

Научная статья
УДК 531
DOI: 10.34759/vst-2022-2-179-188

ПРИБЛИЖЁННО-ОПТИМАЛЬНЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ ЗАКОН УПРАВЛЕНИЯ СПУСКОМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С АСИММЕТРИЕЙ В АТМОСФЕРЕ МАРСА

Ибрагим Бакри

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва
(Самарский университет),
Самара, Россия
ibrahimbakry0@gmail.com

Аннотация. Рассматривается динамическая модель, описывающая движение космического аппарата с немалой аэродинамической и малой массовой асимметрией относительно центра масс в разреженной атмосфере Марса. Целью работы является получение приближенного дискретного оптимального закона управления ориентацией космического аппарата. При этом в работе были использованы метод динамического программирования Беллмана и метод усреднения. Решения дискретной системы уравнений движения были найдены методом Z-преобразования. Точность полученных результатов подтверждена численными результатами интегрирования исходных уравнений.

Ключевые слова: оптимальное управление ориентацией с использованием метода Беллмана, дискретное управление ориентацией, аэродинамическая и массовая асимметрия, движение в атмосфере Марса

Благодарности: автор выражает благодарность своему научному руководителю Владиславу Васильевичу Любимову за ценные замечания и советы при написании данной статьи.

Для цитирования: Бакри И. Приближённо-оптимальный дискретный закон управления спуском космического аппарата с асимметрией в атмосфере Марса // Вестник Московского авиационного института. 2022. Т. 29. № 2. С. 179-188. DOI: 10.34759/vst-2022-2-179-188

Original article

APPROXIMATELY OPTIMAL DISCRETE LAW OF SPACECRAFT DESCENT CONTROL WITH ASYMMETRY IN MARS ATMOSPHERE

Ibrahim Bakry

Samara National Research University named after academician S.P. Korolev (Samara University),
Samara, 443086, Russia
ibrahimbakry0@gmail.com

Abstract

The spacecraft orientation stability these days is of utter importance for both public and private space agencies and companies. The growing interest to the Red Planet increases the number of space missions, which include orbital apparatuses, landers or Mars rovers. Since 1960s up to now, more than forty nine missions were sent to Mars from different countries. The majority of them end in failure, either fly far away from the Mars orbit (did not enter an orbit), crash upon its surface, do not reach the target, or connection is being lost prior to the target reaching. This indirectly indicates errors at the stages of navigation, control, stabilization or design.

The following missions are the example of failed missions to Mars, which are either lost or crashed due to failures in the navigation system, or incorrect orientation. They are 1M, 2M, 2MV, 3MV and 3MS (1960-1971), Mars-1 (1962), Mars-2 lander (1971), Mars-6 and Mars-7 landers (1973), Phobos-1 (1988), Mars Observer (1992), Mars-96 (1996), Mars Polar Lander (1999), Deep Space-2 (1999), Beagle-2 (2003), Yinghuo-1 (2011), Schiaparelli EDM lander (2016).

The presented article considers a dynamic model describing the spacecraft perturbed motion as a rigid body with significant aerodynamic and mass asymmetries relative to the spacecraft center of mass in the rarefied atmosphere of Mars.

The purpose of this work consists in obtaining an approximate discrete optimized control law of a spacecraft attitude employing dynamic programming and averaging methods. The system of quasi-linear equation was considered and averaged to obtain a simpler system of equations, which can be modeled applying the dynamic programming method.

Optimal control laws were determined based on the quadratic optimization criterion by Bellman principle, and, besides, the system of discrete equations, employing analytical Z-transform, reverse Z-transform and numerical discrete Euler method, was developed and solved. Reliability of the obtained analytical control laws is being confirmed by the results of numerical integration by the numerical Euler Method.

Euler method integration was being performed employing fixed and variable integration steps. The results obtained with a variable step appeared to be more exact than those obtained with the fixed step with the Z-transform method. The conversion behavior of both the angle of attack and the angular velocity at comparing them with the found solutions while similar studies for a significant aerodynamic and inertial asymmetry relative to the center of mass come closer to the results of this study.

The numerical results of this work confirm that the obtained approximate discrete expressions for control optimization ensure the in angular velocity and spatial angle of attack reduction to the required small values in a time commensurable with the time from the free movement start of the spacecraft uncontrolled descent to the braking parachute system initializing.

By applying these laws to a lander with asymmetries in both vehicle aerodynamics and mass, the values of angular velocity and the angle of attack will converge to zeros enforcing the stabilization.

The practical significance of the obtained discrete laws of the two-channel control is being confirmed by application of the small jet engines running in discrete mode.

Keywords: optimal orientation control with Bellman method, discrete orientation control, aerodynamic and mass asymmetry, motion in Mars atmosphere

For citation: Bakry I. Approximately Optimal Discrete Law of Spacecraft Descent Control with Asymmetry in Mars Atmosphere. *Aerospace MAI Journal*, 2022, vol. 29, no. 2, pp. 179-188. DOI: 10.34759/vst-2022-2-179-188

Введение

Задача спуска космического аппарата (КА) в разреженной атмосфере Марса является одной из наиболее технически сложных и аварийно-опасных задач современной космонавтики. В частности, в процессе атмосферного спуска наблюдается действие на асимметричный КА разнообраз-

ных возмущающих аэродинамических моментов. При этом возмущающие моменты могут быть вызваны, например, аэродинамической и массовой асимметрией КА. Известно, что моменты от асимметрии могут привести к аварийным ситуациям при вводе в действие тормозной парашютной системы [1].

В статьях [2, 3] проведено численное моделирование с целью определения диапазона допустимых ограничений параметров смещения центра масс космического аппарата, центробежных моментов инерции и аэродинамической асимметрии. В результате была предложена методика определения области допустимых значений данных видов асимметрии при движении космического аппарата в атмосфере с малой начальной угловой скоростью вращения относительно продольной оси. В статье [4] были исследованы баллистические аспекты проблемы управления КА в атмосфере Марса. В данной работе проводился анализ изменения критериев оптимальности в зависимости от значений аэродинамического качества, приведенной нагрузки на лобовую поверхность и максимально допустимых значений перегрузки. В результате была обоснована необходимость применения управляемых КА для обеспечения требований к значениям физически реализуемого коридора входа. Эти результаты могут быть использованы при выполнении проектов исследования Марса и других планет.

В работе [5] описываются результаты полного компьютерного моделирования последовательности входа, спуска и посадки научной лаборатории Марса в исследовательском центре НАСА. При этом данные, полученные в реальном полете, при успешной посадке космического аппарата, сравниваются с предполетными статистическими распределениями, предсказанными численным моделированием [5]. Такие сравнения дают представление как о точности моделирования, так и об общей производительности транспортного средства [6].

Численное моделирование динамики и управления угловым ускорением возвращаемого космического аппарата с малой асимметрией в атмосфере исследовано в работах [7, 8]. К конечному итоге, была определена методика построения области допустимых величин параметров асимметрии КА при движении в атмосфере Марса. В работе [9] рассматривалась динамическая модель, описывающая возмущенное движение КА как твердого тела с немалой аэродинамической и инерционной асимметрией относительно центра масс в разреженной атмосфере Марса на базе усреднённой системы квазилинейных уравнений движения. В результате были получены оптимальные законы управления углом атаки и угловой скоростью КА.

Известно, что следующие марсианские космические аппараты: «Марс-1 (1962)», «Фобос-1

(1988)», «Mars Observer (1992)», «Mars Polar Lander (1999)», «Deep Space-2 (1999)», «Бигль-2 (2003)», «Скиапарелли (2016)» — были потеряны или разбились о поверхность Марса (спутников Марса) по причине сбоя в навигационной системе или неправильной ориентации [10–13].

Актуальность данной статьи заключается в разработке дискретного оптимального двухканального закона управления угловой скоростью и пространственным углом атаки космического аппарата на участке его спуска в разреженной атмосфере Марса с высоты 100 км до раскрытия его парашюта на высоте 10 км. Рассматривается динамическая модель, описывающая возмущенное движение космического аппарата как твердого тела с немалой аэродинамической асимметрией и малой массовой асимметрией относительно центра масс в разреженной атмосфере Марса. При исследовании управляемого движения КА относительно центра масс производится линеаризация исходной системы квазилинейных уравнений движения.

Целью данной работы является получение приближенного дискретного оптимизированного двухканального закона управления ориентацией космического аппарата (пространственным углом атаки и угловой скоростью). При синтезе дискретного управления предполагается использовать метод динамического программирования (принцип Беллмана) [14] и метод усреднения [15]. Предполагается, что управление пространственным углом атаки и угловой скоростью производится посредством бортовых реактивных двигателей малой тяги.

Математическая модель

В статье применяются квазилинейные уравнения движения асимметричного космического аппарата относительно центра масс в атмосфере [16, 17]. При этом в данных уравнениях предполагается, что космический аппарат имеет малые значения угла атаки α , но немалые значения аэродинамической асимметрии и малые значения массовой асимметрии. Кроме того, угловая скорость и угол атаки космического аппарата являются управляемыми на этапе спуска КА в разреженной атмосфере Марса. Управление заданными характеристиками движения КА относительно центра масс осуществляется с помощью бортовых реактивных двигателей малой тяги. В результате разложения правых частей квазилинейных уравнений управляемого движения космического аппарата в ряд Маклорена по угловой скорости

ω_x без учета нелинейных членов второго порядка малости, получаем линеаризованную систему уравнений движения КА относительно центра масс при $\omega_x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= -\varepsilon \bar{m}_x^A \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\theta + \theta_2) + \varepsilon u_\omega; \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\varepsilon \frac{\bar{m}_A}{2} \omega \cos(\theta + \theta_1) + \varepsilon u_\alpha; \\ \frac{d\theta}{dt} &= (1 - \bar{I}_x) \omega_x. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u_ω – управление значением угловой скорости ω_x , $u_\omega = M_{x1} / I_x$; u_α – управление значением пространственного угла атаки α , $u_\alpha = -M_{y1} / 2I\omega$; M_{x1}, M_{y1} – механические моменты от реактивных двигателей управления; ε – малый параметр, характеризующий величину управлений и величину функций асимметрии \bar{m}_A, \bar{m}_x^A ; θ – быстрая фаза, $\theta = \varphi - \pi/2$; φ – аэродинамический угол крена; \bar{m}_A – функция медленных переменных ω_x и α , характеризующая массовую и аэродинамическую асимметрию;

$$\bar{m}_A = m_A \omega^{-2}, m_A = \sqrt{(m_1^A)^2 + (m_2^A)^2},$$

$$m_1^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{y0}^\Phi + \frac{\omega^2}{m_{z1}} C_{x1} \bar{\Delta z},$$

$$m_2^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} m_{z0}^\Phi - \frac{\omega^2}{m_{z1}} C_{x1} \bar{\Delta y};$$

$$\sin \theta_1 = m_1^A / m_A; \cos \theta_1 = -m_2^A / m_A;$$

$$m_x^A = \sqrt{(m_{x1}^A)^2 + (m_{x2}^A)^2},$$

$$m_{x1}^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} C_{y1} \bar{\Delta y}; m_{x2}^A = -\frac{\omega^2}{m_{z1}} C_{y1} \bar{\Delta z};$$

$$\sin \theta_2 = -m_{x1}^A / m_x^A; \cos \theta_2 = m_{x2}^A / m_x^A;$$

m_{y0}^Φ, m_{z0}^Φ – немалые безразмерные коэффициенты аэродинамической асимметрии КА; $\bar{\Delta y}, \bar{\Delta z}$ – малые безразмерные коэффициенты массовой асимметрии КА; C_{x1}, C_{y1}, m_{z1} – аэродинамические коэффициенты сил и моментов; m_{y0}^Φ, m_{z0}^Φ – коэффициенты малых аэродинамических моментов от несимметрии формы КА;

$C_x = C_{x1}, C_y = C_y^\alpha \alpha, m_{zi} = m_{zi}^\alpha \alpha$, где коэффициент C_{x1} и частные производные C_y^α определены при $\alpha = 0$; $\bar{I}_x = I_x / I, I_x, I_y = I_z = I$ – моменты инерции КА относительно осей связанной системы координат $OXYZ$; $\omega_\alpha = \sqrt{\bar{I}_x^2 \omega_x^2 / 4 + \omega^2}$; ω – частота прецессии при угловой скорости $\omega_x = 0$, $\omega = \sqrt{-m_{z10} qSL / I}$; q – скоростной напор; S – площадь миделевого сечения; L – длина КА; m_{z10} – коэффициент восстанавливающего аэродинамического момента.

Следует отметить, что случай отрицательных величин ω_x может быть рассмотрен аналогично. Таким образом, при наличии массовой и аэродинамической асимметрии в рассматриваемой системе (1) наблюдается возмущение угловой скорости ω_x и угла атаки α .

Система уравнений (1) впервые была получена для малой асимметрии КА в атмосфере Земли [16]. В статье данная система применяется для разреженной атмосферы Марса при немалой аэродинамической асимметрии и малой массовой асимметрии КА с высоты полёта 100 км до раскрытия парашютной системы КА на высоте 10 км. На рис. 1 показаны численные результаты, демонстрирующие влияние значений немалых аэродинамических коэффициентов C_{y1}, C_{x1} и малой массовой асимметрии $\bar{\Delta y}, \bar{\Delta z}$ на значения функций $0.5\bar{m}_A \omega$ и $\bar{m}_x^A \omega^2$. Из рис. 1 видно, что при выбранных значениях массово-инерционных характеристик КА значения функций $0.5\bar{m}_A \omega$ малы (меньше 0.3) на диапазоне высот со 100 до 10 км.

Синтез оптимального управления

Рассматриваемая задача синтеза управления состоит в поиске приближенных оптимальных законов, обеспечивающих одновременную стабилизацию угловой скорости ω_x и угла атаки α . При этом требуется определить приближенные малые функции управления $u_\alpha \in U_\alpha, u_\omega \in U_\omega$, которые приводят начальный угол атаки $\alpha_0 = \alpha(t_0)$ и начальную угловую скорость $\omega_{x0} = \omega_x(t_0)$ к заданным малым или нулевым величинам $\alpha_T = \alpha(T) = 0$ и $\omega_{xT} = \omega_x(T)$ в течение интервала времени T .

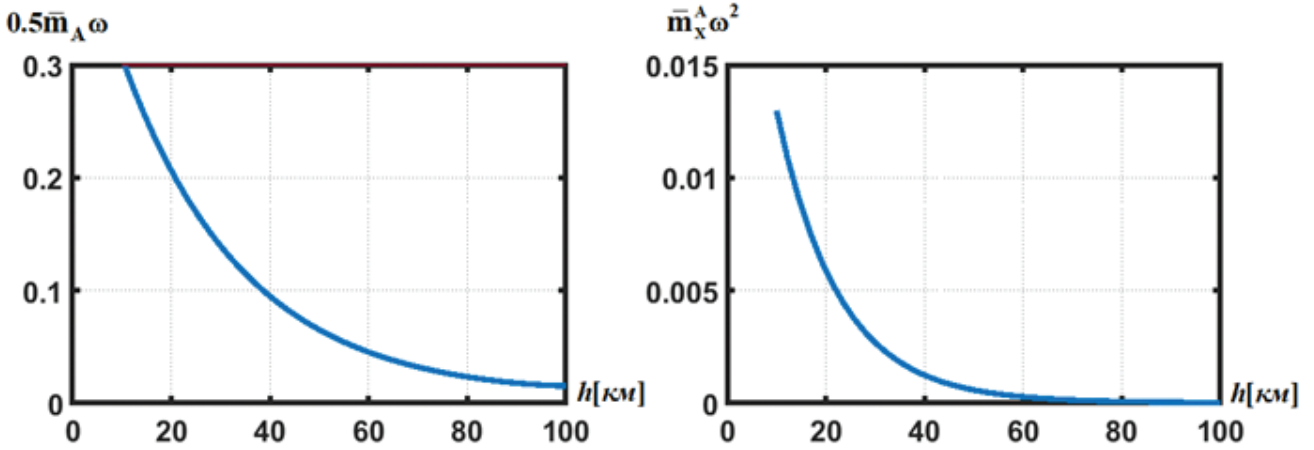


Рис. 1. Малые значения функций асимметрии системы $0.5\bar{m}_A\omega$ и $\bar{m}_x^A\omega^2$ на примере спускаемого аппарата «Mars Polar Lander» при немалой аэродинамической асимметрии $C_{y1}=0.6, C_{x1}=0.4$, малой массовой асимметрии $\Delta y = \Delta z = 0.05$ и при значениях $m_{z1} = -0.0005$

Вводится следующий квадратичный критерий оптимальности:

$$I = \varepsilon \int_0^T (a_\omega \omega_x^2 + a_\alpha \alpha^2 + b_\omega u_\omega^2 + b_\alpha u_\alpha^2) dt, \quad (2)$$

где $a_\omega, a_\alpha, b_\omega, b_\alpha$ — заданные положительные коэффициенты критерия оптимальности;

$a_\omega \omega_x^2 + a_\alpha \alpha^2 + b_\omega u_\omega^2 + b_\alpha u_\alpha^2 = V(\omega_x, \alpha, u_\omega, u_\alpha)$ — положительно определённая функция.

Для решения задачи оптимизации применяется принцип Беллмана [14], который для системы (1) и критерия (2) приводит к соотношению

$$\min_{u_\omega, u_\alpha} \left(a_\omega \omega_x^2 + a_\alpha \alpha^2 + b_\omega u_\omega^2 + b_\alpha u_\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial \omega_x} \frac{d\omega_x}{dt} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \right) = 0, \quad (3)$$

где $v(\omega_x, \alpha, \theta)$ — функция Беллмана.

Подставив в равенство (3) производные $\frac{d\omega_x}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$ из системы (1), получим:

$$\min_{u_\omega, u_\alpha} \left(\varepsilon a_\omega \omega_x^2 + \varepsilon a_\alpha \alpha^2 + \varepsilon b_\omega u_\omega^2 + \varepsilon b_\alpha u_\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial \omega_x} (\varepsilon u_\omega - \varepsilon \bar{m}_x^A \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\theta + \theta_2)) + \frac{\partial v}{\partial \alpha} (\varepsilon u_\alpha - \varepsilon \frac{\bar{m}_A}{2} \omega \cos(\theta + \theta_1)) + \frac{\partial v}{\partial \theta} (1 - \bar{I}_x) \omega_x \right) = 0. \quad (4)$$

Выделив в уравнении (4) слагаемые, зависящие от управлений u_ω, u_α , получим следующее выражение:

$$F(u_\omega, u_\alpha) = b_\omega u_\omega^2 + b_\alpha u_\alpha^2 + \frac{\partial v}{\partial \omega_x} u_\omega + \frac{\partial v}{\partial \alpha} u_\alpha. \quad (5)$$

Необходимые условия минимума функции

$F(u_\omega, u_\alpha)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_\omega} &= 2b_\omega u_\omega + \frac{\partial v}{\partial \omega_x} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} &= 2b_\alpha u_\alpha + \frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из решения системы уравнений (6) находим выражения для оптимальных управлений:

$$\begin{aligned} u_\omega &= -\frac{1}{2b_\omega} \frac{\partial v}{\partial \omega_x}; \\ u_\alpha &= -\frac{1}{2b_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (7)$$

Составим матрицу Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial u_\omega^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha \partial u_\omega} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u_\omega \partial u_\alpha} & \frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_\omega & 0 \\ 0 & 2b_\alpha \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Следовательно, в стационарных точках (7) выполняется критерий Сильвестра:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_\omega^2} = 2b_\omega > 0, \det H = 4b_\omega b_\alpha > 0. \quad (9)$$

Таким образом, выполнение условий (9) для положительно определённой матрицы Гессе обеспечивает минимум стационарных точек (7).

Подставляя управление (7) в уравнение (4), получаем после упрощения уравнение Беллмана:

$$a_\omega \omega_x^2 + a_\alpha \alpha^2 + \frac{1}{4b_\omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \omega_x} \right)^2 + \frac{1}{4b_\alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{1}{2b_\alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{\partial v}{\partial \omega_x} (\alpha \bar{m}_x^A \omega^2 \bar{T}_x^{-1} \sin(\theta + \theta_2)) - \frac{1}{2b_\omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \omega_x} \right)^2 - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\bar{m}_A}{2} \omega \cos(\theta + \theta_1) + \frac{\partial v}{\partial \theta} (1 - \bar{T}_x) \omega_x = 0. \quad (10)$$

При усреднении уравнений (1) применяются следующие разложения [18]:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_x^0 + \varepsilon f_{1\omega}(\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0) + \dots \\ \alpha = \alpha^0 + \varepsilon f_{1\alpha}(\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0) + \dots \\ \theta = \theta^0 + \varepsilon f_{1\theta}(\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0) + \dots \\ v = v^0(\alpha^0) + \varepsilon v_1(\alpha^0, \theta^0) + \dots \end{cases} \quad (11)$$

Здесь $\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0$ — новые усредненные переменные системы (1); функции

$$f_{j\omega}(\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0), f_{j\alpha}(\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0), f_{j\theta}(\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0), v^0(\alpha^0), v_j(\alpha^0, \theta^0), (j=1, 2, \dots)$$

подлежат определению.

Подставляя ряды (11) в уравнение (10) в первом приближении метода усреднения, опуская в новых переменных $\omega_x^0, \alpha^0, \theta^0$ индекс «0», получим:

$$a_\omega \omega_x^2 + a_\alpha \alpha^2 + \frac{1}{4b_\omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \omega_x} \right)^2 - \frac{1}{4b_\alpha} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 = 0. \quad (12)$$

Порождающее решение уравнения (12) будем искать методом неопределённых коэффициентов в виде

$$v = A\omega_x^2 + B\alpha^2, \quad (13)$$

где A, B — искомые коэффициенты.

С целью определения коэффициентов A, B подставим выражение (13) в уравнение (12):

$$\omega_x^2 \left(a_\omega - \frac{A^2}{b_\omega} \right) + \alpha^2 \left(a_\alpha - \frac{B^2}{b_\alpha} \right) = 0. \quad (14)$$

При одновременном неравенстве нулю угловой скорости и угла атаки уравнение (14) принимает вид следующей системы:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{b_\omega} - a_\omega &= 0; \\ \frac{B^2}{b_\alpha} - a_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из корней уравнений системы (15) представляют интерес только положительные величины:

$$A_1 = \sqrt{a_\omega b_\omega}; \quad (16)$$

$$B_1 = \sqrt{a_\alpha b_\alpha}. \quad (17)$$

Действительно, отрицательные величины

$A_1 = -\sqrt{a_\omega b_\omega}, B_1 = -\sqrt{a_\alpha b_\alpha}$ должны быть отброшены, так как они не обеспечивают положительную определённость функции Беллмана (13).

Учитывая коэффициенты (16) и (17) в функции Беллмана (13), находим выражения для оптимальных управлений (7). Подставляя эти выражения в систему (1) и усредняя её по быстрой фазе, получаем в первом приближении:

$$\left\langle \frac{d\omega_x}{dt} \right\rangle = -\varepsilon K_{\omega p} \omega_x; \quad (18)$$

$$\left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = -\varepsilon K_{\alpha p} \alpha, \quad (19)$$

где $K_{\omega p} = \sqrt{a_\omega b_\omega}, K_{\alpha p} = \sqrt{a_\alpha b_\alpha}$.

Следовательно, решение уравнений (18) и (19), полученные с учётом найденных управлений, обеспечивают асимптотическую устойчивость точек покоя $\omega_x = 0, \alpha = 0$ в первом приближении метода усреднения.

Подставляя коэффициенты (16) и (17) в выражение (13), перепишем после упрощения оптимальные уравнения (7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_\omega &= -\sqrt{\frac{a_\omega}{b_\omega}} \omega_x; \\ u_\alpha &= -\sqrt{\frac{a_\alpha}{b_\alpha}} \alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

Учёт управлений в исходной системе

С помощью метода Эйлера можно записать исходную систему в дискретном виде следующим образом [18]:

$$\begin{aligned} \alpha(n+1) &= \alpha(n) + h_\alpha f(t(n), \alpha(n)), \\ \omega_x(n+1) &= \omega_x(n) + h_\omega f(t(n), \omega_x(n)). \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя функции $f(t(n), \alpha(n))$, $f(t(n), \omega_x(n))$ и законы управления (20) в систему (21), получим:

$$\begin{aligned} \alpha(n+1) &= \\ &= \alpha(n) \left(1 - 0.5 \varepsilon h_\alpha \bar{m}_A \omega \cos(\theta + \theta_1) - \varepsilon h_\alpha \sqrt{a_\alpha/b_\alpha} \right), \\ \omega_x(n+1) &= \omega_x(n) \times \\ &\times \left(1 - \varepsilon h_\omega \bar{m}_x^A \omega^2 \bar{I}_x^{-1} \sin(\theta + \theta_2) - \varepsilon h_\omega \sqrt{a_\omega/b_\omega} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где h_α, h_ω — шаги интегрирования.

Метод Эйлера — это явный метод первого порядка, это означает, что локальная погрешность этого метода имеет порядок $O(h^2)$, а глобальная накопленная погрешность метода имеет порядок $O(h^1)$. Известно, что на погрешность численного метода Эйлера, кроме формулы метода, влияет также величина шага интегрирования h . С уменьшением величины шага h наблюдается увеличение точности метода. При этом интервал времени численного интегрирования также увеличивается. Кроме того, здесь можно применять переменный шаг интегрирования [19].

Учёт управлений в усредненных уравнениях

Запишем уравнение состояния $x(n+1) = Ax(n)$ и уравнение выхода $y(n) = Cx(n)$ в дискретном виде следующим образом [19]:

$$\begin{pmatrix} \alpha(n+1) \\ \omega_x(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{\alpha p} & 0 \\ 0 & -K_{\omega p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(n) \\ \omega_x(n) \end{pmatrix}; \quad (23)$$

$$y(n) = [1 \ 1] [\alpha(n) \ \omega_x(n)]^T, \quad (24)$$

где $x(n)$ — вектор состояния, $x(n) = (\alpha(n) \ \omega_x(n))^T$; $y(n)$ — функция выхода; A — матрица динамики,

$$A = \begin{pmatrix} -K_{\alpha p} & 0 \\ 0 & -K_{\omega p} \end{pmatrix}; \quad C = [1 \ 1];$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Принимая, что $C = [1 \ 1]$, обеспечиваем сходимость $y(n)$ только при сходимости обоих значений $\alpha(n)$ и $\omega_x(n)$.

Применяя метод Z-преобразования для системы уравнений (23) и (24), имеем [19, 20]:

$$\begin{aligned} x(n) &= Z^{-1} \left((zI - A)^{-1} z x_0 \right) = \\ &= \left(\alpha_0 (-K_{\alpha p})^n \quad \omega_{x0} (-K_{\omega p})^n \right)^T; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y(n) &= Z^{-1} \left(C(zI - A)^{-1} z x_0 \right) = \\ &= \alpha_0 (-K_{\alpha p})^n + \omega_{x0} (-K_{\omega p})^n. \end{aligned} \quad (26)$$

Численные результаты

Предположим, что космический аппарат имеет массово-инерционные характеристики, аналогичные массово-инерционным характеристикам спускаемого КА Mars Polar Lander, т.е. он имеет наибольший радиус основания конуса $r = 1,25m$, высоту КА $l = 2m$ и массу КА $m = 576$ кг. Рассматривается спускаемый аппарат, снижающийся в атмосфере Марса (средний радиус $R_0 = 3390$ км). Среднее ускорение силы тяжести равно $g_0 = 3,86$ м/с².

Начальные условия входа КА в атмосферу следующие: скорость центра масс КА составляет $V(0) = 3500$ м/с; высота $H(0) = 100$ км; угол входа $\vartheta(0) = -0,17$ рад; пространственный угол атаки равен амплитуде $a_1(0) = 0,32$ рад; вторая амплитуда равна нулю $a_2(0) = 0$; быстрая фаза равна $\theta(0) = 0,2\pi$ рад; угловая скорость равна $\omega_x(0) = 0,24$ 1/с. Результаты действия управления в исходной и усредненной системах представлены на рис. 2.

Таким образом, по результатам расчётов исходных и усредненных уравнений было установлено, что угол атаки и угловая скорость в соответствии с исходными уравнениями практически сходятся к нулю за интервал времени движения от 0 до 80 с, а усредненная система обеспечивает уменьшение угла атаки и угловой скорости до близких к нулю значений быстрее — через 60 с.

Выводы

Использование метода динамического программирования Беллмана в сочетании с методом усреднения позволило решить задачу оптимизации управления ориентацией космического аппарата при значительной аэродинамической и малой массовой асимметрии при спуске в разреженной атмосфере Марса. В конечном результате были получены новые выражения для приближенных дискретных оптимальных управлений с учетом немалых величин аэродинамической и малой массовой асимметрии. Управление осуществлялось по двум каналам одновременно: по угловой скорости и пространственному углу атаки.

Численные результаты работы подтверждают, что полученные дискретные выражения для оптимального управления обеспечивают уменьше-

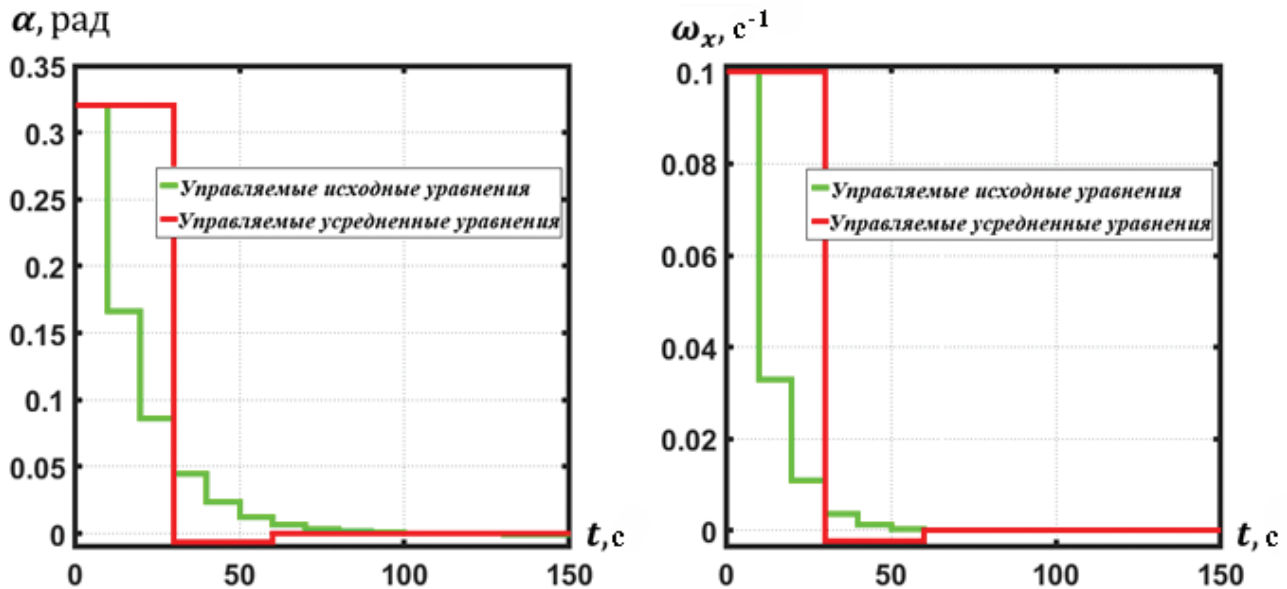


Рис. 2. Стабилизация дискретных величин угла атаки и угловой скорости, при применении следующих значений переменных закона управления: $a_\alpha = 4, b_\alpha = 0.0001, a_\omega = 5, b_\omega = 0.0001$

ние угловой скорости и пространственного угла атаки до требуемых малых значений за время, соизмеримое со временем от начала свободного движения неуправляемого спускаемого космического аппарата до ввода в действие тормозной парашютной системы. Усредненная система уравнений пространственного угла атаки и угловой скорости привносит меньше динамики в численные результаты, которые сходятся к нулю быстрее, чем при использовании исходной системы в случае применения предлагаемых дискретных законов управления.

Практическая значимость полученных дискретных законов двухканального управления подтверждается возможностью использования малых реактивных двигателей, работающих в дискретном режиме.

Список источников

1. Ёлкин К.С., Куцев В.Н., Манько А.С., Михайлов В.М. Расчет входа в атмосферу Марса десантного модуля проекта ЭкзоМарс // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. № 4. С. 79-86.
2. Лашин В.С. Метод оценки параметров асимметрии при проектировании спускаемого космического аппарата // Вестник Московского авиационного института. 2020. Т. 27. № 1. С. 100-107. DOI: 10.34759/vst-2020-1-100-107
3. Kurkina E.V. Acceptable range parameters of asymmetry of spacecraft descending in the Martian atmosphere // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 868.

18th International Conference “Aviation and Cosmonautics” (18–22 November 2019, Moscow, Russia). No. 1, 012036. DOI:10.1088/1757-899X/868/1/012036

4. Соколов Н.Л., Орлов Д.А. Проектно-баллистические исследования проблемы спуска космических аппаратов в атмосфере Марса // Вестник Московского авиационного института. 2016. Т. 23. № 1. С. 98-106.
5. Way D.W., Davis J.L., Shidner J.D. Assessment of the Mars Science Laboratory entry, descent, and landing simulation // Advances in the Astronautical Sciences. 2013. Vol. 148, pp. 563-581.
6. Mars Science Laboratory Curiosity Rover. JPL California Institute of Technology. URL: <https://www.jpl.nasa.gov/missions/mars-science-laboratory-curiosity-rover-msl>
7. Lyubimov V.V. Numerical simulation of the resonance effect at Re-entry of a rigid body with low inertial and aerodynamic asymmetries into the atmosphere // International Conference Information Technology and Nanotechnology (29 June – 01 July 2015; Samara, Russia), pp.198-210. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1490/paper23.pdf>
8. Lyubimov V.V. Dynamics and Control of Angular Acceleration of a Re-Entry Spacecraft with a Small Asymmetry in the Atmosphere in the Presence of the Secondary Resonance Effect // International Siberian Conference on Control and Communications (21–23 May 2015; Omsk, Russia). DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147134
9. Bakry I., Lyubimov V.V. Application of the dynamic programming method to ensure of dual-channel attitude control of an asymmetric spacecraft in a

- rarefied atmosphere of Mars // *Aerospace Science Journal*. 2021. DOI: 10.1007/s42401-021-00112-y
10. Robotic exploration of Mars. European Space Agency. URL: <http://exploration.esa.int/mars>
 11. Schiaparelli: the exomars entry, descent and landing demonstrator module. European Space Agency. URL: <http://exploration.esa.int/mars/47852-entry-descent-and-landing-demonstrator-module>
 12. List of interplanetary spacecrafts about the Mars system. Planetary society. URL: <https://www.planetary.org/space-missions/every-mars-mission>
 13. Mars Polar lander. National Aeronautics and Space Administration, 1998, 65 p. URL: https://mars.nasa.gov/internal_resources/818/
 14. Bellman R.E. *Dynamic programming*. — Princeton: Princeton University, 2010. — 392 p.
 15. Sanders D.A., Verhulst F., Murdock D. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems: Monograph*. — New York: Springer, 2007. — 450 p.
 16. Заболотнов Ю.М. Асимптотический анализ квазилинейных уравнений движения в атмосфере космического корабля с малой асимметрией III // *Космические исследования*. 1994. Т. 32. № 4-5. С. 112–125.
 17. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. — М.: Машиностроение, 1978. — 168 с.
 18. Freidlin M., Wentzell A. Some Recent Results on Averaging Principle // In: Chow P.L., Yin G., Mordukhovich B. (eds) *Topics in Stochastic Analysis and Nonparametric Estimation. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, vol 145, pp 1-19. — Springer, New York. DOI: 10.1007/978-0-387-75111-5_1
 19. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : Учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 2001. — 445 с.
 20. Atkinson K., Han W., Stewart D.S. *Numerical solution of ordinary differential equations*. — New Jersey: John Wiley & Sons publication, 2009. — 272 p.
 21. Lopez L., Mastroserio C., Politi T. Variable step-size techniques in continuous Runge-Kutta methods for isospectral dynamical systems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1997. Vol. 82. No. 1-2, pp. 261-278. DOI: 10.1016/S0377-0427(97)00048-4

References

1. Elkin K.S., Kushchev V.N., Manko A.S., Mikhailov V.M. Mars entry calculation for descent module of ExoMars project. *Aerospace MAI Journal*, 2014, vol. 21, no. 4, pp. 79-86.
2. Lashin V.S. Asymmetry parameters assessment technique while descent spacecraft design. *Aerospace MAI Journal*, 2020, vol. 27, no. 1, pp. 100-107. DOI: 10.34759/vst-2020-1-100-107
3. Kurkina E.V. Acceptable range parameters of asymmetry of spacecraft descending in the Martian atmosphere. *18th International Conference "Aviation and Cosmonautics" (18-22 November 2019, Moscow, Russia)*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, vol. 868, no. 1, 012036. DOI:10.1088/1757-899X/868/1/012036
4. Sokolov N.L., Orlov D.A. Design-ballistic studies of the problem of a spacecraft descent in Mars atmosphere. *Aerospace MAI Journal*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 98-106.
5. Way D.W., Davis J.L., Shidner J.D. Assessment of the Mars Science Laboratory entry, descent, and landing simulation. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2013, vol. 148, pp. 563-581.
6. *Mars Science Laboratory Curiosity Rover*. JPL California Institute of Technology. URL: <https://www.jpl.nasa.gov/missions/mars-science-laboratory-curiosity-rover-msl>
7. Lyubimov V.V. Numerical simulation of the resonance effect at Re-entry of a rigid body with low inertial and aerodynamic asymmetries into the atmosphere. *International Conference Information Technology and Nanotechnology (29 June – 01 July 2015; Samara, Russia)*, pp. 198-210. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1490/paper23.pdf>
8. Lyubimov V.V. Dynamics and Control of Angular Acceleration of a Re-Entry Spacecraft with a Small Asymmetry in the Atmosphere in the Presence of the Secondary Resonance Effect. *International Siberian Conference on Control and Communications (21–23 May 2015; Omsk, Russia)*. DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147134
9. Bakry I., Lyubimov V.V. Application of the dynamic programming method to ensure of dual-channel attitude control of an asymmetric spacecraft in a rarefied atmosphere of Mars. *Aerospace Science Journal*, 2021. DOI: 10.1007/s42401-021-00112-y
10. Robotic exploration of Mars, European Space Agency. URL: <http://exploration.esa.int/mars>
11. Schiaparelli: the exomars entry, descent and landing demonstrator module, European Space Agency. URL: <http://exploration.esa.int/mars/47852-entry-descent-and-landing-demonstrator-module>
12. List of interplanetary spacecraft about the Mars system, Planetary society. URL: <https://www.planetary.org/space-missions/every-mars-mission>
13. Mars Polar lander, National Aeronautics and Space Administration, 1998, 65 p. URL: https://mars.nasa.gov/internal_resources/818/
14. Bellman R.E. *Dynamic programming*. Princeton, Princeton University, 2010, 392 p.
15. Sanders D.A., Verhulst F., Murdock D. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Monograph. New York, Springer, 2007, 450 p.

16. Zabolotnov Yu.M. *Kosmicheskie issledovaniya*, 1994, vol. 32, no. 4-5, pp. 112–125.
17. Yaroshevskii V.A. *Dvizhenie neupravlyaemogo tela v atmosphere* (Motion of an uncontrolled body in the atmosphere), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 168 p.
18. Freidlin M., Wentzell A. Some Recent Results on Averaging Principle. In: Chow P.L., Yin G., Mordukhovich B. (eds) *Topics in Stochastic Analysis and Nonparametric Estimation*. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol. 145, pp. 1-19. Springer, New York. DOI: 10.1007/978-0-387-75111-5_1
19. Panteleev A.V., Yakimova A.S. *Teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo i operatsionnoe ischislenie v primerakh i zadachakh* (Complex variable theory and operational calculus in examples and problems), Moscow, Vysshaya shkola, 2001, 445 p.
20. Atkinson K., Han W., Stewart D.S. *Numerical solution of ordinary differential equations*. New Jersey, John Wiley & Sons publication, 2009, 272 p.
21. Lopez L., Mastroserio C., Politi T. Variable step-size techniques in continuous Runge-Kutta methods for isospectral dynamical systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1997, vol. 82, no. 1-2, pp. 261-278. DOI: 10.1016/S0377-0427(97)00048-4

Статья поступила в редакцию 03.02.2022; одобрена после рецензирования 16.03.2022; принята к публикации 08.04.2022.

The article was submitted on 03.02.2022; approved after reviewing on 16.03.2022; accepted for publication on 08.04.2022.