

УДК 621, 531

Разработка конечного элемента оболочки для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов

Низаметдинов Ф.Р.^{1*}, Сорокин Ф.Д.^{1}, Иванников В.В.^{2***}**

¹*Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, ул. 2-ая Бауманская, 5, Москва, 105005, Россия*

²*Научно-технический центр по роторной динамике «Альфа-Транзит», ул. Ленинградская, 1, Химки, Московская область, 141400, Россия*

**e-mail: fnizametdinov@list.ru*

***e-mail: sorokin_fd@mail.ru*

****e-mail: vvivannikov@gmail.com*

Статья поступила 15.11.2019

Аннотация

Элементы конструкций летательных аппаратов часто могут быть сведены к расчетной схеме, элементы которой подвержены большим перемещениям при малых деформациях. Современным удобным и эффективным методом решения задач, описываемых такой расчетной схемой, является метод конечных элементов. В данной работе предложена модель геометрически нелинейного конечного элемента оболочки для описания неограниченно больших поворотов. Описание больших поворотов проводится с применением вектора Эйлера и тензора поворота.

Для конечного элемента получены аналитические соотношения для матрицы касательных жесткостей и вектора узловых сил на примере четырёхузлового конечного элемента. Корректность полученных соотношений подтверждается

решением тестовых задач с помощью разработанного элемента и сравнением полученных результатов с результатами, полученными другими методами.

Ключевые слова: вектор Эйлера, тензор поворота, большие перемещения, большие повороты, матрица касательной жесткости, конечный элемент, теневой элемент.

Введение

Часто элементы конструкций в машиностроении, в том числе элементы конструкций летательных аппаратов, описываются моделью, для которой характерны большие обобщенные перемещения при малых деформациях. К таким элементам можно отнести, например, части обшивок летальных аппаратов или корпуса авиационных двигателей при рассмотрении эволюции, тонкостенные ротора и т.д. [1, 2].

При рассмотрении эволюции самолета использование связанной с летательным аппаратом подвижной системы координат приводит к необходимости вводить дополнительные инерционные нагрузки (гироскопические, кориолисовы и т.п.). В случае деформируемых систем, к которым относятся корпус и крылья самолета, это приводит к серьезным усложнениям в математическом описании конечного элемента. Если же использовать неподвижную систему координат, связанную с Землей, то необходимости в инерционных нагрузках не возникает, так как движение не раскладывается на переносное и относительное, но при этом необходимо учесть большие повороты, которые совершает самолёт при движении относительно земли.

Целью статьи является разработка такого конечного элемента, в котором перемещения и повороты являются большими, а деформации и, следовательно, относительные изменения размеров элемента являются малыми.

Решению задачи описания больших перемещений элементов конструкций с целью определения перемещений и внутренних силовых факторов в них посвящено множество работ и разработано множество методов. Достаточно полный обзор этих работ и методов представлен в [3, 4]. В частности, в работах [3, 4] упомянут коротационный подход с применением вектора Эйлера для описания конечных поворотов, используемый в данной работе. Данный подход является относительно новым, поэтому еще не достиг того же уровня популярности и известности как Лагранжевы подходы: общий и модифицированный [6, 7].

Не смотря на свою новизну, подход основывается на старой идее разделения смещения как жесткого целого и чисто деформационных движений. Каждый из подходов имеет свои недостатки. Лагранжевы подходы имеют один общий недостаток, который заключается в том, что для геометрически нелинейного анализа каждый элемент должен быть перекодирован с нуля [8]. Основным же недостатком коротационного подхода является проблема отслеживания теневого положения и выбора точки, с которой связывается это положение. Но есть исследования, показывающие, что наилучшим выбором является привязка к центру масс элемента [9].

Из-за возрастающего интереса к такому подходу в последние годы появилось множество работ по разработке обычных [10, 11] и специализированных [12-15]

конечных элементов с применением этого метода. Главными же отличиями подходов, предложенных в данной работе, является возможность получения полностью аналитических соотношений для матрицы жесткости и вектора упругих сил, возможность описания неограниченно больших поворотов, отсутствие необходимости введения дополнительных степеней свободы.

Вектор Эйлера, используемый в работе, является наиболее распространенным и естественным способом для описания конечных поворотов [16-19], но вектор Эйлера имеет недостаток, заключающийся в наличии предельного значения угла поворота (2π). При этом значении угла поворота тензоры, связывающие малые физические повороты с производными кинематических параметров, становятся вырожденными. Для преодоления этой проблемы в данной работе используется модификация, основанная на коррекции вектора Эйлера при приближении к предельному значению. Эта модификация подробно описана в работе [3] и не привязана ни к базовому элементу, ни к количеству узлов, поэтому сразу перейдем к описанию кинематики элемента.

Описание кинематики элемента и варьирование соотношений для малых перемещений и поворотов

Рассмотрим алгоритм получения матрицы касательной жесткости и вектора узловых сил на примере четырёхузлового конечного элемента оболочки. Важно отметить, что предложенные алгоритмы достаточно универсальны и могут быть применены (без значительных изменений) к базовым элементам (необязательно оболочки) с количеством узлов, отличным от четырёх – 3 и более (двухузловой

вариант подробно рассмотрен в работах [3, 4] и является простым частным случаем представленных алгоритмов). При описании больших перемещений элемента целесообразно выделить его характерные состояния (рис. 1):

- (I) исходное положение элемента – элемент не деформирован;
- (II) промежуточное положение элемента – элемент смещен как жесткое целое в положение близкое к деформированному и не деформирован;
- (III) деформированное состояние элемента – сечения получили малые перемещения и повороты относительно состояния (II).

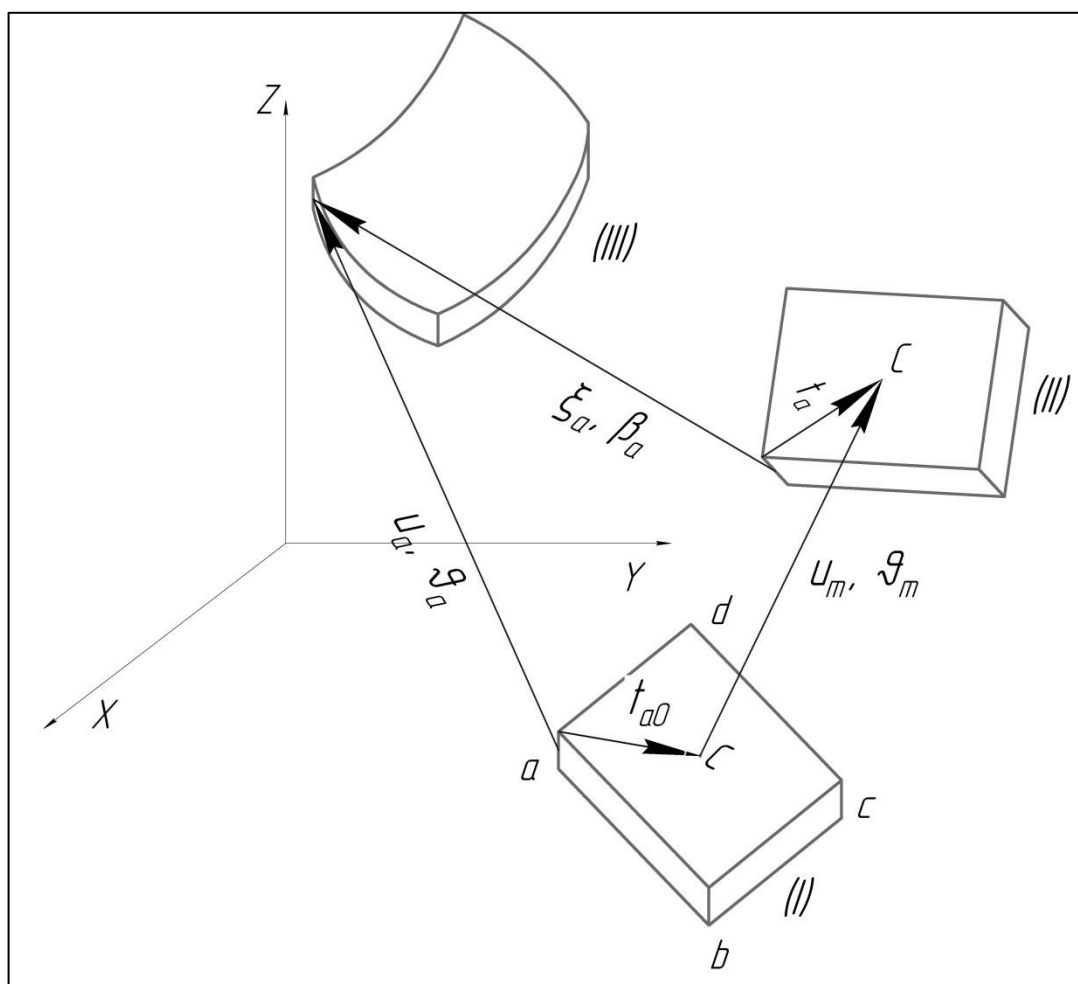


Рис.1 – Конечный элемент в исходном (I), смещенном (II) и деформированном (III) состояниях (\mathbf{u}_a , \mathbf{g}_a и т.д. – векторы перемещений и векторы Эйлера узла, ξ_a , β_a и т.д. – векторы малого относительного перемещения и поворота)

Для среднего сечения в промежуточном положении (II) элемента принимается, что перемещение равно среднему арифметическому узловых перемещений, а поворот равен среднему арифметическому узловых поворотов:

$$\mathbf{u}_m = \frac{\mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b + \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_d}{4}, \vartheta_m = \frac{\vartheta_a + \vartheta_b + \vartheta_c + \vartheta_d}{4}$$

Такой выбор промежуточного состояния сделан с целью сохранения равноправности узлов конечного элемента. Согласно рис.1 векторы малых относительных перемещений находятся как разности положений в состояниях (II) и (III) (на примере узла «а»):

$$\begin{aligned} \xi_a &= \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_m - \mathbf{t}_{a0} + \mathbf{L}(\vartheta_m) \cdot \mathbf{t}_{a0} \\ \xi_a &= \frac{3\mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_d}{4} + (\mathbf{L}(\vartheta_m) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{a0}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{L}(\vartheta) = \mathbf{E} \cos(|\vartheta|) + \frac{1 - \cos(|\vartheta|)}{|\vartheta|^2} \vartheta \vartheta + \frac{\sin(|\vartheta|)}{|\vartheta|} \vartheta \times \mathbf{E}$ – тензор поворота из положения

(I) в положение (II), \mathbf{t}_{a0} – вектор, направленный из узла «а» к центру тяжести элемента.

Аналогично для остальных узлов:

$$\begin{aligned} \xi_b &= \frac{3\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a}{4} + (\mathbf{L}(\vartheta_m) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{b0} \\ \xi_c &= \frac{3\mathbf{u}_c - \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b}{4} + (\mathbf{L}(\vartheta_m) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{c0} \\ \xi_d &= \frac{3\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_c}{4} + (\mathbf{L}(\vartheta_m) - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{t}_{d0} \end{aligned}$$

Вектор малого поворота нельзя вычислять как приращение вектора Эйлера, этот вектор согласно [8, 20] связан с приращением вектора Эйлера тензором П. А.

Жилина $\mathbf{T}(\vartheta)$:

$$\left. \begin{aligned} \beta_a &= \mathbf{T}(\vartheta_m) \cdot (\vartheta_a - \vartheta_m) \\ \beta_b &= \mathbf{T}(\vartheta_m) \cdot (\vartheta_b - \vartheta_m) \\ \beta_c &= \mathbf{T}(\vartheta_m) \cdot (\vartheta_c - \vartheta_m) \\ \beta_d &= \mathbf{T}(\vartheta_m) \cdot (\vartheta_d - \vartheta_m) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\beta_a + \beta_c) = -(\beta_b + \beta_d), \quad (1)$$

$$\text{где } \mathbf{T}(\vartheta) = \mathbf{E} \frac{\sin(|\vartheta|)}{|\vartheta|} + \frac{|\vartheta| - \sin(|\vartheta|)}{|\vartheta|^3} \vartheta \vartheta + \frac{1 - \cos(|\vartheta|)}{|\vartheta|^2} \vartheta \times \mathbf{E}.$$

Отметим, что вид соотношения, связывающего между собой малые повороты β , обусловлен введенной ранее гипотезой о повороте в промежуточном положении (II).

Соотношение (1) не может быть применено при использовании модификации, основанной на корректировке вектора Эйлера при достижении предельного значения, поскольку векторы Эйлера могут быть скорректированы в разные моменты условного времени.

Повороты в узлах конечного элемента являются большими, но относительный поворот мал из-за малости деформаций. Будем считать, что поворот узла «а» получается как некий средний (большой) поворот \mathbf{L}_m из (I) в (II), а затем дополнительный (малый) поворот \mathbf{L}_1 (аналогично для остальных узлов):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_a &= \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_m \\ \mathbf{L}_b &= \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{L}_m \\ \mathbf{L}_c &= \mathbf{L}_3 \cdot \mathbf{L}_m \\ \mathbf{L}_d &= \mathbf{L}_4 \cdot \mathbf{L}_m \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) с учетом малости дополнительного поворота следует (на примере пары узлов «а» и «b»):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_b \mathbf{L}_a^T &= \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{L}_m \mathbf{L}_m^T \cdot \mathbf{L}_1^T = \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{L}_1^T \\ \left(\mathbf{L}_b \mathbf{L}_a^T \right)_x &= \left(\mathbf{L}_2(\vartheta_2) \cdot \mathbf{L}_1^T(\vartheta_1) \right)_x = \left(\mathbf{L}_2(\vartheta_2) \cdot \mathbf{L}_1(-\vartheta_1) \right)_x \\ \left(\mathbf{L}_2(\vartheta_2) \cdot \mathbf{L}_1(-\vartheta_1) \right)_x &\approx \left(\mathbf{L}_{21}(\vartheta_2 - \vartheta_1) \right)_x \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) можно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned} -2 \frac{\sin(|\vartheta_2 - \vartheta_1|)}{|\vartheta_2 - \vartheta_1|} (\vartheta_2 - \vartheta_1) &\approx \left(\mathbf{L}_b \mathbf{L}_a^T \right)_x \Rightarrow (\vartheta_2 - \vartheta_1) \approx -\frac{1}{2} \frac{|\vartheta_2 - \vartheta_1|}{\sin(|\vartheta_2 - \vartheta_1|)} \left(\mathbf{L}_b \mathbf{L}_a^T \right)_x \\ \sin(|\vartheta_2 - \vartheta_1|) &= \frac{1}{2} \left| \left(\mathbf{L}_b \mathbf{L}_a^T \right)_x \right|; |\vartheta_2 - \vartheta_1| = \arcsin \left(\frac{1}{2} \left| \left(\mathbf{L}_b \mathbf{L}_a^T \right)_x \right| \right) \\ &\downarrow \\ (\vartheta_2 - \vartheta_1) &\approx -\frac{\arcsin \left(\frac{1}{2} \left| \left(\mathbf{L}_b \mathbf{L}_a^T \right)_x \right| \right)}{\left| \left(\mathbf{L}_b \mathbf{L}_a^T \right)_x \right|} \left(\mathbf{L}_b \mathbf{L}_a^T \right)_x \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить связь для малых дополнительных поворотов, используя другие пары узлов, но для четырёхузлового элемента (с учетом принятых ранее допущений о перемещении и повороте в промежуточном положении (II)) можно составить лишь 3 подобных независимых уравнения. Такая система 3 векторных уравнений дополняется соотношением, аналогичным (1), т.к. векторы малого поворота $\beta_{a,b,c,d}$ и малого дополнительного поворота $\vartheta_{1,2,3,4}$ имеют одинаковый смысл ($\beta_a = \vartheta_1$ и т.д.). Такая система четырёх векторных уравнений позволяет определить малые дополнительные повороты узлов. Отметим, что предложенный авторами подход к вычислению малых поворотов не является единственно возможным. Однако в работе был использован именно этот вариант в

виду своей гибкости, т.к. такой подход не требует введения дополнительных степеней свободы и может успешно применяться для произвольного числа узлов (без значительных изменений), что позволяет применять в качестве базового элемента практически любой конечный элемент оболочки.

Варьируя соотношения для малых относительных перемещений ξ можно получить:

$$\begin{aligned}\Delta\xi_a &= \frac{3\Delta\mathbf{u}_a - \Delta\mathbf{u}_b - \Delta\mathbf{u}_c - \Delta\mathbf{u}_d}{4} + \Delta\varphi_m \times \mathbf{t}_a; \mathbf{t}_a = \mathbf{L}_a \cdot \mathbf{t}_{a0} \\ \Delta\xi_b &= \frac{3\Delta\mathbf{u}_b - \Delta\mathbf{u}_c - \Delta\mathbf{u}_d - \Delta\mathbf{u}_a}{4} + \Delta\varphi_m \times \mathbf{t}_b; \mathbf{t}_b = \mathbf{L}_b \cdot \mathbf{t}_{b0} \\ \Delta\xi_c &= \frac{3\Delta\mathbf{u}_c - \Delta\mathbf{u}_d - \Delta\mathbf{u}_a - \Delta\mathbf{u}_b}{4} + \Delta\varphi_m \times \mathbf{t}_c; \mathbf{t}_c = \mathbf{L}_c \cdot \mathbf{t}_{c0} \\ \Delta\xi_d &= \frac{3\Delta\mathbf{u}_d - \Delta\mathbf{u}_a - \Delta\mathbf{u}_b - \Delta\mathbf{u}_c}{4} + \Delta\varphi_m \times \mathbf{t}_d; \mathbf{t}_d = \mathbf{L}_d \cdot \mathbf{t}_{d0} \\ \Delta\varphi_m &\approx \frac{\Delta\varphi_a + \Delta\varphi_b + \Delta\varphi_c + \Delta\varphi_d}{4} = \frac{1}{4} (\mathbf{T}_a \cdot \Delta\vartheta_a + \mathbf{T}_b \cdot \Delta\vartheta_b + \mathbf{T}_c \cdot \Delta\vartheta_c + \mathbf{T}_d \cdot \Delta\vartheta_d)\end{aligned}\quad (4)$$

При варьировании соотношений для малых поворотов β следует учесть, что малые векторы Эйлера имеют смысл «физических» поворотов, т.е.:

$$\begin{aligned}\Delta\beta_a = \Delta\vartheta_1 = \Delta\varphi_1; \varphi_1 = \varphi_a - \varphi_m; \varphi_1 &= \frac{3\varphi_a - \varphi_b - \varphi_c - \varphi_d}{4} \\ \Delta\beta_a &= \frac{3\Delta\varphi_a - \Delta\varphi_b - \Delta\varphi_c - \Delta\varphi_d}{4} \\ \Delta\beta_b &= \frac{3\Delta\varphi_b - \Delta\varphi_c - \Delta\varphi_d - \Delta\varphi_a}{4} \\ \Delta\beta_c &= \frac{3\Delta\varphi_c - \Delta\varphi_d - \Delta\varphi_a - \Delta\varphi_b}{4} \\ \Delta\beta_d &= \frac{3\Delta\varphi_d - \Delta\varphi_a - \Delta\varphi_b - \Delta\varphi_c}{4}\end{aligned}\quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) удобно представить в матричном виде:

вычисления этих производных приводят для матрицы касательной жесткости к весьма громоздкому коду. В связи с этим предлагается использовать приближённое выражение. Если при варьировании (6) пренебречь изменением матрицы $[\mathbf{K}_{II}]$ (т.к. векторы обобщенных перемещений являются малыми), то

$$\Delta^2 U \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta \xi_a \\ \Delta \beta_a \\ \Delta \xi_b \\ \Delta \beta_b \\ \Delta \xi_c \\ \Delta \beta_c \\ \Delta \xi_d \\ \Delta \beta_d \end{pmatrix}^T [\mathbf{K}_{II}] \begin{pmatrix} \Delta \xi_a \\ \Delta \beta_a \\ \Delta \xi_b \\ \Delta \beta_b \\ \Delta \xi_c \\ \Delta \beta_c \\ \Delta \xi_d \\ \Delta \beta_d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \vartheta_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \vartheta_b \\ \Delta \mathbf{u}_c \\ \Delta \vartheta_c \\ \Delta \mathbf{u}_d \\ \Delta \vartheta_d \end{pmatrix}^T [\mathbf{F}]^T [\mathbf{K}_{II}] [\mathbf{F}] \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_a \\ \Delta \vartheta_a \\ \Delta \mathbf{u}_b \\ \Delta \vartheta_b \\ \Delta \mathbf{u}_c \\ \Delta \vartheta_c \\ \Delta \mathbf{u}_d \\ \Delta \vartheta_d \end{pmatrix} \quad (7)$$

Таким образом, согласно (7) приближённое выражение матрицы касательной жёсткости имеет вид $[\mathbf{K}_t] \approx [\mathbf{F}]^T [\mathbf{K}_{II}] [\mathbf{F}]$.

Узловыми силами и моментами являются первые производные выражения (6) по малым перемещениям, взятые с обратным знаком:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{M}_a \\ \mathbf{P}_b \\ \mathbf{M}_b \\ \mathbf{P}_c \\ \mathbf{M}_c \\ \mathbf{P}_d \\ \mathbf{M}_d \end{pmatrix} = -[\mathbf{K}_{II}] \begin{pmatrix} \xi_a \\ \beta_a \\ \xi_b \\ \beta_b \\ \xi_c \\ \beta_c \\ \xi_d \\ \beta_d \end{pmatrix}$$

Но при описании больших поворотов с помощью векторов Эйлера вместо обычных (классических) моментов должны использоваться обобщённые моменты:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_a^* &= \mathbf{T}_a^T \cdot \mathbf{M}_a \\ \mathbf{M}_b^* &= \mathbf{T}_b^T \cdot \mathbf{M}_b \\ \mathbf{M}_c^* &= \mathbf{T}_c^T \cdot \mathbf{M}_c \\ \mathbf{M}_d^* &= \mathbf{T}_d^T \cdot \mathbf{M}_d\end{aligned}$$

Поэтому в окончательном выражении для вектора узловых сил учтены соответствующие матричные множители:

$$\mathbf{P}_{tang} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_a \\ \mathbf{M}_a^* \\ \mathbf{P}_b \\ \mathbf{M}_b^* \\ \mathbf{P}_c \\ \mathbf{M}_c^* \\ \mathbf{P}_d \\ \mathbf{M}_d^* \end{pmatrix} = -diag[\mathbf{E}, \mathbf{T}_a^T, \mathbf{E}, \mathbf{T}_b^T, \mathbf{E}, \mathbf{T}_c^T, \mathbf{E}, \mathbf{T}_d^T][\mathbf{K}_{II}] \begin{pmatrix} \xi_a \\ \beta_a \\ \xi_b \\ \beta_b \\ \xi_c \\ \beta_c \\ \xi_d \\ \beta_d \end{pmatrix}$$

Тестовые примеры и сравнение результатов

Для верификации матрицы касательных жесткостей и вектора сил была решена тестовая задача №1. Гибкая пластина консольно закреплена и находится под действием собственного веса. Схема тестовой задачи представлена на рисунке 2. Исходные данные: $a = 60$ мм, $b = 200$ мм, толщина $h = 3$ мм, $\mu = 0.3$, $E = 2e8$ Па, $\rho = 7850$ кг/м³, $g = 9.81$ м/с². Пластина была разбита на 6×20 элементов. Аналогичная задача была решена в конечно-элементном комплексе ANSYS (с таким же разбиением) с использованием конечного элемента Shell181 (рис.3, 4). В таблице 1 представлено сравнение максимальных перемещений, полученных решений.

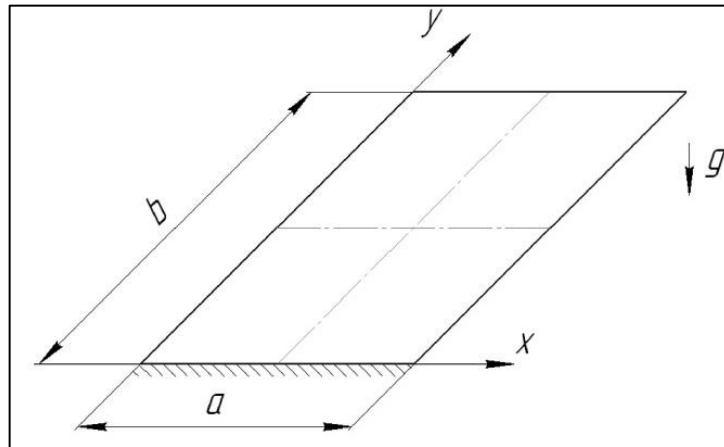


Рисунок 2 – Схема тестового примера №1

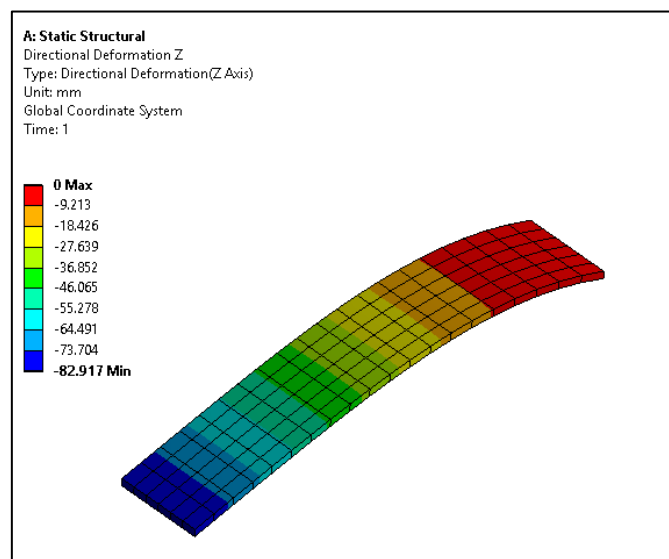


Рисунок 3. Распределение перемещений в ANSYS (проекция на ось Z – u_z)

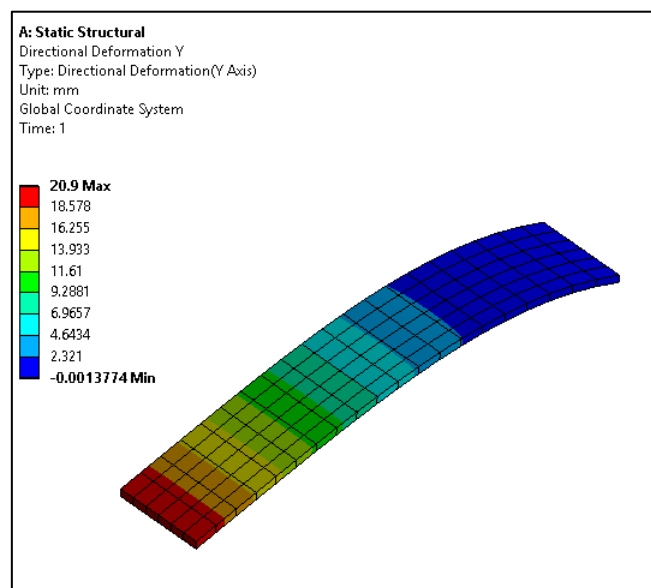


Рисунок 4. Распределение перемещений в ANSYS (проекция на ось Y – u_y)

Таблица 1

	max u_y , мм	max u_z , мм
Ansyes	20.9	82.917
Разработанный элемент	20.87	82.9
Погрешность, %	0.14	0.03

Из таблицы 1 видно, что результаты хорошо совпадают, что подтверждает корректность полученных соотношений.

Далее была решена тестовая задача №2, которая заключалась в рассмотрении пластины-маятника (рис. 5). Исходные данные: $a = 300$ мм, $b = 800$ мм, толщина $h = 10$ мм, $\mu = 0.3$, $E = 1e11$ Па, $\rho = 7850$ кг/м³, $g = 9.81$ м/с². Пластина была разбита на 4×8 элементов. Пластина начинала движение из горизонтального состояния (рис. 5) под действием силы тяжести, рассматривалось движение в течение 1 секунды. Контроль решения проводился по закону сохранения энергии.

Поскольку в данной работе не описана процедура получения согласованной матрицы масс, то для упрощения будем использовать вариант несогласованной диагональной матрицы масс. Тогда модель примет вид точечных масс, которые не меняются при повороте системы, т.е. нет необходимости учитывать вращение такой матрицы масс.

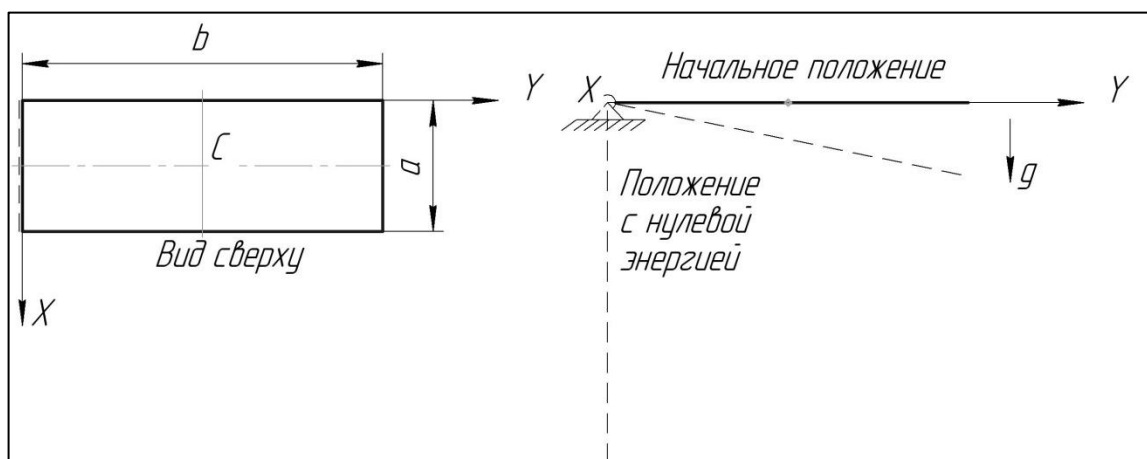


Рисунок 5. Схема тестового примера №2

На рисунке 6 представлена суммарная энергия системы, а также кинетическая и потенциальная (энергия положения и деформаций). Из рисунка видно, что на рассматриваемом временном отрезке энергия системы сохраняется, что свидетельствует о корректности решения.

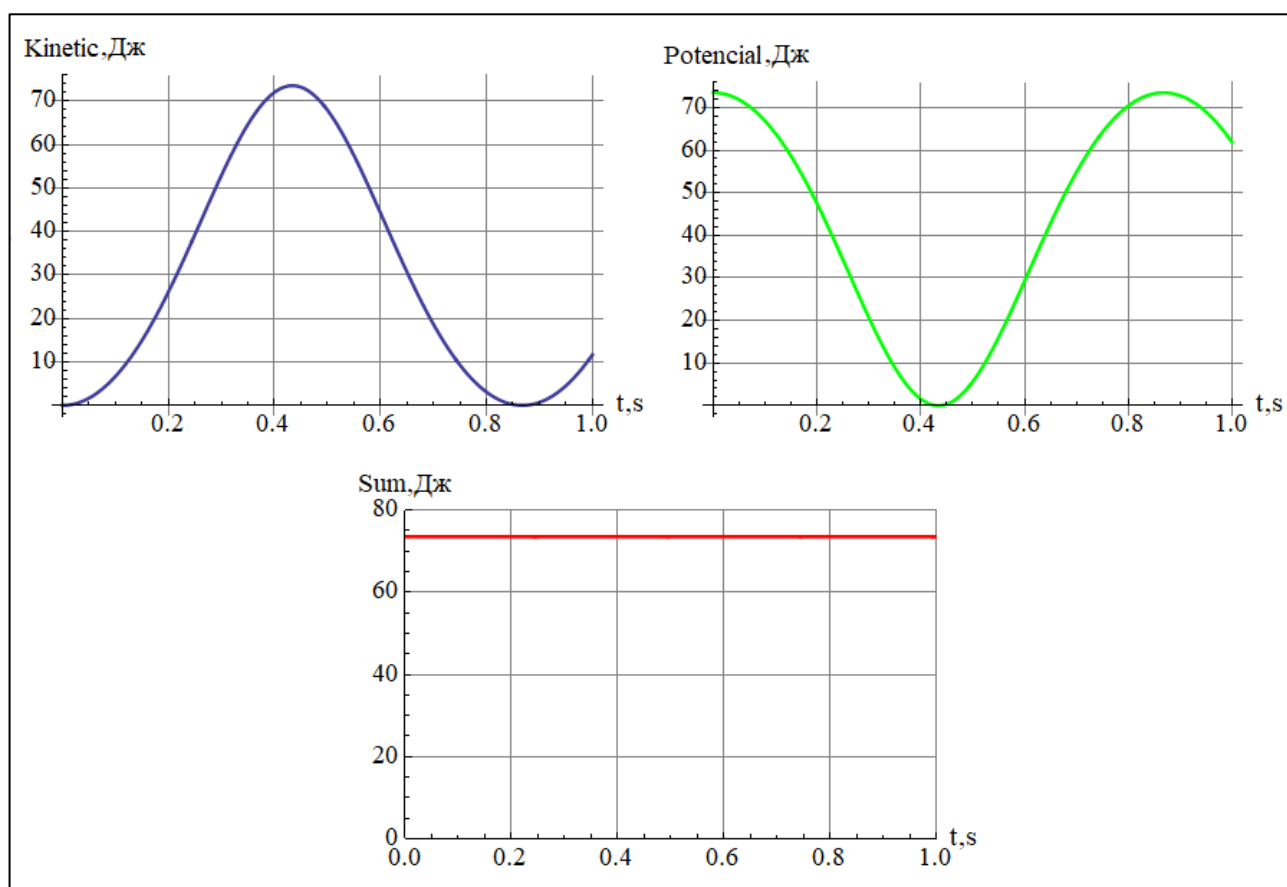


Рисунок 6. Полная энергия системы

Как было ранее упомянуто, в данной работе для описания конечных поворотов используется вектор Эйлера, а алгоритмы построены таким образом, чтобы разработанные элементы могли использоваться для описания неограниченно больших поворотов. Для этого используется модификация, основанная на коррекции вектора Эйлера при приближении к предельному значению. Чтобы подтвердить работоспособность элемента для случая поворотов, превышающих величину 2π , рассмотрим еще один пример (рис. 7).

На рисунке 7 изображена пластина с теми же параметрами, что и на рисунке 5, но не учитывается сила тяжести пластины, пластина раскручивается до скорости 400 об/мин за 0.5 секунды, затем в интервале от 0.5 до 1 секунду выдерживается постоянная скорость вращения. Результаты расчета представлены на рисунке 8. Из рисунка 8а видно, что при приближении к предельному значению происходит коррекция вектора Эйлера, при этом сохраняется непрерывность угловой скорости и ускорения (рис. 8б, 8в), что полностью соответствует идее модификации, подробно описанной в работе [3].

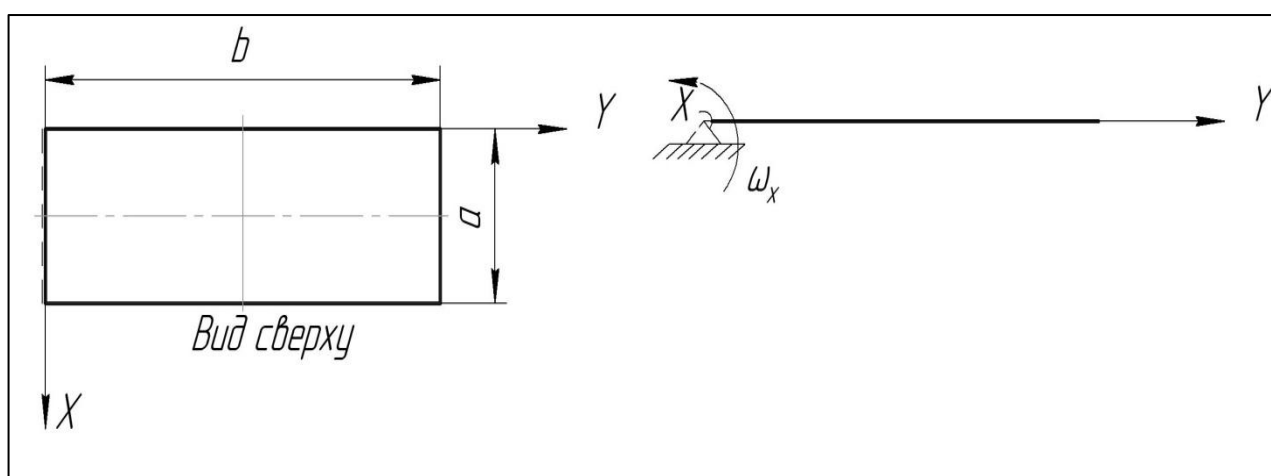


Рисунок 7. Схема тестового примера №3

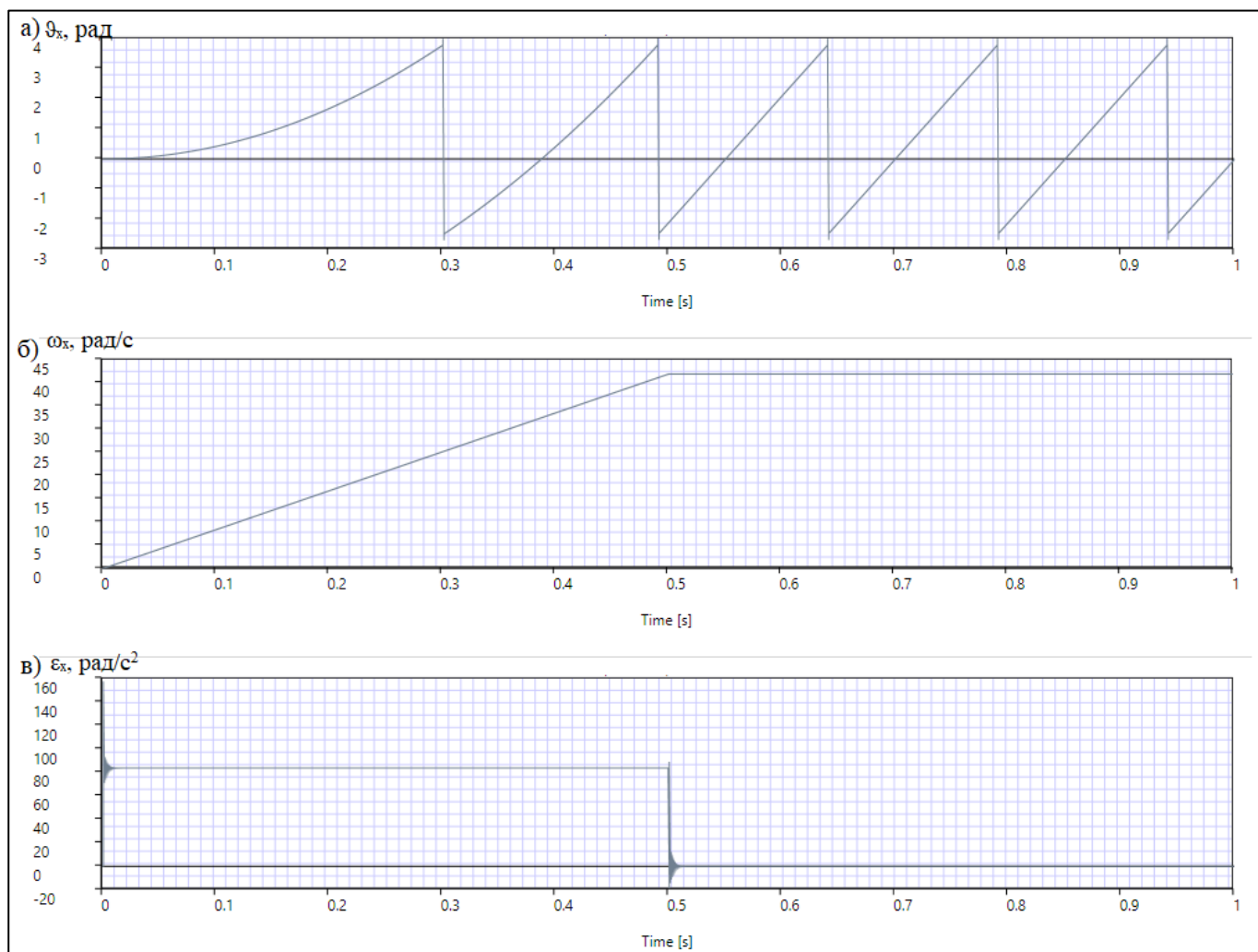


Рисунок 8. а) – график изменения ϑ_x ; б) – график изменения угловой скорости ω_x ; в) – график изменения углового ускорения ε_x

Заключение

В работе представлен алгоритм вывода касательной матрицы жесткости и вектора упругих сил геометрически нелинейного конечного элемента оболочки. Вывод представлен на примере четырёхузлового конечного элемента, однако алгоритмы носят довольно общий характер и могут быть применены без значительных изменений к практически любому базовому элементу (необязательно оболочки). Выражения для матрицы касательной жесткости и вектора упругих сил

выведены в замкнутом аналитическом виде, что является неоспоримым преимуществом перед аналогами. Для описания конечных поворотов был использован вектор Эйлера, проблема предельного значения угла поворота 2π при описании конечных поворотов вектором Эйлера была преодолена с помощью использования модификации, основанной на коррекции вектора Эйлера при приближении к предельному значению поворота.

По результатам решения тестовых задач можно сделать вывод о корректности выведенных соотношений и достаточно хорошей точности разработанного элемента, что позволяет успешно его применять для расчета элементов конструкций машин (в том числе летательных аппаратов), подверженных большим обобщенным перемещениям при малых деформациях. Кроме того, можно утверждать, что разработанный элемент обладает высокой производительностью по сравнению с аналогами благодаря обзримым замкнутым аналитическим выражениям для матриц касательных жесткостей и вектора узловых сил.

Благодарность

Данная работа проведена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках гранта РФФИ № 18-31-00128 мол_а.

Библиографический список

1. Чжунбум Р. Расчет колебаний составных оболочек вращения с соединительными шпангоутами по методу конечных элементов // Труды МАИ. 2013. № 69. URL:

<http://trudymai.ru/published.php?ID=43071>

2. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98866>

3. Низаметдинов Ф.Р., Сорокин Ф.Д. Особенности применения вектора Эйлера для описания больших поворотов при моделировании элементов конструкций летательных аппаратов на примере стержневого конечного элемента // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98753>

4. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832>

5. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней. - СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008. - 95 с.

6. Felippa C.A. A systematic approach to the element-independent corotational dynamics of finite elements. Technical Report CU-CAS-00-03, Center for Aerospace Structures, 2000, 42 p.

7. Brunet M., Sabourin F. Analysis of a rotation-free 4-node shell element // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, vol. 66, no. 9, pp. 1483 - 1510.

8. Felippa C.A., Crivelli L.A., Haugen B. A survey of the core-congruential formulation for geometrically nonlinear TL finite elements // Archives of Computational Methods in Engineering, 1994, vol. 1, pp. 1 - 48.
9. B. Fraeijs de Veubeke. The dynamics of flexible bodies // International Journal of Engineering Science, 1976, vol. 14, pp. 895 - 913.
10. Felippa C.A., Haugen B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, vol. 194, no. 21, pp. 2285 – 2335.
11. Li Z.X., Izzuddin B.A., Vu-Quoc L. A 9-node co-rotational quadrilateral shell element // Computational Mechanics, 2008, vol. 42, no. 6, pp. 874 - 884.
12. Rankin C. Application of Linear Finite Elements to Finite Strain Using Corotation // AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 7th, 2006, pp. 1 - 28.
13. Belytschko T., Glaum L.W. Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis // Computers & Structures, 1979, vol. 10, pp. 175 - 182.
14. Elkaranshawy H.A., Dokainish M.A. Corotational finite element analysis of planar flexible multibody systems // Computers & structures, 1995, vol. 54, pp. 881 - 890.
15. Le T.N., Battini J.M., Hjjaj M. Corotational formulation for nonlinear dynamics of beams with arbitrary thin-walled open cross-sections // Computers & Structures, 2014, vol. 134, pp. 112 - 127.
16. Сорокин Ф.Д. Особенности рационального способа описания больших поворотов в задачах нелинейной динамики роторных машин // III Международная

Школа-конференция молодых ученых «Нелинейная динамика машин»-School-NDM – 2016. Сборник трудов. (Москва, 12-15 апреля 2016). – М.: Институт машиноведения им. А.А. Благонравова, 2016. С. 87 – 93.

17. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. - СПб.: Нестор, 2001. - 276 с.

18. Rankin C.C., Brogan F.A. An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotation // Journal of Pressure Vessel Technology-Transactions of The ASME, 1986, vol. 108, no. 2, pp. 165 - 174.

19. Crisfield M.A. Nonlinear Finite Element Analysis of Solid and Structures, John Wiley & Sons, Chichester, 1996, vol. 2, 493 p.

20. Geradin M., Cardona A. Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach, Wiley, New York, 2000, 327 p.