преобразованном, полученном в результате применения к этой задаче алгоритма 7.

Замечание 17. При проверке условий лемм 14,15 остаются в силе замечания 12-14.

Замечание 18. В работе [1, стр. 25-29] приводятся примеры на применение лемм 14,15.

Заметим, что в приведенных необходимых и достаточных условиях экстремума (см. леммы 12-15) имеется следующий недостаток, который создает трудности при их практическом применении. Действуя в соответствии с этими условиями, необходимо, вообще говоря, для каждого $A \in \mathbf{N}^m$ выделить и исследовать главные A-квазиоднородные полиномиальные формы $\varphi_{A,j}(x)$ полиномов $p_i(x), i = 0,1,\ldots,l$, что невозможно в силу бесконечности множества $\mathbf{N}^m$. Между тем, очевидно, что существует лишь конечное число наборов квазиоднородных полиномиальных форм $(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_l(x))$ таких, что для некоторого $A \in \mathbf{N}^m$ $\varphi_j(x)$ являются главными A-квазиоднородными полиномиальными формами полиномов $p_j(x)$ ($j = 0,1,...,l$). Указанные наборы будем называть подходящими для задачи M(т.е. для задачи (2.3),(2.4)). Аналогично определяются подходящие наборы квазиоднородных полиномиальных форм и для системы уравнений $p_1 = 0,...,p_l = 0$ из задачи M. В связи с этим в работе [1] предлагается достаточно простой алгоритм выделения всех подходящих наборов квазиоднородных полиномиальных форм для задачи M и для системы уравнений $p_1 = 0,...,p_l = 0$ из этой задачи. Этот алгоритм имеет дело с конечными множествами $P(N_{p_j}), j = 0,1,...,l,$ и для его реализации требуется решить несколько задач линейного программирования. Кроме того, в работе [1] формулируются необходимое и достаточное условия экстремума относительно этих наборов, приводимые ниже.

Обозначим для любого подходящего для системы $p_1 = 0,...,p_l = 0$ набора квазиоднородных полиномиальных форм $(\varphi_1,...,\varphi_l)$

$$H_{(\varphi_1,...,\varphi_l)} = \{h \in \mathbf{R}^m \,\big|\, |h| = 1, h_i \neq 0, i = 1,2,...,m, \varphi_j(h) = 0, j = 1,2,...,l\},$$

$$H'_{(\varphi_1,...,\varphi_l)} = \{h \in \mathbf{R}^m \mid \varphi_j(h) = 0, j = 1,2,...,l\},$$

Обозначим, далее, через Φ_M семейство подходящих наборов квазиоднородных полиномиальных форм для задачи M. Введем условие $\breve{U}_M$ относительно задачи $0_{(m)}$:

$$\forall(\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_l) \in \Phi_M, \forall h \in H_{(\varphi_1,...,\varphi_l)}\ \varphi_0(h) > 0.$$

Аналогичные условия относительно задач M_I, где $I \subseteq I_M, I \neq \varnothing,$ будем обозначать через $\breve{U}_{M_I}$.

Лемма 16 (достаточное условие экстремума). Если для любого непустого множества $I \subseteq I_m$ выполняется: либо $0_{(|I|)}$- точка локального минимума задачи M_I, либо справедливо условие $\breve{U}_{M_I}$, то $0_{(m)}$- точка локального минимума задачи (2.3),(2.4).

Лемма 17 (необходимое условие экстремума). Если $0_{(m)}$ - точка локального минимума задачи (2.3),(2.4), то $\forall(\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_l) \in \Phi_M, \forall h \in H'_{(\varphi_1,...,\varphi_l)}$, если ранг матрицы $[\partial\varphi_i(x)/\partial x_j]$, где $i = 1,2,...,l, j = 1,2,...,m,$ при $x = h$ равен l, то $\varphi_0(h) \geq 0.$

Леммы 16,17 являются очевидными следствиями лемм 14,15, соответственно.

Замечание 19. При проверке условий лемм 16,17 остаются в силе замечания 12,13.

Замечание 20. По аналогии с усилением в леммах 14,15 результатов лемм 12,13, возможно аналогичное усиление результатов лемм 16,17 (см. [1, стр. 47-50]).

Библиографический список

1. Нефедов В.Н. Необходимые и достаточные условия локального минимума в полиномиальных задачах минимизации. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. - 02.11.89, №6830-В89.- 64с.
2. Нефедов В.Н. Об одном достаточном условии экстремума для полиномов и степенных рядов. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. - 25.04.90, №2666-В90. - 109 с.
3. Нефедов В.Н. Об оценивании погрешности в выпуклых полиномиальных задачах оптимизации. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990, т.30, № 2. - с.200-216.
4. Нефедов В.Н. Задача математического программирования с выпуклым нерегулярным множеством возможных решений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990, т.30, № 6. - с.844-857.
5. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
6. Нефедов В.Н. О вычислении условного минимума функции с заданной точностью. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1983, т.23, № 6. - с.590-601.
7. Нефедов В.Н.Исследование характера зависимости одной однопараметрической задачи от параметра. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. - 16.11.84, №7591-84. - 42с.
8. Нефедов В.Н. Полиномиальные задачи оптимизации. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1987, т.27, № 5. - с.661-675.
9. Нефедов В.Н.Метод исключения переменных в полиномиальных задачах оптимизации . / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. - 16.11.84, №7590-84. - 32с.
10. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. – 520 с.
11. Нефедов В.Н. Методы сведения задачи выпуклого программирования, не удовлетворяющей условию Слейтера, к задаче выпуклого программирования, удовлетворяющей условию Слейтера. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. - 24.02.88, №2092-В88.- 99с.
12. Нефедов В.Н. О получении верхней оценки для расстояния по Хаусдорфу между точным и возмущенным множествами, заданными выпуклыми полиномиальными ограничениями типа неравенств. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. – 03.01.89, №293-В89. - 102 с.

13. Нефедов В.Н. Необходимые и достаточные условия положительности и неотрицательности полинома в положительном ортанте. / МАИ. - Деп. в ВИНИТИ. - 27.12.02, №2281-В2002.- 34с.
14. Нефедов В.Н. Об одном методе исследования полинома на знакоопределенность в положительном ортанте. Электронный журнал «Труды МАИ», рубрика, «Математика», 2006г. – 43с.

Сведения об авторе

Нефёдов Виктор Николаевич, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н. Контакты: +7 495 756-21-74, nefedovvn@rambler.ru.