УДК 621.396.6



# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОДХОДА В ОБРАБОТКЕ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

САМОЙЛЕНКО Марина Витальевна, доцент Московского авиационного института (государственного технического университета), к.т.н.
Тел. 8-903-511-84-52

SAMOILENKO Marina V., associated professor, candidate of science, docent.
Tel. 8-903-511-84-52

*В статье изложены математические составляющие нового, томографического подхода к обработке многоканальных сигналов: постановка задачи многоканальной томографии и математические методы ее решения. Приведены ссылки на публикации уже разработанных в рамках этого подхода новых методов решения ряда задач, возникающих в области радиолокации.*

*Mathematics of the new, tomography, approach to multichannel signals processing is given in the article: the multichannel tomography problem mathematical formulation and its solution methods. It also contains references to the publications of new solution methods of a number of problems in the sphere of radiolocation received with the help of the suggested approach.*

**Ключевые слова:** томография, многоканальные системы, восстановление, оценивание, винеровская фильтрация, псевдообратная матрица, сингулярное разложение.

**Key words:** tomography, multichannel systems, restoration, estimation,viner Wiener filtration, coninverse matrix, singular value decomposition.

## Введение

Идея применения томографического подхода в обработке многоканальных сигналов принадлежит доктору технических наук, профессору В.И. Самойленко и в настоящее время развивается автором. Томографический подход уже позволил получить весьма полезные результаты: метод определения пространственной корреляционной матрицы принимаемого локационного сигнала по измеренной мощности на выходе приемной фазированной антенной решетки (ФАР) [1], новый метод борьбы с отражениями от местных объектов [2], обладающий рядом преимуществ по сравнению с известными, метод решения фазовой проблемы восстановления амплитудно-фазового распределения(АФР) поля принимаемого сигнала на апертуре ФАР по измеренной мощности [3, 4] и другие методы эффективного решения задач в области радиолокации.

В статье излагаются некоторые составляющие математического аппарата, лежащего в основе применения томографического подхода к обработке многоканальных сигналов. Будем в дальнейшем совокупность математического аппарата, методов, алгоритмов и технических средств реализации томографического подхода в обработке многоканальных сигналов называть *многоканальной томографией*.

## 1. Постановка задачи многоканальной томографии

Математической задачей томографии является восстановление подынтегральной функции по множеству значений ее интегралов, полученных при различающихся путях интегрирования, т. е. ставится задача восстановить функцию $F(\rho)$ по множеству значений интегралов вида

$$g = \int_L F(\rho)\, d\rho, \tag{1}$$

где $\rho$ — вектор координат; $L$ — путь интегрирования, который должен по крайней мере охватывать, а еще лучше — перекрывать зону ответственности $\Gamma_\rho$, на которой определяется функция $F(\rho)$.

В томографии совокупность интегралов (1), полученных при различающихся путях интегрирования, называется *томографической проекцией* или *отображением* оригинала, которым является искомая функция $F(\rho)$. Сами интегралы (1) будем называть *элементами отображения*. Задача томографии заключается в восстановлении функции-оригинала по ее отображению.

В приложении к многоканальным системам будем полагать, что функция $F(\rho)$ является не собственно искомым оригиналом, а связанной с ним функцией

$$F(\rho) = f(\rho)w(\rho), \tag{2}$$

где $f(\rho)$ — искомый оригинал, который математически описывает искомое физическое распределение (поле сигнала, например); $w(\rho)$ — некоторая весовая функция, математически описывающая воздействие отображающей системы на искомое распределение.

Подставив (2) в (1), получим интеграл вида

$$g = \int_L f(\rho)\,w(\rho)\,d\rho. \tag{3}$$

Искомой величиной в (3) является функция-оригинал $f(\rho)$, которую будем искать, в соответствии с томографическим подходом, по ее отображению. Однако при получении отображения, состоящего из множества значений интегралов вида (3), будем говорить не об изменяющихся путях интегрирования, как это имеет место в классической томографии, а об изменяющихся условиях интегрирования, полагая, что последние включают как путь интегрирования $L$, так и весовую функцию $w(\rho)$.

Для математического моделирования многоканальности разобьем зону ответственности $\Gamma_\rho$ на элементы дискретизации и будем полагать весовую функцию в каждом элементе дискретизации постоянной и равной

$$w_k = \int_{\Omega_k} w(\rho)\,d\rho, \tag{4}$$

где $k$ — номер; $\Omega_k$ — область элемента дискретизации.

Физически под элементами дискретизации будем понимать каналы отображающей системы, а под весовыми коэффициентами (4) — параметры каналов с учетом пути интегрирования.

Подставив (4) в (3), получим модель элементов отображения в виде

$$g = \sum_k w_k \int_L f(\rho)\,d\rho. \tag{5}$$

Выражение (5) является математической моделью непрерывно-дискретного отображения функции-оригинала $f(\rho)$ многоканальной системой. Весовые коэффициенты $w_k$ определяются условиями интегрирования, включающими параметры каналов и путь интегрирования.

Перейдем к дискретно-дискретной модели отображения. Будем полагать элементы дискретизации достаточно малыми относительно изменения функции-оригинала $f(\rho)$, так что в каждом элементе дискретизации эту функцию можно считать неизменной и равной $f_k$, где $k$ — номер элемента дискретизации:

$$f_k = \int_{\Omega_k} f(\rho)\,d\rho. \tag{6}$$

Подставив (6) в (5), получим элементы отображения в форме интегральной суммы

$$g = \sum_k w_k f_k. \tag{7}$$

Здесь $f_k$ — $k$-е значение дискретизированной искомой функции-оригинала $f(\rho)$; $w_k$ — весовой коэффициент при этом значении, который определяется путем интегрирования и параметрами каналов многоканальной системы отображения.

Объединим весовые коэффициенты $w_k$ в весовой вектор

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

а дискретные значения функции-оригинала — в вектор-оригинал

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

где $n$ — число элементов дискретизации в зоне ответственности $\Gamma_\rho$; индекс Т обозначает транспонирование.

Используя введенные обозначения (8) и (9), перепишем (7) в виде

$$g = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} = \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}. \tag{10}$$

Сформируем отображение вектора-оригинала, которое состоит из множества элементов отображения (10), полученных при различающихся условиях интегрирования. Согласно вышеизложенной математической модели, изменение условий интегрирования моделируется изменением весового вектора (8). Таким образом, отображение запишется как совокупность $m$ элементов отображения:

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathbf{w}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{f}; \\ g_2 &= \mathbf{w}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{f}; \\ &\ldots \\ g_m &= \mathbf{w}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{f}. \end{aligned} \tag{11}$$

Объединим элементы отображения в вектор-отображение

$$\mathbf{g} = \left[ g_1 \;\; g_2 \;\; \dots g_m \right]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

и запишем векторно-матричное уравнение отображения

$$\mathbf{g} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \mathbf{f}, \tag{13}$$

где $\mathbf{W}^T = \left[ \mathbf{w}_1 \;\; \mathbf{w}_2 \;\; \dots \;\; \mathbf{w}_m \right]^{\mathrm{T}}$ — матрица отображения размером $m \times n$, объединяющая $m$ различающихся весовых векторов (8).

Задачей многоканальной томографии является восстановление вектора-оригинала (9) по его отображению (13). При этом матрица отображения $\mathbf{W}^T$, определяемая условиями отображения, известна, так же как в классической томографии известны пути интегрирования функции-оригинала.

Уравнение (13) определяет детерминированную постановку задачи. При необходимости учитывать ошибки отображения задача принимает стохастический характер и описывается уравнением отображения вида

$$\mathbf{g} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \mathbf{f} + \mathbf{n}, \tag{14}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор ошибок отображения.

Далее излагаются математические методы решения задачи многоканальной томографии — восстановления вектора-оригинала по его отображению, во многом основанные на математическом аппарате, предложенном в [5].

## 2. Метод винеровского оценивания

Метод оценивания применяется при стохастической постановке задачи многоканальной томографии (14), когда в отображении присутствует случайная составляющая — вектор $\mathbf{n}$.

При винеровском оценивании восстанавливаемый оригинал будем искать в классе линейных оценок в виде

$$\widehat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \mathbf{f} + \mathbf{H}\mathbf{n}, \tag{15}$$

где $\mathbf{H}$ — неизвестная матрица восстановления размером $n \times m$.

Задача винеровского оценивания сводится к нахождению матрицы восстановления $\mathbf{H}$. Искать ее будем в соответствии с критерием минимума среднеквадратической ошибки восстановления, которая определяется выражением

$$\eta = \overline{(\mathbf{f} - \widehat{\mathbf{f}})^{\mathbf{T}} (\mathbf{f} - \widehat{\mathbf{f}})}, \tag{16}$$

где верхняя черта означает усреднение.

Подставим (15) в (16) и проделаем необходимые преобразования, полагая ошибки отображения статистически не зависящими от вектора-оригинала $\overline{\mathbf{n}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}} = 0$. В результате получим

$$\eta = \overline{\mathbf{f}^{\mathbf{T}} (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{W}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} (\mathbf{I} - \mathbf{H}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}) \mathbf{f}} + \overline{\mathbf{n}^{\mathbf{T}} \mathbf{H}^{\mathbf{T}} \mathbf{H} \mathbf{n}}. \tag{17}$$

Будем искать матрицу восстановления, минимизирующую критерий (17). Для этого найдем градиент по матрице $\mathbf{H}$ среднеквадратической ошибки (17)

$$\nabla_{\mathbf{H}} \eta = \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \eta}{\partial h_{11}} & \dfrac{\partial \eta}{\partial h_{12}} & \dots \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial h_{21}} & \dfrac{\partial \eta}{\partial h_{22}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Матрица (18) имеет размер $n \times m$ и, в соответствии с (17), определяется выражением

$$\nabla_{\mathbf{H}} \eta = -2\overline{\mathbf{f}\,\mathbf{f}^{\mathbf{T}}}\mathbf{W} + 2\mathbf{H}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\overline{\mathbf{f}\,\mathbf{f}^{\mathbf{T}}}\mathbf{W} + 2\mathbf{H}\overline{\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathbf{T}}} =$$

$$= -2\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W} + 2\mathbf{H}(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W} + \mathbf{R}_{\mathbf{nn}}), \tag{19}$$

где $\mathbf{R}_{\mathbf{f}\,\mathbf{f}} = \overline{\mathbf{f}\,\mathbf{f}^{\mathbf{T}}}$ — корреляционная матрица вектора-оригинала; $\mathbf{R}_{\mathbf{nn}} = \overline{\mathbf{n}\,\mathbf{n}^{\mathbf{T}}}$ — корреляционная матрица ошибок отображения.

Минимуму среднеквадратической ошибки отображения соответствует значение $\nabla_{\mathbf{H}} \eta = \mathbf{0}$:

$$-2\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W} + 2\mathbf{H}(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W} + \mathbf{R}_{\mathbf{nn}}) = \mathbf{0},$$

откуда найдем

$$\mathbf{H}_{\mathbf{opt}} = \mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W}(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W} + \mathbf{R}_{\mathbf{nn}})^{-1}. \tag{20}$$

Полученная матрица восстановления оптимальна в том смысле, что при подстановке ее в (15) получится оптимальная оценка вектора-оригинала, имеющая минимальное среднеквадратическое отклонение от истинного значения вектора $\mathbf{f}$.

Из (20) видно, что для оптимального восстановления вектора-оригинала необходимо знать вероятностные характеристики этого вектора и ошибок его отображения в форме соответствующих корреляционных матриц $\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}$ и $\mathbf{R}_{\mathbf{nn}}$. Если же такой информации нет или она не полная, то выражение (20) примет другой вид. Рассмотрим такие частные случаи.

а) Если отсутствует информация о корреляционной матрице вектора-оригинала $\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}$, то будем предполагать компоненты этого вектора $\delta$-коррелированными с известной и одинаковой для всех компонент дисперсией $\sigma_f^2$. Тогда $\mathbf{R_{ff}} = \sigma_f^2 \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица и

$$\mathbf{H_{opt}} = \mathbf{W}(\mathbf{W^T W} + \sigma_f^{-2}\mathbf{R_{nn}})^{-1}. \qquad (21)$$

б) Если ошибки отображения пренебрежимо малы, то полагаем $\mathbf{R_{nn}} = \mathbf{0}$. Однако прямая подстановка этого значения в (20) может оказаться некорректной. Действительно, обратные матрицы, входящие в (20) и (21), заведомо существуют вследствие обратимости матрицы $\mathbf{R_{nn}}$, которая является матрицей полного ранга ($\mathrm{rank}\mathbf{R_{nn}} = m$) из-за стохастического характера компонент вектора ошибок $\mathbf{n}$. Если же в выражение (20) подставить $\mathbf{R_{nn}} = \mathbf{0}$, то оставшаяся в скобках матрица может оказаться не обратимой. В этом случае решающим фактором для определения матрицы восстановления является характер отображения.

Если отображение вырожденное, т. е. dim $\mathbf{g}$ < < dim $\mathbf{f}$ или, что то же, $m < n$, то матрица $\mathbf{W^T R_{ff} W} \cdot\rangle \mathbf{0}$, где знак $\cdot\rangle$ означает положительную определенность матрицы. Следствием этого является существование ее обратной матрицы. В этом случае, подставив в (20) $\mathbf{R_{nn}} = \mathbf{0}$, получим

$$\mathbf{H_{opt}} = \mathbf{R_{ff} W}(\mathbf{W^T R_{ff} W})^{-1}. \qquad (22)$$

Восстановленный оригинал при этом будет определяться выражением, которое получается при подстановке (22) в (15):

$$\mathbf{f} = \mathbf{H_{opt} g} = \mathbf{R_{ff} W}(\mathbf{W^T R_{ff} W})^{-1}\mathbf{W^T f} + \mathbf{H_{opt} n} =$$
$$= \mathbf{R_{ff} W W^{-1} R_{ff}^{-1}}(\mathbf{W^T})^{-1}\mathbf{W^T f} + \mathbf{H_{opt} n} = \mathbf{f} + \mathbf{H_{opt} n}. \qquad (23)$$

Таким образом, матрица восстановления (22) обеспечивает теоретически точное восстановление оригинала при отсутствии ошибок отображения. При ненулевых ошибках отображения ошибка восстановления определяется вектором $\mathbf{H_{opt} n}$.

в) Рассмотрим случай, когда ошибки отображения пренебрежимо малы ($\mathbf{R_{nn}} = \mathbf{0}$) и отображение невырожденное: dim $\mathbf{g}$ $\geq$ dim $\mathbf{f}$, $m \geq n$.

В этом случае матрица $\mathbf{W^T R_{ff} W}$ размера $m \times n$ имеет rank ($\mathbf{W^T R_{ff} W}$) $\leq m$ и может быть не обратимой. Поэтому вместо обращения матрицы используем операцию псевдообращения, которая обеспечивает не точное решение, но решение с минимальным среднеквадратическим отклонением:

$$\mathbf{H_{opt}} = \mathbf{R_{ff} W}(\mathbf{W^T R_{ff} W})^{+}, \qquad (24)$$

где индекс + обозначает операцию псевдообращения матрицы.

Выражение (24) можно существенно упростить. Для этого учтем, что корреляционная матрица $\mathbf{R_{ff}}$ является симметрической и положительно определенной:

$$\mathbf{R_{ff}} = \mathbf{R_{ff}^T} \cdot\rangle \mathbf{0}. \qquad (25)$$

Из этого следует, что она может быть представлена разложением

$$\mathbf{R_{ff}} = \mathbf{U \Lambda U^T}. \qquad (26)$$

Здесь $\Lambda$ — диагональная матрица собственных значений матрицы $\mathbf{R_{ff}}$, причем все собственные значения $\lambda_i > 0$ вследствие соотношения (25); $\mathbf{U}$ — ортогональная матрица собственных векторов:

$$\mathbf{U^T U} = \mathbf{I}. \qquad (27)$$

Вследствие положительности собственных значений корреляционной матрицы $\mathbf{R_{ff}}$ будет верно равенство

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots \end{bmatrix} = \Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}. \qquad (28)$$

Подставим (28) и (27) в (26) и преобразуем полученное выражение:

$$\mathbf{R_{ff}} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\Lambda^{1/2}\mathbf{U^T} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{U^T U}\Lambda^{1/2}\mathbf{U^T} = \mathbf{R_{ff}^{1/2} R_{ff}^{1/2}}, \qquad (29)$$

где $\mathbf{R_{ff}^{1/2}} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{U^T}$.

Докажем, что для произвольной матрицы $\mathbf{A}$ размером $m \times n$, $m > n$ с линейно независимыми столбцами верно соотношение

$$(\mathbf{AA^T})^{+} = \mathbf{A}(\mathbf{A^T A})^{-2}\mathbf{A^T}. \qquad (30)$$

Согласно [6]

$$(\mathbf{AA^T})^{+} = (\mathbf{A^T})^{+}\mathbf{A}^{+}. \qquad (31)$$

Здесь $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ — матрица с линейно независимыми строками, для которой, согласно [5], верно соотношение

$$(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})^{+} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}, \tag{32}$$

а для матрицы $\mathbf{A}$ с линейно независимыми столбцами верно соотношение

$$\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}. \tag{33}$$

Подставив правые части (32) и (33) в (31), получим соотношение (30).

Вернемся к выражению (24). Подставим в него (29) и приведем к виду

$$\mathbf{H}_{\mathbf{opt}} = \mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2})^{\mathbf{T}}\left[(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2})(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2})^{\mathbf{T}}\right]^{+}, \tag{34}$$

где матрица $\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}$ имеет размер $m \times n$, $m < n$.

Таким образом, правая часть (34) содержит псевдооращение матричного выражения, аналогичного (30). Преобразуем выражение (34) по принципу равенства (30) и проделаем дальнейшие его преобразования:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\mathbf{opt}} &= \mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2})^{\mathbf{T}}(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2})\times \\
&\times\left[(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2})^{\mathbf{T}}(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2})\right]^{-2}(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2})^{\mathbf{T}} = \\
&= \mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}\left[\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}\right]^{-1}\times \\
&\times\left[\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}\right]^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}\mathbf{W} = \mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{-1/2}\times \\
&\times\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{-1/2}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{-1/2}\left(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{-1/2}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{1/2}\mathbf{W} = \\
&= \left(\mathbf{W}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}\mathbf{W} = \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Последнее равенство в (35) написано на основании соотношения (33) для матрицы $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$ с линейно независимыми столбцами.

Таким образом, при невырожденном отображении с нулевыми помехами матрица восстановления оказывается равной псевдообратной матрице отображения. Соответственно, восстановленный вектор-оригинал определяется подстановкой (35) в (15):

$$\hat{\mathbf{f}} = \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}\mathbf{g} = \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{f} + \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}\mathbf{n}. \tag{36}$$

В частном случае, при $m = n$, $\left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+} = \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}$ и в отсутствие ошибок отображения вектор-оригинал восстанавливается точно.

Рассмотренные методы восстановления основаны на винеровском оценивании при той или иной априорной информации о вероятностных характеристиках оцениваемого оригинала и ошибок отображения. В отсутствие такой информации используем методы линейной алгебры.

### 3. Метод псевдообращения

Этот метод будем применять для решения детерминированной задачи многоканальной томографии или при отсутствии каких-либо статистических данных о векторе-оригинале и об ошибках восстановления. В обоих случаях решение будем искать, основываясь на неоднородном векторно-матричном уравнении отображения (13)

$$\mathbf{g} = \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{f}$$

относительно вектора-оригинала $\mathbf{f}$. При этом полагаем матрицу отображения $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$ и вектор-отображение $\mathbf{g}$ известными.

Условием существования точного решения уравнения (13) согласно [5] является выполнение равенства

$$\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}\mathbf{g} = \mathbf{g}. \tag{37}$$

Выполнение равенства (37) означает совместность системы уравнений (11), которая в векторно-матричной форме имеет вид уравнения (13). В этом случае существует точное решение уравнения (13) — единственное или бесчисленное множество. Если же равенство (37) не выполняется, то точного решения не существует.

Важным фактором при решении уравнения (13) являются свойства матрицы отображения $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$. Анализ всех возможных ситуаций с размером и рангом матрицы отображения позволяет сделать следующие выводы.

Если при выполнении условия (37) $\mathrm{rank}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} < \dim \mathbf{f}$, то существует бесчисленное множество решений уравнения (13), которые определяются выражением

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}\mathbf{g} + \left[\mathbf{I} - \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right]\mathbf{z}, \tag{38}$$

где $\mathbf{z}$ — произвольный вектор, $\dim \mathbf{z} = n$.

В бесчисленном множестве решений (38) существует одно решение, обладающее минимальной нормой. Это решение получается при $\mathbf{z} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}\mathbf{g}. \tag{39}$$

Если при выполнении условия (37) rank $\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = \dim \mathbf{f} = n$, то имеется единственное решение, определяемое выражением (39). Если при этом $m = n$, то $\left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+} = \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{-1}$ и единственное решение определяется выражением

$$\mathbf{f} = \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{-1} \mathbf{g}. \tag{40}$$

В случае невыполнения условия (37) система уравнений (11) несовместна и точного решения уравнения (13) не существует. Однако существует приближенное решение $\widehat{\mathbf{f}}$, минимизирующее квадратичную норму рассогласования $\left\|\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\widehat{\mathbf{f}} - \mathbf{g}\right\|^2$.

Это решение определяется выражением

$$\widehat{\mathbf{f}} = \left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+} \mathbf{g}. \tag{41}$$

Таким образом, решение уравнения (13) всегда можно находить методом псевдообращения по формуле (41). В зависимости от свойств матрицы отображения, это будет либо единственное точное решение, либо решение с минимальной нормой из бесчисленного множества решений, либо приближенное решение с минимальным рассогласованием.

## 4. Метод сингулярного разложения

Метод сингулярного разложения ориентирован на решение уравнения (13) методом псевдообращения. При этом псевдобратную матрицу будем находить, используя сингулярное разложение матрицы отображения, основываясь на следующем свойстве матриц [7].

Любая матрица $\mathbf{A}$ размером $m \times n$ ранга $k$ может быть представлена в форме сингулярного разложения:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathbf{T}}, \tag{42}$$

где $\mathbf{U}$ — ортогональная матрица размером $m \times m$; $\mathbf{V}$ — ортогональная матрица размером $n \times n$. Матрица $\mathbf{\Sigma}$ такова, что ее элементы $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{12} \geq \ldots \geq \sigma_{kk} > \sigma_{k+1,k+1} = \ldots = \sigma_{qq} = 0,$$

где $q = \min\{m, n\}$, $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}, \ldots,$ $\sigma_{kk}$ — сингулярные числа матрицы $\mathbf{A}$. При этом $\sigma_{ii} = \lambda_i^{1/2}$, где $\lambda_i$ — собственные значения матрицы $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$. Столбцы матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ образованы, соответственно, левыми и правыми сингулярными векторами матрицы $\mathbf{A}$.

Применим сингулярное разложение к матрице отображения $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{W}^{\mathbf{T}} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathbf{T}}, \tag{43}$$

где

$$\mathbf{U} = \left[\mathbf{u_1} \;\; \mathbf{u_2} \;\; \ldots \;\; \mathbf{u_m}\right], \mathbf{V} = \left[\mathbf{v_1} \;\; \mathbf{v_2} \;\; \ldots \;\; \mathbf{v_n}\right] \tag{44}$$

— матрицы соответственно левых и правых собственных векторов матрицы отображения.

Структура матрицы сингулярных значений $\mathbf{\Sigma}$ зависит от размера матрицы отображения. Рассмотрим два возможных варианта.

а) Если число строк матрицы $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$ больше числа столбцов, т. е. $m > n$, то матрица сингулярных значений имеет размер $m \times n$ и структуру

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & & & & & \\ & \ddots & & & [0] & \\ & & \lambda_k^{1/2} & & & \\ & & & 0 & & \\ & [0] & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ \hline & & & [0] & & \end{bmatrix}, \tag{45}$$

где $k = \operatorname{rank} \mathbf{W}^{\mathrm{T}}$, а все $\lambda_i > 0$, так как являются собственными значениями симметрической матрицы $\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{W}$.

Найдем теперь псевдообратную матрицу отображения, используя сингулярное разложение (43) и выполнив некоторые преобразования:

$$\left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+} = \left(\mathbf{U\Sigma V}^{\mathbf{T}}\right)^{+} = \left(\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right)^{+} \mathbf{\Sigma}^{+}\mathbf{U}^{+} = \mathbf{V\Sigma}^{+}\mathbf{U}^{\mathbf{T}}. \tag{46}$$

При выводе (46) учтены свойства ортогональных матриц

$$\mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{U} = \mathbf{I}, \;\; \mathbf{VV}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$$

и соотношения для псевдообратных матриц

$$\mathbf{UU}^{+}\mathbf{U} = \mathbf{U}, \;\; \mathbf{V}^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right)^{+}\mathbf{V}^{\mathbf{T}} = \mathbf{V}^{\mathbf{T}},$$

которые позволяют сделать вывод о том, что для ортогональных матриц

$$\mathbf{U}^{+} = \mathbf{U}^{\mathbf{T}}, \;\; \left(\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\right)^{+} = \mathbf{V}.$$

Из структуры матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$ (45) следует, что

$$\boldsymbol{\Sigma}^{+}=\begin{bmatrix} \lambda_1^{-1/2} & & & \vdots & \\ & \ddots & [0] & \vdots & \\ & & \lambda_k^{-1/2} & \vdots & [0] \\ & & 0 & \vdots & \\ [0] & & \ddots & \vdots & \\ & & & 0 \vdots & \end{bmatrix}. \qquad (47)$$

С учетом структуры матриц (44) и (47), перепишем (46) в виде суммы

$$\left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1/2}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^{\mathbf{T}}. \qquad (48)$$

Далее будет показано, как полученное выражение позволяет реализовать рекурсивный алгоритм восстановления вектора-оригинала.

б) Если число строк матрицы отображения меньше числа столбцов ($m < n$), что соответствует вырожденному отображению, то матрица сингулярных значений имеет размер $m \times n$ и структуру

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix} \lambda_1^{1/2} & & & \vdots & \\ & \ddots & [0] & \vdots & \\ & & \lambda_k^{1/2} & \vdots & [0] \\ & & 0 & \vdots & \\ [0] & & \ddots & \vdots & \\ & & & 0 \vdots & \end{bmatrix}. \qquad (49)$$

Соответственно, структура псевдообратной матрицы имеет вид

$$\boldsymbol{\Sigma}^{+}=\begin{bmatrix} \lambda_1^{-1/2} & & & & \\ & \ddots & [0] & & \\ & & \lambda_k^{-1/2} & & \\ & & & 0 & \\ & [0] & & \ddots & \\ & & & & 0 \\ \hline & & [0] & & \end{bmatrix}. \qquad (50)$$

Подстановка (50) и (44) в (46) дает выражение для псевдообратной матрицы

$$\left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^{-1/2}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^{\mathbf{T}}. \qquad (51)$$

Для обоих рассмотренных случаев решения (48) и (51) объединим следующим образом:

$$\left(\mathbf{W}^{\mathbf{T}}\right)^{+}=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i^{-1/2}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^{\mathbf{T}},\ q=\min\{m,n\}. \qquad (52)$$

Полученную методом сингулярного разложения матрицу (52) подставим в уравнение восстановления вектора-оригинала методом псевдообращения (41) и получим уравнение восстановления вида

$$\widehat{\mathbf{f}}=\left(\sum_{i=1}^{q}\lambda_i^{-1/2}\mathbf{v}_i\mathbf{u}_i^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{g},$$

которое позволяет реализовать рекурсивный алгоритм восстановления:

$$\widehat{\mathbf{f}}_{\nu}=\widehat{\mathbf{f}}_{\nu-1}+\lambda_{\nu}^{-1/2}\mathbf{v}_{\nu}\left(\mathbf{u}_{\nu}^{\mathbf{T}}\mathbf{g}\right). \qquad (53)$$

Заметим, что при рекурсивном восстановлении сингулярные значения и сингулярные векторы матрицы отображения $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}$ должны быть определены заранее, до проведения вычислений.

## Выводы

Приведенный в статье математический аппарат постановки и решения задачи многоканальной томографии не является, конечно, исчерпывающим, однако дает возможность приводить постановку целого ряда задач, возникающих, например, в радиолокации, к задаче многоканальной томографии и определяет методы их решения. Это уже дало возможность разработать не только более эффективные методы решения ряда задач, но и получить принципиально новые решения таких задач, как, например, фазовая проблема. Некоторые новые методы опубликованы в работах [1—4], указанных в библиографическом списке.

Приведенные в статье математические методы решения задачи многоканальной томографии демонстрируют достаточно широкую вариабельность предложенного подхода: они позволяют по-разному, с наибольшей эффективностью подходить к решению конкретных задач с учетом имеющейся априорной информации и характера отображения оригинала в постановке задачи многоканальной томографии. Так, при наличии информации о вероятностных характеристиках ошибок отображения и вектора-оригинала целесообразно применять различные вариации винеровского оценивания, при пренебрежимо малых ошибках отображения — метод псевдообращения. Наконец, метод сингулярного разложения позволяет реальзовать рекурсивный алгоритм восстановления оригинала по отображению.

Заметим, что все предложенные методы основаны на математической обработке отображения и, как следствие, ориентированы на цифровую обработку данных. Это позволяет получить восстановленный оригинал сразу в цифровой форме, что открывает широкие возможности для его дальнейшей обработки с целью решения различных прикладных задач.

**Библиографический список**

1. *Самойленко В.И.* Оценивание корреляционной матрицы сигналов по измеренной мощности // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 1991. № 2.

2. *Самойленко В.И.* Томографические методы борьбы с отражениями от местных объектов // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 1992. № 11.

3. *Самойленко М.В.* Способ определения амплитудно-фазового распределения поля принимаемого сигнала в раскрыве фазированной антенной решетки. Патент № 2366968, Б.И. № 25, 10.09.2009.

4. *Самойленко М.В.* Восстановление амплитудно-фазового распределения поля принимаемого сигнала в раскрыве фазированной антенной решетки по измеренной мощности // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54. № 9.

5. *Самойленко В.И., Пузырев В.А., Грубрин И.В.* Техническая кибернетика: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1994.

6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — 4-е изд. — М.: Наука, 1988.

7. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989.