

Труды МАИ. 2022. № 123
Trudy MAI, 2022, no. 123

Научная статья
УДК 539.3
DOI: [10.34759/trd-2022-123-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-05)

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ «ПОЛУПРОСТРАНСТВО-МЕМБРАНА»

Елена Юрьевна Михайлова^{1✉}, Григорий Валерьевич Федотенков²

^{1,2}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия

²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

¹mihe16@yandex.ru✉

²greghome@mail.ru

Аннотация. Исследуется напряженно-деформированное состояние системы «полупространство-мембрана» под действием нестационарной нагрузки. Разрешающее уравнение, базирующееся на принципе суперпозиции, вытекает из условий свободного проскальзывания между мембраной и упругим полупространством. Для решения задачи используется численно-аналитический алгоритм, основанный на методе квадратур. Найдены контактные напряжения, возникающие между мембраной и полупространством, а также нормальные перемещения поверхности системы в зависимости от времени и координаты. Проведен параметрический анализ результатов решения.

Результаты решения могут найти применение в различных отраслях промышленности, где используются покрытия для защиты поверхностей от нестационарных механических воздействий.

Ключевые слова: нестационарные контактные задачи, упругое полупространство, мембрана, нестационарная нагрузка, сингулярные интегралы, принцип суперпозиции, функция влияния, интегральные преобразования

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проекты 20-08-01099А и 19-08-00438А

Для цитирования: Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В. Нестационарное деформирование системы «полупространство-мембрана» // Труды МАИ. 2022. № 123. DOI: [10.34759/trd-2022-123-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-05)

TRANSIENT DEFORMATION OF THE HALF-SPACE-MEMBRANE SYSTEM

Elena Yu. Mikhaylova^{1✉}, Grigory V. Fedotenko²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russia

²Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia

¹mihe16@yandex.ru✉

²greghome@mail.ru

Abstract. The stress-strain state of a half-space (base) with a membrane-type coating under the action of normal transient pressure is investigated. The half-space is filled with a

homogeneous isotropic elastic medium. It is assumed that the problem is flat, that is, all the sought and given functions depend only on two spatial coordinates, and time.

The mathematical model of the problem includes the equations of motion of the half-space and the membrane, relations connecting the potentials of elastic displacements with displacements, components of the stress tensor with displacements in the half-space, initial conditions; conditions at infinity, which consist in the absence of perturbations at an infinitely distant point. The formulation of the problem is closed by the boundary conditions describing the case of free slippage between the base and the covering. All equations and relations are written in a rectangular Cartesian coordinate system.

The resolving equation follows from the boundary conditions between the half-space and the membrane, which are characterized by the equality of normal displacements on the base surface and deflections of the coating. In this case, the displacements and deflections are the convolution of the transient functions for the half-space and the membrane with the contact normal stress, respectively. The transient functions represent the normal displacements of the base boundary and the deflections of the coating and are solutions of the corresponding initial boundary value problems for the half-space and the membrane under uniform initial conditions and when the normal force action is set at the boundary in the form of the Dirac delta function.

As a solution to this problem, a numerical-analytical algorithm based on the quadrature method is proposed, with the help of which the integrals are replaced by their discrete analogs. In this case, the coefficients of the quadrature formulas for integrals of a continuous function are calculated using the Gauss method; for singular integrals, canonical regularization is used, where the coefficients of the quadrature formulas can be determined

exactly. The coefficients for integrals of functions with an integrable singularity are calculated analytically using the Laplace transform.

As a result of solving the problem, graphs of the dependence of the functions of contact stresses and membrane deflections on time and coordinates were obtained. A parametric analysis of the stress-strain state of the "half-space-membrane" system for different types of coating and base materials is carried out.

Keywords: transient contact problems, elastic half-space, membrane; transient load, singular integrals, superposition principle, transient function, integral transformations

Funding: this work was supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, projects 20-08-01099A and 19-08-00438A

For citation: Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Transient deformation of the half-space-membrane system. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. DOI: [10.34759/trd-2022-123-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-05)

1. Постановка задачи

Рассматривается воздействие нестационарной нагрузки $p(x, \tau)$ на полупространство (основание) с покрытием типа мембраны (Рис. 1). Полагаем, что задача является плоской: все искомые и заданные функции зависят только от двух пространственных координат x, z и времени t .

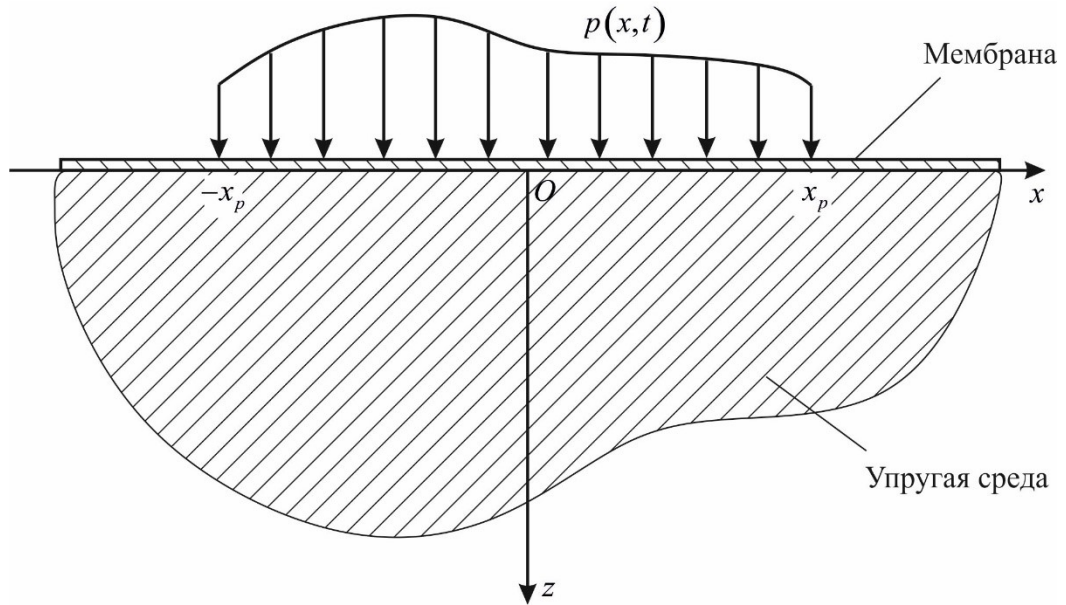


Рис. 1. Система «полупространство-мембрана»

Считаем, что полупространство заполнено однородной изотропной линейно упругой средой, тогда уравнения движения в потенциалах упругих смещений φ и ψ имеют вид [1-5, 21]

$$c_1^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad c_2^2 \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_p}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho_p}. \quad (1)$$

Здесь c_1, c_2 – скорости волн растяжения-сжатия и сдвига, λ, μ – параметры Ламе, ρ_p – плотность основания, t – время.

Компоненты вектора перемещений u_1 (в направлении оси Ox) и u_3 (в направлении оси Oz) определяются так [1-3]

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u_2 \equiv 0. \quad (2)$$

Из соотношений Коши для компонент тензора деформаций и вектора перемещений и закона Гука [2, 3] вытекают выражения, связывающие физические компоненты тензора напряжений с перемещениями

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \sigma_{33} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \sigma_{13} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \quad \sigma_{22} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right).\end{aligned}\tag{3}$$

Под мембраной, используемой в качестве покрытия, понимается упругая свободно изгибающаяся пленка. Будучи выведенной из состояния покоя она приходит в движение, при котором все ее точки совершают поперечные перемещения $v(x, t)$, в направлении оси z , зависящие от времени t и координаты x .

Уравнение колебаний мембраны с учетом влияния на нее полупространства имеет вид [5-7]

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{p(x, t)}{\rho_m} + \frac{\sigma_{330}}{\rho_m}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho_m}}, \quad \sigma_{330} = \sigma_{33}|_{z=0},\tag{4}$$

где a - скорость распространения волн в мембране, T - натяжение, приложенное к контуру единичной длины, ρ_m - поверхностная плотность покрытия.

Так как контакт между покрытием и основанием происходит в условиях свободного проскальзывания, то граничные условия записываются так [1]

$$v = u_3|_{z=0}, \quad \sigma_{13}|_{z=0} = 0.\tag{5}$$

Полагаем, что упругие потенциалы являются ограниченными в бесконечно удаленной точке

$$\varphi = O(1), \quad \psi = O(1), \quad z \rightarrow +\infty.\tag{6}$$

Замыкают постановку задачи начальные условия (в начальный момент времени мембрана и полупространство находятся в невозмущенном состоянии)

$$\psi|_{t=0} = \dot{\psi}|_{t=0} = \dot{u}|_{t=0} = \ddot{\psi}|_{t=0} = \ddot{u}|_{t=0} = 0.\tag{7}$$

Здесь точкой обозначена производная функции по времени.

Для решения задачи все переменные и параметры приводятся к безразмерному виду (штрих соответствует безразмерным величинам)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad w = \frac{u_3}{L}, \quad v' = \frac{v}{L}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \\ \psi' &= \frac{\Psi}{L^2}, \quad \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\lambda + 2\mu}, \quad p' = \frac{pL}{c_1^2 \rho_m}, \quad \gamma_m^2 = \frac{c_1^2}{c_m^2} (m=1,2), \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \\ a' &= \frac{a}{c_1}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma'_{330} = \frac{\sigma_{330}}{\lambda + 2\mu}, \quad \alpha = \frac{L \cdot \rho_p}{\rho_m}, \quad c'_R = \frac{c_R}{c_1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где L – характерный линейный размер, c_R – скорость волны Релея, τ – безразмерное время.

Подставляя формулы (8) в (1-7) и опуская далее штрихи в обозначении безразмерных величин, получаем уравнения движения полупространства и мембраны в безразмерной форме

$$\Delta \varphi = \gamma_1^2 \ddot{\varphi} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + p + \sigma_{330}^*, \quad \sigma_{330}^* = \alpha \sigma_{330}, \quad (10)$$

формулы для перемещений и напряжений

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad (11)$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} + \kappa \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\sigma_{22} = \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \eta^2 \sigma_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

а также граничные и начальные условия

$$\sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad v = w|_{z=0}, \quad (13)$$

$$\varphi = O(1), \psi = O(1), z \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0}, \quad \dot{\varphi}|_{\tau=0}, \quad \ddot{\varphi}|_{\tau=0}, \quad \ddot{\varphi}|_{\tau=0}, \quad \ddot{\varphi}|_{\tau=0} \quad (15)$$

2. Разрешающее уравнение

При исследовании воздействия нестационарной нагрузки $p(x, \tau)$ на полупространство с покрытием типа мембраны разрешающее уравнение вытекает из последнего граничного условия в группе (13). При этом нормальные перемещения поверхности полупространства и прогиб мембраны связаны с напряжениями σ_{330} и давлением $p(x, \tau)$ следующими интегральными соотношениями [1, 8-11]

$$w|_{z=0} = G_p * \sigma_{330}, \quad v = G_m * (p + \alpha \cdot \sigma_{330}), \quad (16)$$

где G_p, G_m – функции влияния для основания и покрытия соответственно [1, 2, 4, 5], символ «*» означает операцию свертки по времени и координате. Полагаем, что нагрузка $p(x, \tau)$ распределена по отрезку $[-x_p, x_p]$ оси Ox , тогда можно записать

$$p(x, \tau) = \tilde{p} \left(x_p - |\xi| \right), \quad (17)$$

где $H(x)$ - функция Хэвисайда.

Таким образом, разрешающее интегральное уравнение с учетом (13), (16) запишется так

$$G_p * \sigma_{330} = G_m * (p + \alpha \cdot \sigma_{330}). \quad (18)$$

Функции влияния G_p, G_m представляют собой нормальные перемещения границы полупространства и прогибы мембраны и являются решениями соответствующих начально-краевых задач для полупространства и мембраны при

однородных начальных условиях и задании на границе нормального силового воздействия в виде $\delta(\tau)\delta(x)$, где $\delta(\square)$ - дельта-функция Дирака.

Функция G_m с учетом (8) [12, 14] имеет вид

$$G_m(x, \tau) = \frac{1}{2a} H\left(\tau - \left|\frac{x}{a}\right|\right). \quad (19)$$

Функция G_p есть решение плоской задачи Лэмба [1, 2, 8, 9, 13], она имеет вид

$$G_p(x, \tau) = \sum_{k=1}^2 G_p^{(k)}(x, \tau) H(\tau - \gamma_k |x|), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} G_p^{(1)} &= \frac{\eta^2 (\gamma_2^2 x^2 - 2\tau^2)^2}{\pi P_1(x^2, \tau^2)} \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}, \quad G_p^{(2)} = G_p^{(3)} - G_p^{(1)} = \frac{4\eta^2 \tau^2 (\tau^2 - \gamma_1^2 x^2)}{\pi P_1(x^2, \tau^2)} \sqrt{\tau^2 - \gamma_2^2 x^2}, \\ G_p^{(3)} &= \frac{\eta^2 R(x^2, \tau^2)}{\pi P_1(x^2, \tau^2)} \sqrt{\tau^2 - \gamma_1^2 x^2}, \quad R(x, \tau) = (\eta^2 x - 2\tau)^2 + 4\tau \sqrt{\tau - \eta^2 x} \sqrt{\tau - \gamma_1^2 x}, \\ P_1 &= \tau^3 P_2\left(\frac{\gamma_2^2 x}{\tau}\right) = \gamma_2^6 x^3 - 8\gamma_2^4 x^2 \tau + 8(2 + \kappa) \gamma_2^2 x \tau^2 - 8(1 + \kappa) \tau^3, \\ P_2(\xi) &= \xi^3 - 8\xi^2 + 8(2 + \kappa)\xi - 8(1 + \kappa). \end{aligned} \quad (21)$$

Многочлен $P_2(\xi)$ при всевозможных параметрах упругой среды ($0 \leq \kappa \leq 1$) имеет один действительный корень $\xi_1 = c_R^2 / c_2^2$, а при $0 \leq \kappa \leq \kappa_*$, $\kappa_* \approx 0,357003$, еще два действительных корня $\xi_{2,3} \in R$. Эти корни удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \xi_1 \leq 1, \quad \xi_{2,3} > \eta^2, \quad (22)$$

а безразмерная скорость волны Релея находится в диапазоне

$$0 \leq c_R \leq \frac{1}{\gamma_2}. \quad (23)$$

Тогда знаменатель функции $G_p(x, \tau)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
P_1(x, \tau) &= \gamma_2^6 (x - c_R \tau) P_3(x, \tau), \quad P_3(x, \tau) = x^2 - 2\alpha^2 \tau x + \beta^2 \tau^2, \\
\alpha^2 &= \frac{4}{\eta^2} - \frac{c_R^2}{2} = 2(1 - \kappa) - \frac{c_R^2}{2}, \quad \beta^2 = 16 \frac{\eta^2 - 1}{\eta^8 c_R^2} = 8 \frac{1 + \kappa}{\eta^6 c_R^2}, \\
D(\kappa) &= 4(\alpha^4 - \beta^2).
\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $D(\kappa)$ - дискриминант многочлена $P_3(z, 1)$, который удовлетворяет следующим условиям: $D(\kappa_*)=0$, $D(\kappa)>0$ при $0 \leq \kappa \leq \kappa_*$ и при $D(\kappa)<0$ при $\kappa_* \leq \kappa \leq 1$.

Функцию $P_3(x, \tau)$ с учетом $\kappa_* \leq \kappa \leq 1$ можно разложить на множители

$$P_3(x, \tau) = \left(x - \frac{\xi_2 \tau}{\gamma_2^2} \right) \left(x - \frac{\xi_3 \tau}{\gamma_2^2} \right).$$

Но поскольку в силу (22) прямые $\tau = \pm \gamma_2 x / \sqrt{\xi_{2,3}}$ лежат вне носителя $G_p(x, \tau)$, то для нее соответствующие особенности отсутствуют.

Таким образом, функция влияния для полупространства имеет степенную особенность порядка (-1) на фронтах волны Релея: $\tau = \pm c_R x$.

3. Алгоритм и метод решения задачи.

Представим уравнение (18) в виде

$$G_p * \sigma_{330} - \alpha \cdot G_m * \sigma_{330} = G_m * \tilde{I} \tag{25}$$

Запишем первое слагаемое в левой части уравнения (25) так

$$\begin{aligned}
I^{(p)}(x, \tau) &= G_p * \sigma_{330} = \iint_{S(x, \tau)} G_p(x - \xi, \tau - t) \sigma_{330}(\xi, t) dt d\xi, \\
S(x, \tau) &= \{(t, \xi) \mid \tau - t \geq |x - \xi|\},
\end{aligned} \tag{26}$$

где $S(x, \tau)$ – характеристический конус (Рис.2).

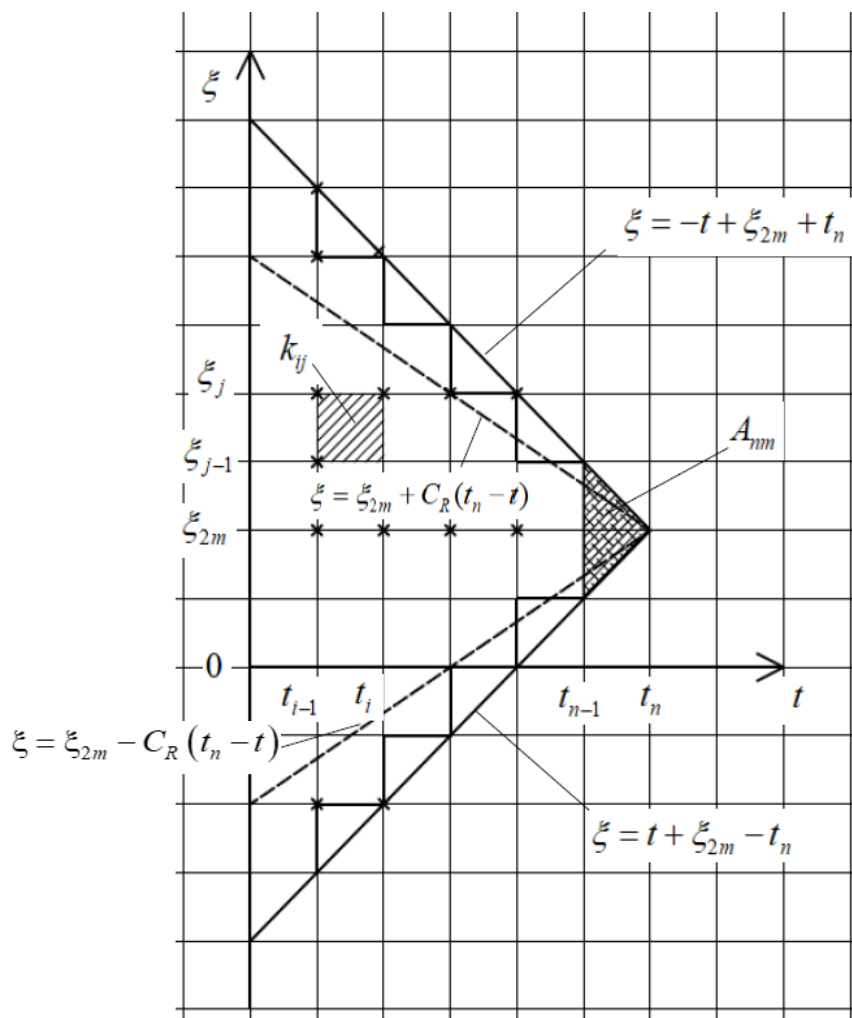


Рис. 2. Аппроксимация области S и сетка интегрирования

Для численно-аналитического вычисления интеграла (26) нанесем сетку на область $R_{t\xi}^2$ с шагом δ

$$t_i = i\delta, \xi = j\delta, k_{ij} = \{(t, \xi) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i, \xi_{j-1} \leq \xi \leq \xi_j\}. \quad (27)$$

Поставим функциям одного, двух переменных их дискретные аналоги (выбор шага 2δ по координате ξ вызван спецификой квадратурных формул, которые будут рассмотрены ниже).

$$f_i = f(t_i), \omega_j = \omega(\xi_{2j}), \varphi_{ij} = \varphi(\xi_{2j}, t_i). \quad (28)$$

Интеграл (26) с учетом (27), (28) запишем так

$$I^{(p)}(\xi_{2m}, t_n) = \iint_{S(\xi_{2m}, t_n)} G_p(\xi_{2m} - \xi, t_n - t) \sigma_{330}(\xi, t) dt d\xi, \quad (29)$$

$$S(\xi_{2m}, t_n) = \{(t, \xi) \mid t + \delta(2m - n) \leq \xi \leq -t + \delta(2m + n)\}.$$

Аппроксимацию границы $S(\xi_{2m}, t_n)$ представим в виде кусочно-постоянной ломанной. В качестве элементарных областей выберем квадраты k_{ij} . Так как функция $G_p(\xi_{2m} - \xi, t_n - t)$ имеет интегрируемую особенность в вершине $\xi = \xi_{2m}, t = t_n$ характеристического конуса, то $S(\xi_{2m}, t_n)$ заменяем на объединение многоугольника S_{mn} на участке $0 \leq t \leq t_{n-1}$ и равнобедренного треугольника A_{mn}

$$S(\xi_{2m}, t_n) \approx S_{mn} \cup A_{mn}, \quad (n, m=0, 1, 2, \dots),$$

$$S_{mn} = \bigcup_{i=1}^{n-1} H_{i, l_i}^l, \quad H_{i, k}^l = \bigcup_{j=1}^l k_{ij}, \quad l_{1i} = i + 2m - n - 1, \quad l_{2i} = -i + 2m + n, \quad (30)$$

$$A_{mn} = H_{i, -\infty}^{+\infty} \cap S(\xi_{2m}, t_n).$$

Здесь $H_{i, k}^l$ - полоса, ограниченная прямыми $t = t_{i-1}, t = t_i$ и горизонтальными $\xi = k\delta, \xi = l\delta$ прямыми.

Ядро интеграла (29) с учетом (20), (21) представим в виде суммы регулярной $G_{pr}(x, \tau)$ и сингулярной $G_{ps}(x, \tau)$ составляющих, так как, как было показано в параграфе 2, $G_p(x, \tau)$ имеет особенность (-1)

$$G_p(x, \tau) = G_{pr}(x, \tau) + G_{ps}(x, \tau)H(\tau - |x|),$$

$$G_{pr}(x, \tau) = G_{pr1}(x, \tau)H(\eta|x| - \tau) + G_{pr3}(x, \tau)H(\tau - \eta|x|),$$

$$G_{prk}(x, \tau) = G_{pk}(x, \tau) - G_{ps}(x, \tau) \quad (k = 1, 3), \quad (31)$$

$$G_{ps}(x, \tau) = \frac{a_s \tau}{x^2 - c_R^2 \tau}, \quad a_s = \frac{R(c_R, 1)\sqrt{1 - c_R^2}}{\pi \eta^4 P_3(c_R, 1)}.$$

Тогда дискретный аналог интеграла $I^{(p)}$ (29) имеет вид

$$I^{(p)} \approx I_{nm}^{(p)} = I_{n-1,m}^{(pr)} + I_{n-1,m}^{(ps)} + I_{nm}^{(p0)}. \quad (32)$$

Здесь $I_{n-1,m}^{(pr)}$, $I_{n-1,m}^{(ps)}$ -интегралы соответственно с ядрами G_{pr} , G_{ps} по области S_{mn} , интеграл $I_{nm}^{(p0)}$ с ядром G_p - по треугольнику A_{mn} .

Для вычисления $I_{n-1,m}^{(pr)}$, $I_{n-1,m}^{(ps)}$, $I_{nm}^{(p0)}$ используем метод весовых коэффициентов с учетом особенностей, соответствующих ядрам G_{pr} , G_{ps} , G_p , при этом $\sigma_{330}(\xi, t) \approx \sigma_{330ij}$, $(\xi, t) \in k_{i,2j} \cup k_{i,2j+1}$.

Для интеграла $I_{n-1,m}^{(pr)}$ запишем

$$I_{n-1,m}^{(pr)} = \iint_{S_{nm}} G_{pr}(\xi_{2m} - \xi, t_n - t) \sigma_{330}(\xi, t) d\xi dt \approx \delta \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=l_i}^{l_i} a_{n-i,2m-j}^{(pr)} \sigma_{330ik_j}, \quad (33)$$

$$k_j = [j / 2], \quad a_{nm}^{(pr)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_{pr}(2m+1-v, 2n+1-u) dudv.$$

Для нахождения коэффициентов $a_{nm}^{(pr)}$ квадратурных формул используем отображение квадрата k_{ij} на квадрат k_0 [18]

$$k_{ij} \rightarrow k_0 : \begin{cases} 2t = (u + 2i - 1)\delta, & |u| \leq 1; \\ 2\xi = (v + 2j - 1)\delta, & |v| \leq 1. \end{cases}$$

Так как получить значения двойных интегралов по квадрату k_0 , определяющих $a_{nm}^{(pr)}$ (33), аналитически крайне сложно, то они вычисляются с любой заданной точностью ε с помощью метода Гаусса [19].

Используя каноническую регуляризацию [20], можно представить интегралы

$I_{n-1,m}^{(ps)}$ в следующем виде

$$\begin{aligned}
I_{n-1,m}^{(ps)} &= \iint_{S_{nm}} G_{ps}(\xi_{2m} - \xi, t_n - t) \sigma_{330}(\xi, t) dt d\xi \approx \delta \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=l_i}^{l_{2i}} a_{n-i,2m-j}^{(ps)} \sigma_{330ik_j}, \\
a_{nm}^{(ps)} &= \frac{a_s}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{(2n+1-u) dudv}{(2m+1-v)^2 - c_R^2 (2n+1-u)^2} = \\
&= \frac{a_s}{2c_R^2} \sum_{i,j,k=0}^1 (-1)^{i+k+1} v_{m+k,n+i}^j \ln |v_{m+k,n+i}^j|, \\
v_{n,m}^j &= m + (-1)^j n c_R.
\end{aligned} \tag{34}$$

Здесь коэффициенты квадратурных формул $a_{nm}^{(ps)}$ определяются точно.

Дискретный аналог для интеграла $I_{nm}^{(p0)}$ по области A_{nm} запишем так

$$\begin{aligned}
I_{nm}^{(p0)} &= \iint_{A_{nm}} G_p(\xi_{2m} - \xi, t_n - t) \sigma_{330}(\xi, t) dt d\xi \approx \delta a_{nm}^{(p0)} \sigma_{330nm}, \\
\delta a_{nm}^{(p0)} &= \int_{(n-1)\delta}^{n\delta} dt \int_{t+(2m-n)\delta}^{-t+(2m+n)\delta} G_p(2m\delta - \xi, n\delta - t) d\xi.
\end{aligned} \tag{35}$$

Делая замену переменных в последнем интеграле (35) $\zeta = n\delta - t$, $\eta = 2m\delta - \xi$, получаем

$$\begin{aligned}
\delta a_{nm}^{(p0)} &= \int_0^\delta d\zeta \int_{-\zeta}^\zeta G_p(\eta, \zeta) d\eta = \int_0^\delta d\zeta \int_{-\infty}^\infty G_p(\eta, \zeta) d\eta = \\
&= \int_0^\delta G_p^F(0, \zeta) d\zeta = G_p^F(0, \delta) * H(\delta),
\end{aligned} \tag{36}$$

где значок F - трансформанта преобразования Фурье, $H(\delta)$ - функция Хевисайда.

Применяя преобразование Лапласа по δ [14], найдем $\delta a_{nm}^{(p0)}$

$$\left[\delta a_{nm}^{(p0)} \right]^L = \frac{1}{s} G_p^{FL}(0, s) = -\frac{1}{s^2}, \quad \delta a_{nm}^{(p0)} = -\delta, \quad a_{nm}^{(p)} = -1. \tag{37}$$

Таким образом, коэффициент квадратурных формул (35) вычисляется аналитически.

Второе слагаемое $\alpha G_m * \sigma_{330}$ в левой части уравнения (25) запишем так

$$I^{(m)}(x, \tau) = \alpha G_m * \sigma_{330} = \alpha \iint_{\tilde{\Omega}^{(m)}} G_m(x - \xi, \tau - t) \sigma_{330}(\xi, t) dt d\xi, \quad (38)$$

$$\tilde{\Omega}^{(m)} = \{(t, \xi) | a(\tau - t) \geq |x - \xi|\},$$

где $\tilde{\Omega}^{(m)}$ - характеристический конус (Рис.3).

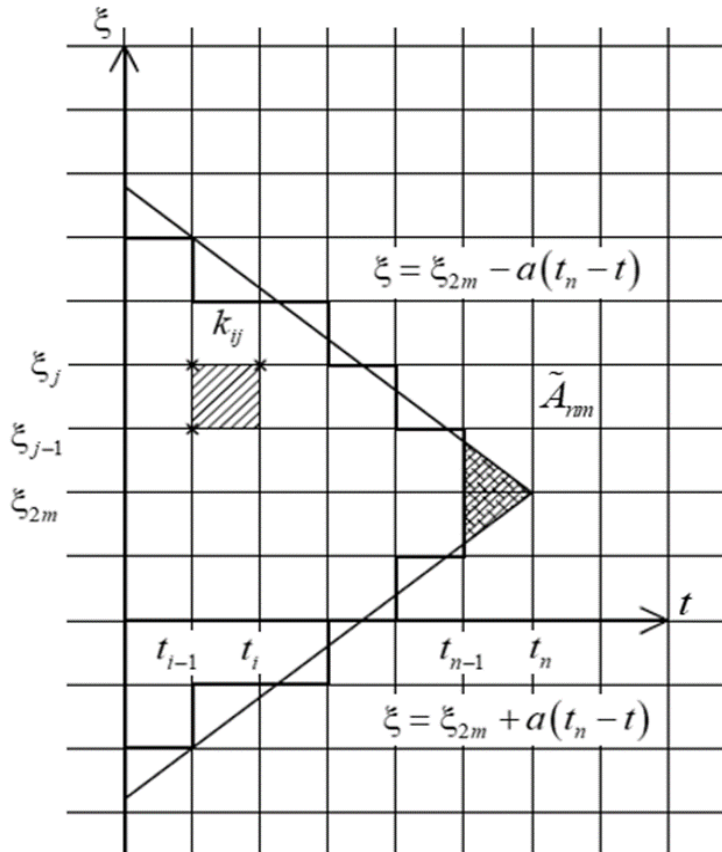


Рис. 3. Аппроксимация области $\tilde{\Omega}$ и сетка интегрирования

Область интегрирования $\tilde{\Omega}$ включает в себя многоугольник $\tilde{\Omega}_{mn}$ на участке $0 \leq t \leq t_{n-1}$ и треугольник $\tilde{\Omega}_{nm}$. Шаг разбиения равен δ по времени и координате

$$\tilde{\Omega}_{mn} = \{(t, \xi) | t_{i-1} \leq t \leq t_i, \xi_{j-1} \leq \xi \leq \xi_j, i=1, \dots, n-1, j=1, 2, \dots, m\},$$

$$\tilde{\Omega}_{nm} = \{(t, \xi) | t_{n-1} \leq t \leq t_n, \xi_{2m} - a(t_n - t) \leq \xi \leq \xi_{2m}, \xi_{2m} \leq \xi \leq \xi_{2m} + a(t_n - t)\},$$

$$H_{i,k}^l = \bigcup_{j=1}^l k_{ij}, \quad l_{1i}^* = a(i - n) + 2m - 1, \quad l_{2i}^* = a(n - i) + 2m, \quad (39)$$

Используя (27), (28) запишем интеграл (38) в виде

$$I^{(m)}(\xi_{2m}, t_n) = \alpha \iint_{\tilde{\Omega}_{2m, n}} G_m(\xi_{2m} - \xi, t_n - t) \sigma_{330}(\xi, t) dt d\xi, \quad (40)$$

$$\tilde{\Omega}_{2m, n} = \{(t, \xi) \mid at + \delta(2m - an) \leq \xi \leq -at + \delta(2m + an)\}.$$

Интеграл (40) заменим его дискретным аналогом

$$I^{(m)} \approx I_{nm}^{(m)} = \alpha \left(I_{n-1, m}^{(m)} + I_{nm}^{(m0)} \right). \quad (41)$$

Здесь $I_{n-1, m}^{(m)}$, $I_{nm}^{(m)}$ - интегралы по областям $\tilde{\Omega}_{n-1, m}$ и $\tilde{\Omega}_{nm}$ соответственно.

Квадратурная формула для $I_{n-1, m}^{(m)}$ имеет вид

$$I_{n-1, m}^{(m)} = \iint_{\tilde{\Omega}_{n-1, m}} G_m(\xi_{2m} - \xi, t_n - t) \sigma_{330}(\xi, t) dt d\xi \approx$$

$$\approx \frac{1}{2a} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=l_i^*}^{l_2^*} \sigma_{330ik_j} \delta^2, \quad k_j = [j/2]. \quad (42)$$

Значение интеграла $I_{nm}^{(m0)}$ определяется аналитически

$$I_{nm}^{(m0)} = \iint_{\tilde{\Omega}_{nm}} G_m(\xi_{2m} - \xi, t_n - t) \sigma_{330}(\xi, t) dt d\xi \approx a_{nm}^{(m0)} \sigma_{330nm}, \quad (43)$$

$$a_{nm}^{(m0)} = \frac{1}{2a} \int_{(n-1)\delta}^{n\delta} dt \int_{2m\delta - a(n\delta - t)}^{2m\delta + a(n\delta - t)} d\xi = \frac{\delta^2}{2}.$$

Правую часть равенства (25) можно вычислить точно

$$G_m * \tilde{\Omega}_{n-1, m} \approx \dots \frac{1}{2a} \int_0^{n\delta} dt \int_{2m\delta - a(n\delta - t)}^{2m\delta + a(n\delta - t)} p(t, \xi) H(x_p - |\xi|) d\xi, \quad (44)$$

Таким образом, подставляя (43), (42) в (41), (33)-(36) в (32) с учетом (38), (26),

(44) окончательно получим следующую квадратурную формулу для уравнения (25)

$$I_{n-1, m} + I_{nm} = \tilde{\Omega}_{n-1, m} = I_{n-1, m}^{(p)} - \alpha I_{n-1, m}^{(m)},$$

$$I_{nm} = I_{nm}^{(p)} - \alpha I_{nm}^{(m)}, \quad I_{nm} = -\sigma_{330nm} \left(\alpha \frac{\delta^2}{2} + \delta \right). \quad (45)$$

Как следует из (45), контактные напряжения на границе полуплоскости определяются так

$$\sigma_{330nm} \approx \frac{I_{n-1,m} - \tilde{I}_{nm}}{(2^{-1}\alpha\delta^2 + \delta)}. \quad (46)$$

Выражение для нахождения прогиба мембраны вытекает из второго равенства формулы (16) с учетом (41)-(44)

$$v_{nm} = \tilde{I}_{nm} - \frac{n}{n-1} I_{nm}^{(n)} + I_{nm}^{(m)} \quad (47)$$

4. Результаты расчетов

В качестве первого примера рассмотрим полупространство и систему «полупространство-мембрана», находящиеся под действием вертикальной нагрузки $p = 5\tau \cos(20x)H(0.04 - |x|)$. Материал полупространства и мембраны – сталь, скорость распространения волн в мембране $a = 0.4247$, шаг разбиения $\delta = 0.002$.

На рис. 4, 5 показаны зависимости от координаты в различные моменты времени нормальных перемещений в полупространстве и системе «полупространство-мембрана» соответственно.

На рис. 6, 7 представлены зависимости нормальных перемещений в полупространстве и системе «полупространство-мембрана» от времени при заданных координатах.

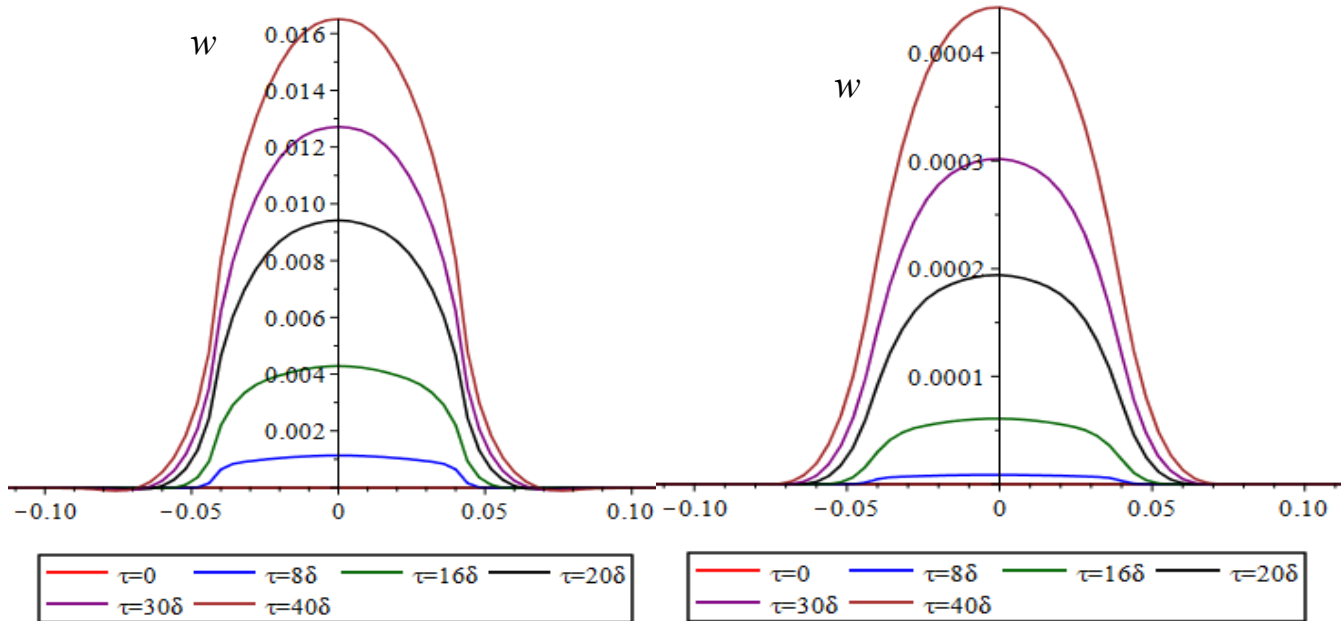


Рис.4. Зависимость от координаты
нормальных перемещений в
полупространстве

Рис. 5. Зависимость от координаты
нормальных перемещений в системе
«полупространство-мембрана»

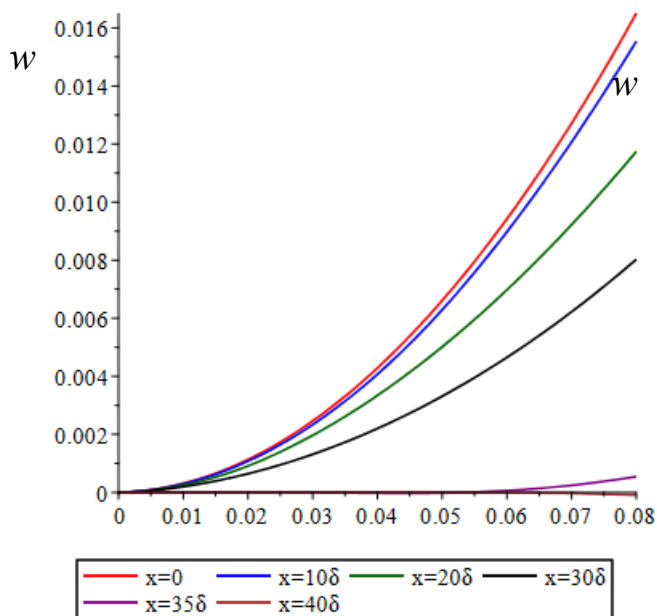


Рис.6. Зависимость нормальных
перемещений в полупространстве от
времени

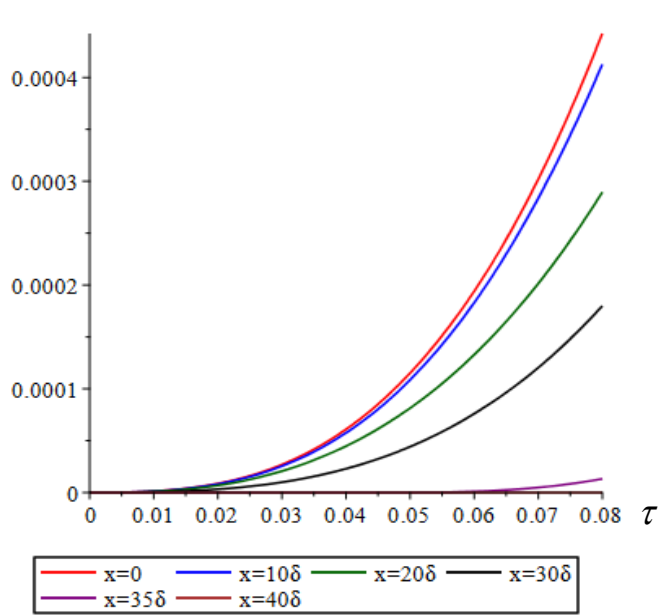


Рис.7. Зависимость нормальных
перемещений в системе
полупространство-мембрана»
от времени .

Из рис. 4-7 видно, что в полупространстве нормальные перемещения растут значительно быстрее, чем в основании с покрытием при одном и том же нагружении.

Зависимость контактных напряжений в системе «полупространство-мембрана» от координаты и от времени представлена соответственно на рис. 8, 9.

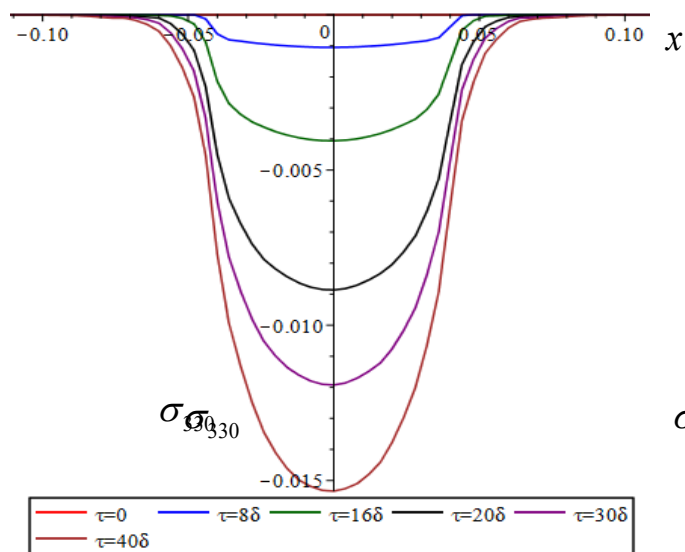


Рис. 8. Зависимость контактных напряжений в системе «полупространство-мембрана» от координаты

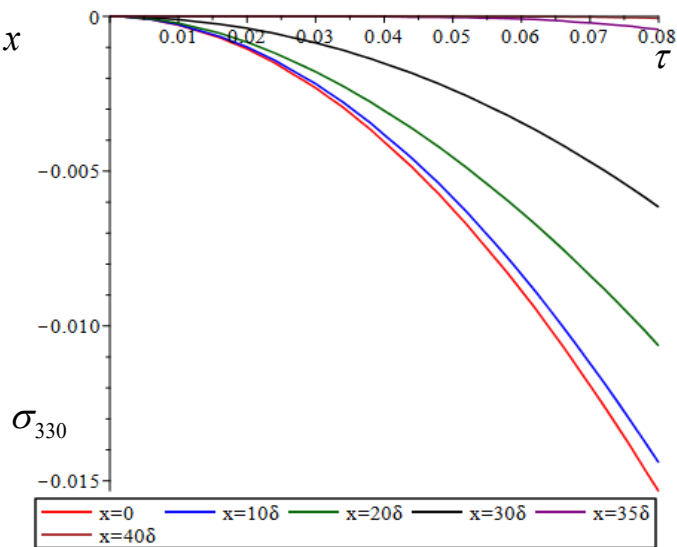


Рис. 9. Зависимость контактных напряжений в системе «полупространство-мембрана» от времени

Далее рассмотрено напряженно-деформированное состояние полупространства с покрытием при различных типах материалов основания и мембраны, имеющих следующие характеристики: сталь (модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,25$, плотность $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$), олово (модуль Юнга $E = 0,543 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$,

коэффициент Пуассона $\mu = 0,33$, плотность $\rho = 7300 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$), медь (модуль Юнга

$$E = 1,3 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \text{ коэффициент Пуассона } \mu = 0,34, \text{ плотность } \rho = 8900 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

На рис. 10-12 представлены зависимость нормальных перемещений от координат в различные моменты времени. Зависимость нормальных перемещений от времени изображена на Рис. 13- 15. При этом материал полупространства - сталь, а мембраны - сталь, олово, медь соответственно.

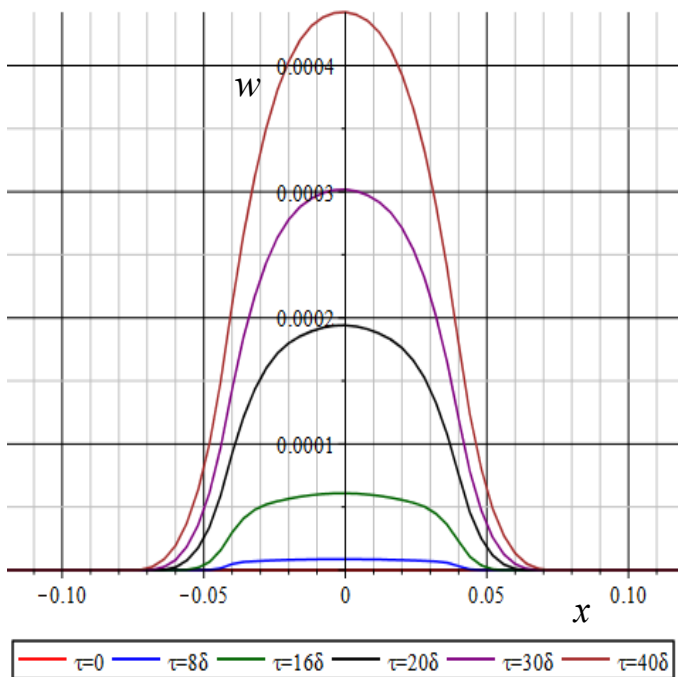


Рис.10. Зависимость нормальных перемещений от координат (материал полупространства - сталь, мембраны - сталь)

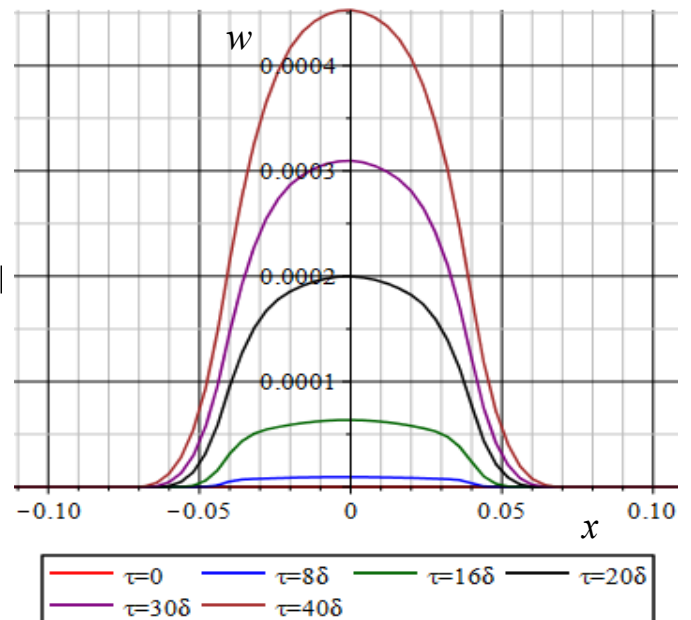


Рис.11. Зависимость нормальных перемещений от координат (материал полупространства - сталь, мембраны - олово)

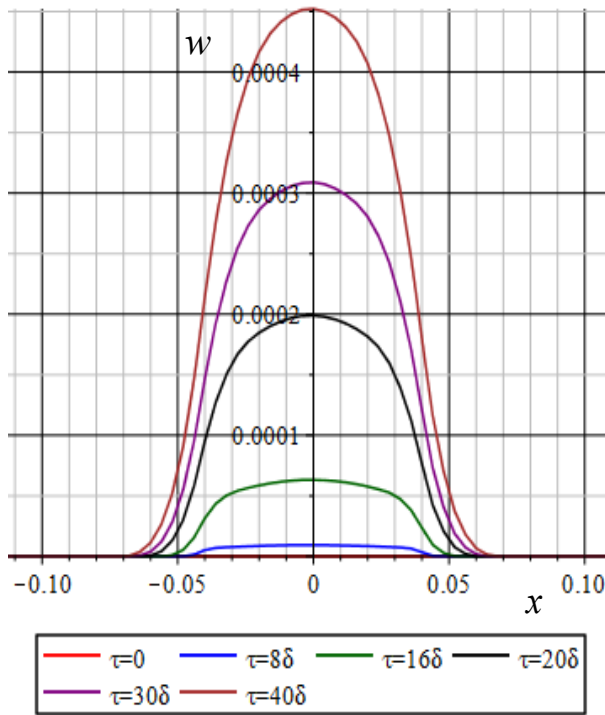


Рис.12. Зависимость нормальных перемещений от координат (материал полупространства - сталь, мембраны - медь)

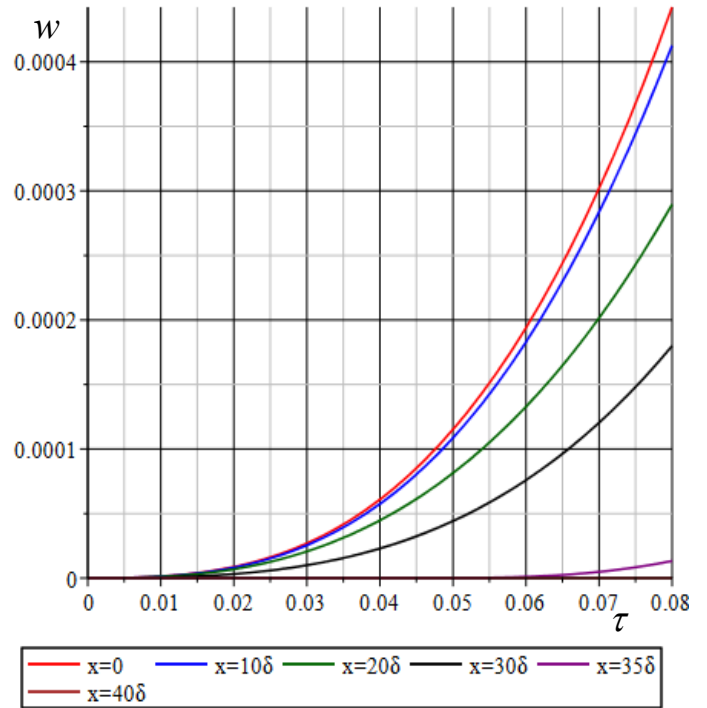


Рис.13. Зависимость нормальных перемещений от времени (материал полупространства - сталь, мембраны - сталь)

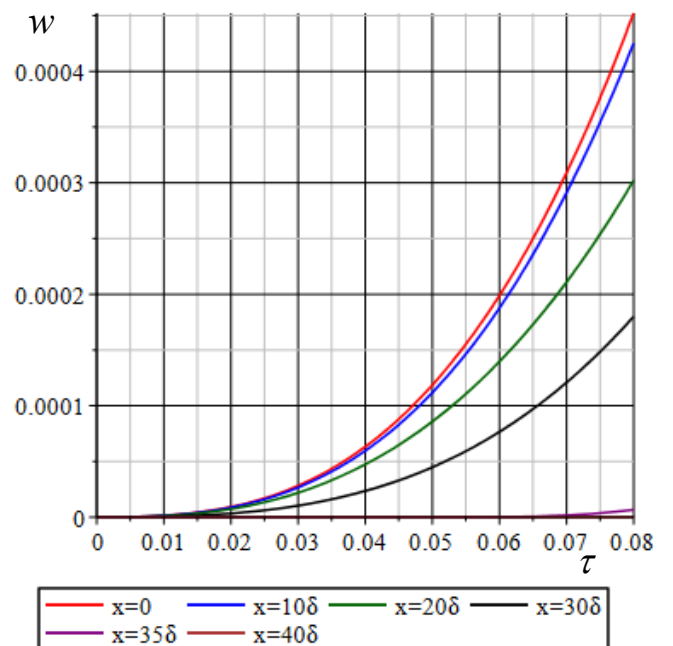
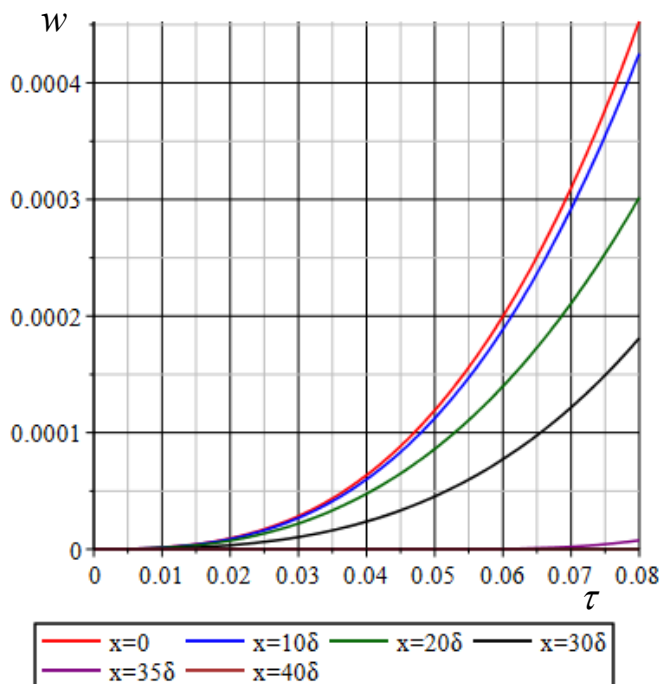


Рис.14. Зависимость нормальных перемещений от времени (материал полупространства - сталь, мембраны - олово)

Рис.15. Зависимость нормальных перемещений от времени (материал полупространства - сталь, мембраны - медь)

На рис. 16-18 представлены графики зависимости контактных напряжений от координаты (материал полупространства – сталь, а мембраны – сталь, олово, медь соответственно).

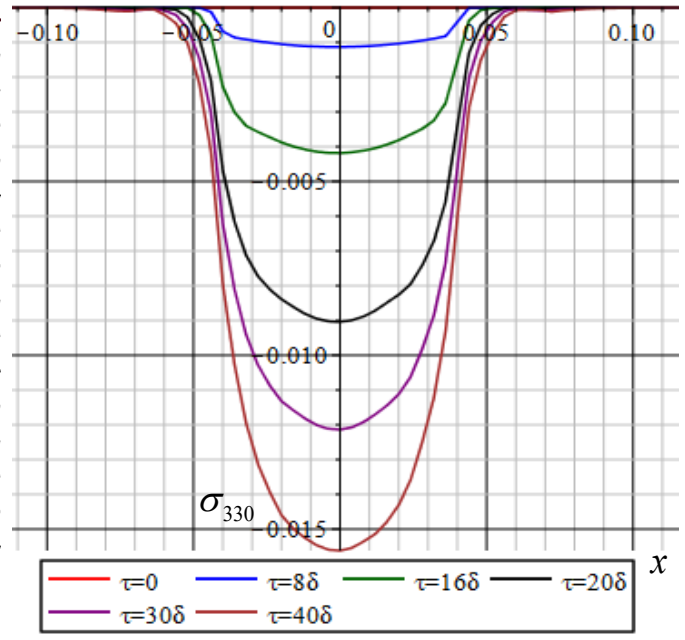
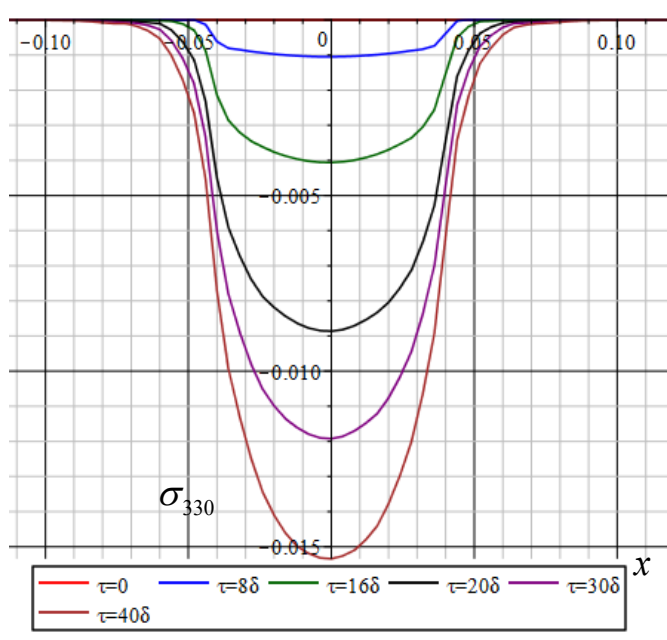


Рис.16. Зависимость контактных напряжений от координаты (материал полупространства – сталь, мембраны – сталь)

Рис.17. Зависимость контактных напряжений от координаты (материал полупространства – сталь, мембраны – олово)

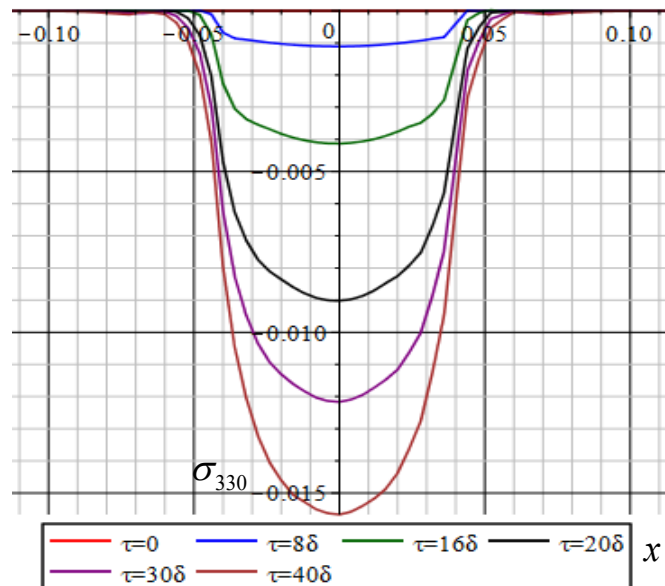


Рис.18. Зависимость контактных напряжений от координаты (материал полупространства – сталь, мембраны – медь)

Таким образом, наибольшие значения перемещения достигнуты при мембране, изготовленной из олова, соответствующие наименьшие значения получены при мембране из стали. Аналогичные выводы можно сделать при рассмотрении значений контактных напряжений, наибольшие контактные напряжения возникают при мембране, изготовленной из олова, наименьшие при мембране из стали.

Заключение

Приведена постановка задачи о воздействии нестационарного давления на полупространство с покрытием типа мембраны. Получено разрешающее интегральное уравнение, разработан и реализован численно-аналитический метод его решения. Получены графики зависимостей прогибов мембраны и нормальных контактных напряжений от времени и координаты. Также проведен параметрический

анализ напряженно-деформированного состояния системы «полупространство-мембрана» при разных типах материалов покрытия и основания.

Список источников

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.
2. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. – М.: Физматлит, 2004. – 472 с.
3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. – М.: Наука, 1973. Т. 1. – 492 с.; Т. 2 – 568 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
6. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
8. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. - Л.: Судостроение, 1980. - 344 с.
9. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. - Л.: Судостроение, 1972. - 351 с.
10. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53499>

11. Robinson A.R., Thompson J.C. Transient disturbances in a half-space during the first stage of frictionless indentation of a smooth rigid die of arbitrary shape // Quarterly of Applied Mathematics, 1975, vol. 33, no. 3. pp. 215-223. DOI:[10.1090/QAM/99664](https://doi.org/10.1090/QAM/99664)
12. Mikhailova E., Tarlakovskii D., Fedotenkov G. Impact of Transient Pressure on a Half-Space with Membrane Type Coating // Structural Integrity. Springer Nature Switzerland AG, 2020, vol.16, pp. 312-315. DOI: [10.1007/978-3-030-47883-4_56](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_56)
13. Mikhailova E., Tarlakovskii D., Fedotenkov G. The Unsteady Contact Interaction Problem of an Absolutely Rigid Body and a Membrane // Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Structural Integrity, Springer Nature Switzerland AG, 2019, pp. 289-293. DOI:[10.1007/978-3-030-21894-2_53](https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_53)
14. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному вычислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 487 с.
15. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
16. Delfim Soares. Dynamic analysis of elastoplastic models considering combined formulations of the time-domain boundary element method // Engineering Analysis With Boundary Elements, 2015, vol. 55, pp. 28-39. DOI:[10.1016/j.enganabound.2014.11.014](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.11.014)
17. Schanz M., Antes H. Application of ‘Operational Quadrature Methods’ in Time Domain Boundary Element Methods // Meccanica, 1997, vol. 32, pp. 179–186. DOI:[10.1023/A:1004258205435](https://doi.org/10.1023/A:1004258205435)

18. Schanz M., Ye W., Xiao J. Comparison of the convolution quadrature method and enhanced inverse FFT with application in elastodynamic boundary element method // *Computational Mechanics*, 2016, vol. 57, pp. 523–536. DOI:[10.1007/s00466-015-1237-z](https://doi.org/10.1007/s00466-015-1237-z)
19. Абрамовица М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. - М.: Наука, 1979. – 830 с.
20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
21. Чан Л.Т., Тарлаковский Д.В. Моментно упругая полуплоскость под действием поверхностных нестационарных нормальных перемещений // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=99731>

References

1. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granitsami* (Dynamic contact problems with moving boundaries), Moscow, Nauka. Fizmatlit, 1995, 352 p.
2. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in continuous media), Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 p.
3. Amenzade Yu.A. *Teoriya uprugosti* (Theory of elasticity), Moscow, Vysshaya shkola, 1976, 272 p.
4. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* (Continuum mechanics), Moscow, Nauka, 1973, vol. 1. - 492 p.; vol. 2 – 568 p.
5. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow, Nauka, 1977, 736 p.

6. Arsenin V.Ya. *Metody matematicheskoi fiziki i spetsial'nye funktsii* (Methods of mathematical physics and special functions), Moscow, Nauka, 1974, 432 p.
7. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics), Moscow, Nauka, 1981, 512 p.
8. Slepyan L.I., Yakovlev Yu.S. *Integral'nye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh mekhaniki* (Integral transformations in non-stationary problems of mechanics.), Leningrad, Sudostroenie, 1980, 344 p.
9. Slepyan L.I. *Nestatsionarnye uprugie volny* (Non-stationary elastic waves), Leningrad, Sudostroenie, 1972, 351 p.
10. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Non-stationary contact of a spherical shell and an elastic half-space, *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53499>
11. Robinson A.R., Thompson J.C. Transient disturbances in a half-space during the first stage of frictionless indentation of a smooth rigid die of arbitrary shape, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1975, vol. 33, no. 3. pp. 215-223. DOI:10.1090/QAM/99664
12. Mikhailova E., Tarlakovskii D., Fedotenkov G. *Impact of Transient Pressure on a Half-Space with Membrane Type Coating, Structural Integrity*. Springer Nature Switzerland AG, 2020, vol.16, pp. 312-315. DOI: 10.1007/978-3-030-47883-4_56
13. Mikhailova E., Tarlakovskii D., Fedotenkov G. The Unsteady Contact Interaction Problem of an Absolutely Rigid Body and a Membrane, *Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Structural Integrity*, Springer Nature Switzerland AG, 2019, pp. 289-293. DOI:10.1007/978-3-030-21894-2_53

14. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu vychisleniyu* (Handbook of Operational Computing), Moscow, Vysshaya shkola, 1965, 487 p.
15. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* (Numerical Methods), Moscow, Nauka, 1987, 600 p.
16. Delfim Soares. Dynamic analysis of elastoplastic models considering combined formulations of the time-domain boundary element method, *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2015, vol. 55, pp. 28-39. DOI:10.1016/j.enganabound.2014.11.014
17. Schanz M., Antes H. Application of 'Operational Quadrature Methods' in Time Domain Boundary Element Methods, *Meccanica*, 1997, vol. 32, pp. 179–186. DOI:10.1023/A:1004258205435
18. Schanz M., Ye W., Xiao J. Comparison of the convolution quadrature method and enhanced inverse FFT with application in elastodynamic boundary element method, *Computational Mechanics*, 2016, vol. 57, pp. 523–536. DOI:10.1007/s00466-015-1237-z
19. Abramovitsa M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami* (Handbook for special functions with formulas, graphs and mathematical tables), Moscow, Nauka, 1979, 830 p.
20. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* (Tables of integrals, sums, series and products.), Moscow, Nauka, 1971, 1108 p.
21. Tran L.T., Tarlakovsky D.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=99731>

Статья поступила в редакцию 27.12.2021; одобрена после рецензирования 20.01.2022; принята к публикации 20.04.2022.

The article was submitted on 27.12.2021; approved after reviewing on 20.01.2022; accepted for publication on 20.04.2022.