

УДК 621.372.061

Моделирование САУ ядерной энергетической установкой в СКМ спектральным методом

В.В. Рыбин

Аннотация

Для решения современных энергоемких задач работы космических аппаратов требуется энергия, дать которую в настоящее время способны только ядерные энергетические установки (ЯЭУ). Спектральный метод удобен для моделирования систем управления ЯЭУ.

В настоящее время для моделирования систем управления спектральным методом применяются различные системы компьютерной математики (СКМ) и пакеты их расширения. В данной статье спектральный метод применяется для моделирования САУ ядерной энергетической установкой при условии ее описания линейными уравнениями точечной кинетики. Для моделирования такой системы применяется пакет расширения MLSY_SM СКМ Mathcad.

Ключевые слова

системы автоматического управления; спектральная форма математического описания; системы компьютерной математики; дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья, ядерная энергетическая установка.

1. Введение

Для решения современных энергоемких задач работы космических аппаратов требуется энергия, дать которую в настоящее время способны только ядерные энергетические установки (ЯЭУ). Спектральный метод удобен для моделирования систем управления ЯЭУ.

В настоящее время пакеты расширения MLSY_SM, Spektr_SM+Simulink+Matlab, Spektr_SM+VisSim+Mathcad СКМ [1-8] применяются для расчета нестационарных непрерывных, дискретных и непрерывно-дискретных систем управления летательными аппаратами с сосредоточенными параметрами спектральным методом [9-14]. В работе [15] спектральный метод развит на нестационарные системы управления, содержащие дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья, а для моделирования дробных

систем управления летательными аппаратами модернизированы пакеты расширения MLSY_SM, Spektr_SM+Simulink+Matlab, Spektr_SM+VisSim+Mathcad СКМ.

В данной статье спектральный метод применяется для моделирования САУ ядерной энергетической установкой при условии ее описания линейными уравнениями точечной кинетики [16-23] и использования дробного ПИД регулятора [24]. Для моделирования такой системы применяется пакет расширения MLSY_SM СКМ Mathcad.

2. Описание нейтронной кинетики ядерного реактора в однокрупном диффузионном приближении

Рассмотрим описание переноса нейтронов в однокрупном диффузионном приближении, относящегося к случаю, когда коэффициент диффузии можно принять не зависящим от пространственных переменных [16-20]:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \Phi(\theta, \vec{r})}{\partial \theta} = D \nabla^2 \Phi(\theta, \vec{r}) - \sum_a (t, \vec{r}) \Phi(\theta, \vec{r}) + (1 - \beta_{\text{эфф}}) k_{\infty}(\theta, \vec{r}) \sum_a (\theta, \vec{r}) \Phi(\theta, \vec{r}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\theta, \vec{r}).$$

Перепишем это уравнение для плотности нейтронов N (с учетом того, что $\Phi = N \cdot V$, V - скорость нейтрона) совместно с уравнением для концентрации предшественников запаздывающих нейтронов. Получим:

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = V D \nabla^2 N - \sum_a V N + (1 - \beta_{\text{эфф}}) k_{\infty} \sum_a V N + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i; \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial \theta} = -\lambda_i C_i + \beta_i^{\text{эфф}} k_{\infty} \sum_a V N. \quad (2)$$

В уравнениях (1)-(2): $N(\theta, \vec{r})$ - плотность тепловых нейтронов (мощность); $C_i(\theta, \vec{r})$ - концентрация ядер-предшественников запаздывающих нейтронов i -той группы; D - коэффициент диффузии; V - средняя скорость нейтронов; \sum_a - сечение поглощения; $\beta_{\text{эфф}}$ - эффективная доля запаздывающих нейтронов; λ_i - постоянная распада ядер-предшественников i -той группы; $\beta_i^{\text{эфф}}$ - эффективная доля запаздывающих нейтронов i -ой группы; $k_{\infty} = \nu \sum_f / \sum_a$ - коэффициент размножения нейтронов для бесконечной среды, где \sum_f - сечение деления, а ν - среднее число нейтронов.

Эти уравнения, с учетом того, что: квадрат длины диффузии тепловых нейтронов $L^2 = D / \sum_a$; среднее время жизни нейтронов $l = l_0 / k_{\text{эфф}}$; время жизни нейтронов в среде конечных размеров $l_0 = l_{\infty} / (1 + L^2 B^2)$, где B^2 - материальный лапласиан; эффективный коэффициент размножения нейтронов $k_{\text{эфф}} = k_{\infty} / (1 + L^2 B^2)$; среднее время жизни нейтрона в бесконечной среде $l_{\infty} = 1 / V \cdot \sum_a$, можно записать в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = \frac{L^2}{l \cdot k_{\text{эфф}} \cdot (1 + L^2 B^2)} \nabla^2 N + \left(\frac{k_{\text{эфф}} \cdot (1 + L^2 B^2) - 1}{l \cdot k_{\text{эфф}} \cdot (1 + L^2 B^2)} - \frac{\beta_{\text{эфф}}}{l} \right) N + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i; \quad (3)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial \theta} = -\lambda_i C_i + \frac{\beta_i^{\text{эфф}}}{l} N. \quad (4)$$

Если определить реактивность как $\rho = \frac{k_{\text{эфф}} - 1}{k_{\text{эфф}}}$, то уравнение (3) можно записать в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = \frac{L^2}{l \cdot k_{\text{эфф}} \cdot (1 + L^2 B^2)} \nabla^2 N + \left(\frac{\rho - \beta_{\text{эфф}}}{l} + \frac{L^2 B^2}{l \cdot k_{\text{эфф}} \cdot (1 + L^2 B^2)} \right) N + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i. \quad (5)$$

Предположим, что функции $N(\theta, \vec{r})$ и $C_i(\theta, \vec{r})$ допускают разложение переменных, т.е. их можно представить в виде

$$N(\theta, \vec{r}) = n(\theta) \cdot f(\vec{r}), \quad C_i(\theta, \vec{r}) = c_i(\theta) \cdot \mu_i(\vec{r}). \quad (6)$$

Это справедливо, когда реактор близок к критическому состоянию и при этом нет значительных локальных возмущений реактивности.

Подставляя (6) в (4) и (5), получим

$$\frac{dc_i(\theta)}{d\theta} = -\lambda_i c_i(\theta) + \frac{\beta_i^{\text{эфф}}}{l} n(\theta) \frac{f(\vec{r})}{\mu_i(\vec{r})}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \theta} = & \frac{L^2}{l \cdot k_{\text{эфф}} \cdot (1 + L^2 B^2)} \frac{\nabla^2 f(\vec{r})}{f(\vec{r})} n + \\ & + \left(\frac{\rho - \beta_{\text{эфф}}}{l} + \frac{L^2 B^2}{l \cdot k_{\text{эфф}} \cdot (1 + L^2 B^2)} \right) n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i \frac{\mu_i(\vec{r})}{f(\vec{r})}. \end{aligned} \quad (8)$$

В каждой точке реактора функция $\mu_i(\vec{r})$ пропорциональна $f(\vec{r})$. Удобно принять эти функции одинаковыми (т.е. положить $\frac{\mu_i(\vec{r})}{f(\vec{r})} = 1$), а коэффициент пропорциональности включить в $c_i(t)$. Если предположить, что $f(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\nabla^2 f(\vec{r}) + B^2 f(\vec{r}) = 0$, то уравнения (8) и (7) можно записать следующим образом:

$$\frac{dn(\theta)}{d\theta} = \frac{\rho - \beta_{\text{эфф}}}{l} n(\theta) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(\theta), \quad (9)$$

$$\frac{dc_i(\theta)}{d\theta} = -\lambda_i c_i(\theta) + \frac{\beta_i^{\text{эфф}}}{l} n(\theta). \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) описывают динамику активной зоны реактора в точечном приближении. Эти уравнения можно переписать иначе. Так как $\beta_{\text{эфф}} = \sum_{i=1}^6 \beta_i^{\text{эфф}}$, то из уравнения (10) имеем

$$\sum_{i=1}^6 \frac{dc_i(\theta)}{d\theta} = -\sum_{i=1}^M \lambda_i c_i(\theta) + \frac{\beta_{\text{эфф}}}{l} n(\theta). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), получаем вместо системы уравнений (9), (10) следующую систему уравнений:

$$\frac{dn(\theta)}{d\theta} = \frac{\rho}{l} n(\theta) + \sum_{i=1}^6 \frac{dc_i(\theta)}{d\theta}, \quad (12)$$

$$\frac{dc_i(\theta)}{d\theta} = -\lambda_i c_i(\theta) + \frac{\beta_i^{\text{эфф}}}{l} n(\theta). \quad (13)$$

Объединим теперь запаздывающие нейтроны в одну средневзвешенную группу, для которой

$$\beta_{\text{эфф}} = \sum_{i=1}^6 \beta_i^{\text{эфф}}; \quad \bar{\lambda} = \sum_{i=1}^6 \beta_i^{\text{эфф}} \lambda_i / \beta_{\text{эфф}}; \quad \bar{c} = \sum_{i=1}^6 c_i.$$

Тогда, с учетом введенных усреднений, система дифференциальных уравнений (12), (13) 7-го порядка упрощается до системы второго порядка

$$\frac{dn(\theta)}{d\theta} = \frac{\rho}{l} n(\theta) + \frac{d\bar{c}(\theta)}{d\theta}, \quad (14)$$

$$\frac{d\bar{c}(\theta)}{d\theta} = -\bar{\lambda} \bar{c}(\theta) + \frac{\beta_{\text{эфф}}}{l} n(\theta). \quad (15)$$

Под функцией $n(\theta)$ здесь понимается некая осредненная по объему активной зоны интегральная характеристика, например нейтронная мощность реактора.

Уравнение (9), (12), (14) представляют собой нелинейные по мощности реактора уравнения. Если реактивность реактора, работающего на мощности, подвергается небольшим возмущениям, то можно линеаризовать уравнение точечного реактора [17].

Рассмотрим систему, работающую в стационарном состоянии на мощности n_0 в отсутствие какого-либо источника. Такая система является критической и, следовательно, $\rho = 0$. Уравнения кинетики (9), (10) для точечной модели реактора будут иметь не зависящие от времени решения n_0 и c_{i0} , которые можно получить, полагая производную в уравнении (10) равной нулю, т.е.

$$\lambda_i c_{i0} = \frac{\beta_i^{\text{эфф}}}{l} n_0. \quad (16)$$

Этот результат удовлетворяет также уравнению (9) с условиями $\frac{dn(\theta)}{d\theta} = 0$, $\rho = 0$, в чем нетрудно убедиться, суммируя уравнение (16) по i и обозначая $\sum \beta_i^{\text{эфф}} = \beta_{\text{эфф}}$.

Предположим, реактивность меняется с нулевого значения на небольшую величину $\delta\rho(\theta)$, что вызывает небольшое изменение мощности и концентрации предшественников запаздывающих нейтронов, т.е.

$$n(\theta) = n_0 + \delta n(\theta); \quad (17)$$

$$c_i(\theta) = c_{i0} + \delta c_i(\theta). \quad (18)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (9), (10) и используя условия стационарности (16), находим

$$\frac{d\delta n(\theta)}{d\theta} = \frac{\delta\rho(\theta)}{l} (n_0 + \delta n(\theta)) - \frac{\beta_{\text{эфф}}}{l} \delta n(\theta) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \delta c_i(\theta); \quad (19)$$

$$\frac{d\delta c_i(\theta)}{d\theta} = -\lambda_i \delta c_i(\theta) + \frac{\beta_i^{\text{эфф}}}{l} \delta n(\theta). \quad (20)$$

Член $\delta\rho(\theta)\delta n(\theta)/l$ в уравнении (19) имеет второй порядок малости и, следовательно, может быть отброшен, если возмущение реактивности мало. В этом случае уравнения (19) и (20) можно записать в безразмерном нормированном виде

$$\frac{d\tilde{n}(\theta)}{d\theta} + \frac{\beta_{\text{эфф}}}{l} \tilde{n}(\theta) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^6 \beta_i^{\text{эфф}} \tilde{c}_i(\theta) = \frac{1}{l} \delta\rho(\theta); \quad (21)$$

$$\frac{d\tilde{c}_i(\theta)}{d\theta} + \lambda_i \tilde{c}_i(\theta) = \lambda_i \tilde{n}(\theta), \quad (22)$$

где $\tilde{n}(\theta) = \delta n(\theta)/n_0$ - безразмерная нормированная мощность реактора, $\tilde{c}_i(\theta) = \delta c_i(\theta)/c_{i0}$ - нормированное отклонение концентрации ядер-предшественников запаздывающих нейтронов i - ой группы. При $\theta=0$ реактор находится в стационаре, поэтому $\tilde{n}(0) = \tilde{c}_i(0) = 0$.

Уравнения (12), (13) и (14), (15) после линеаризации, по аналогичным причинам, приобретают вид:

$$\frac{d\tilde{n}(\theta)}{d\theta} + \sum_{i=1}^6 \frac{d\tilde{c}_i(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{l} \delta\rho(\theta), \quad (23)$$

$$\frac{d\tilde{c}_i(\theta)}{d\theta} + \lambda_i \tilde{c}_i(\theta) = \lambda_i \tilde{n}(\theta) \quad (24)$$

и

$$\frac{d\tilde{n}(\theta)}{d\theta} + \frac{d\tilde{c}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{l} \delta\rho(\theta), \quad (25)$$

$$\frac{d\tilde{c}(\theta)}{d\theta} = -\bar{\lambda} \tilde{c}(\theta) + \frac{\beta_{\text{эфф}}}{l} \tilde{n}(\theta). \quad (26)$$

Кроме того, из системы (14), (15) при выполнении условия $l \frac{dn(\theta)}{d\theta} \approx 0$ можно

вывести [2] линеаризованное уравнение

$$\frac{d\tilde{n}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\beta_{\text{эфф}}} \left(\frac{d\delta\rho}{d\theta} + \bar{\lambda} \cdot \delta\rho \right), \quad (27)$$

в котором скорость изменения относительной плотности нейтронов пропорциональна возмущению по реактивности и скорости изменения реактивности.

3. Решение линеаризованных уравнений нейтронной кинетики ядерного реактора в точечном приближении спектральным методом

Решение системы дифференциальных уравнений (21)-(22) выполним с использованием спектральной формы математического описания [1-14]. Так как спектральные характеристики производных, входящих в уравнения (21)-(22), с учетом начальных условий вычисляются по правилам:

$$S \left[\frac{\partial \tilde{n}(\theta)}{\partial \theta} \right] = P(t, t) \tilde{N}(t) - \tilde{n}(0) \Delta(t), \quad (28)$$

$$S \left[\frac{\partial \tilde{c}_i(\theta)}{\partial \theta} \right] = P(t, t) \tilde{C}_i(t) - \tilde{c}_i(0) \Delta(t), \quad (29)$$

то, вычисляя спектральные характеристики от левой и правой части уравнений (21) и (22), находим

$$\begin{cases} P(t, t) \tilde{N}(t) - \tilde{n}(0) \Delta(t) + \frac{\beta_{\text{эфф}}}{l} \tilde{N}(t) - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^M \beta_i^{\text{эфф}} \tilde{C}_i(t) = \frac{1}{l} G(t), \\ P(t, t) \tilde{C}_i(t) - \tilde{c}_i(0) \Delta(t) + \lambda_i \tilde{C}_i(t) = \lambda_i \tilde{N}(t). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим НСХ для относительного приращения мощности потока нейтронов

$$\begin{aligned} \tilde{N}(t) = & \left\{ P(t, t) + \frac{\beta_{\text{эфф}}}{l} E - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^M \lambda_i \beta_i^{\text{эфф}} [P(t, t) + \lambda_i E]^{-1} \right\}^{-1} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{l} G(t) + \tilde{n}(0) \Delta(t) + \frac{1}{l} \sum_{i=1}^M \beta_i^{\text{эфф}} \tilde{c}_i(0) [P(t, t) + \lambda_i E]^{-1} \Delta(t) \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

где $G(t)$ - НСХ приращения реактивности. Так как в стационарном режиме $\tilde{n}(0) = 0$ и $\tilde{c}_i(0) = 0$, то НСХ (30) окончательно примет вид:

$$\tilde{N}(t) = W_{\text{кин}}^6(t, t) G(t), \quad (31)$$

где

$$W_{\text{кин}}^6(t, t) = \frac{1}{l} \left[P(t, t) + \frac{\beta_{\text{эфф}}}{l} E - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^6 \lambda_i \beta_i^{\text{эфф}} [P(t, t) + \lambda_i E]^{-1} \right]^{-1} \quad (32)$$

- ДНПФ кинетики нейтронов ядерного реактора, найденная для модели с шестью группами запаздывающих нейтронов. Аналогично, решая спектральным методом системы дифференциальных уравнений (23), (24) и (25), (26) и уравнение (27), находим:

$$W_{\text{кин}}^6(t, t) = \frac{1}{l} \left[E + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i^{\text{эфф}}}{l} [P(t, t) + \lambda_i E]^{-1} \right]^{-1} P^{-1}(t, t) \quad (33)$$

- ДНПФ кинетики нейтронов ядерного реактора, найденная для модели с шестью группами запаздывающих нейтронов и совпадающая с ДНПФ (32),

$$\begin{aligned} W_{\text{кин}}^{11}(t, t) &= \frac{1}{l} \cdot \left[P(t, t) + \frac{\beta^{\text{эфф}}}{l} E - \frac{\bar{\lambda} \cdot \beta^{\text{эфф}}}{l} + (P(t, t) + \bar{\lambda} E)^{-1} \right]^{-1} = \\ &= \frac{1}{l} [P(t, t) + \bar{\lambda} E] \cdot \left[P(t, t) + \left(\bar{\lambda} + \frac{\beta^{\text{эфф}}}{l} \right) E \right]^{-1} P^{-1}(t, t) \end{aligned} \quad (34)$$

- ДНПФ кинетики нейтронов ядерного реактора, найденная для модели с одной средневзвешенной группой запаздывающих нейтронов (вариант 1),

$$W_{\text{кин}}^{12}(t, t) = \frac{1}{\beta^{\text{эфф}}} [E + \bar{\lambda} \cdot P^{-1}(t, t)] \quad (35)$$

- ДНПФ кинетики нейтронов ядерного реактора, найденная для модели в которой скорость изменения относительной плотности нейтронов пропорциональна возмущению по реактивности и скорости изменения реактивности (вариант 2).

На рис. 1. приведен программный модуль $W6JR(t, N)$, реализующий алгоритм (30) вычисления ДНПФ кинетики нейтронов ядерного реактора. Аналогичные модули $W1JR1(t, N)$ и $W1JR2(t, N)$ реализуют алгоритмы (34) и (35) соответственно.

В этих программах: N - порядок усечения матриц ДНПФ; t - длина интервала, на котором вычисляется ДНПФ. В программе $W6JR(t, N)$ $\lambda\beta$ - массив 6-и групп постоянных распада ядер-предшественников и эффективных долей запаздывающих нейтронов, т.е.

$$\lambda\beta = \begin{pmatrix} 0.0124 & 0.0305 & 0.111 & 0.301 & 1.14 & 3.01 \\ 0.0002145 & 0.0014235 & 0.0012740 & 0.0025675 & 0.0007475 & 0.0002730 \end{pmatrix}.$$

```

W6JR(t, N) :=
β ← 0.0065
λ ← 0.001
LB ← λβ
P1 ← SP1PP1(t, N)
E ← identity(N)
for i ∈ 0..5
  C0,i ←  $\frac{LB_{0,i} \cdot LB_{1,i}}{1} \cdot (P1 + LB_{0,i} \cdot E)^{-1}$ 
C ←  $\sum_{k=0}^5 C_{0,k}$ 
W6 ←  $\left( P1 + \frac{\beta}{1} \cdot E - C \right)^{-1} \cdot \frac{1}{1}$ 
W6

```

Рис.1

Процесс изменения относительных значений плотности нейтронов во времени при наличии заданного возмущения по реактивности $\rho(\theta)$, найденный с использованием рассмотренных программ и пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad [1-14], приведен в Листинге 1.

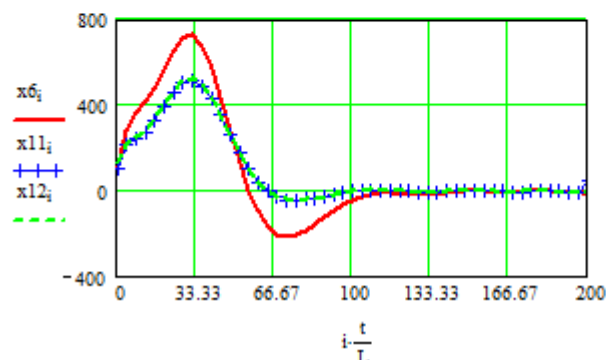
Замечание 1. При решении задач в СКМ Mathcad будем предполагать, что пакет расширения MLSY_SM подключен и настроен, а задачи решаются в ортонормированном базисе полиномов Лежандра.

Листинг 1.

```

t := 200   N := 16   L := 50   θ1 := 0   θ2 := 40   θ3 := 80   i := 0..L
WJR6 := W6JR(t, N)   WJR11 := W1JR1(t, N)   WJR12 := W1JR2(t, N)
ρ(θ) := Φ(θ - θ1) - 2 · Φ(θ - θ2) + Φ(θ - θ3) - возмущение по реактивности.
Uρ := SNXPP1(ρ, N, t)   NBt := SNBPP1(L, N, t)
X6 := WJR6 · Uρ   X11 := WJR11 · Uρ   X12 := WJR12 · Uρ
x6 := NBt · X6   x11 := NBt · X11   x12 := NBt · X12

```



Конец листинга 1.

4. Математическая модель САУ ядерной энергетической установки и спектральные алгоритмы ее описания

Основной задачей автоматического управления ядерной энергетической установкой является управление нейтронной мощностью [16-20]. Для математического моделирования САУ мощностью ядерного реактора из всех сложных и разнообразных процессов рассмотрим только процессы нейтронной кинетики в точечном приближении и тепловые процессы в ядерном реакторе. Управление изменением нейтронной мощности осуществляется изменением положения одного управляющего стержня. Структурная схема САУ ядерного реактора, отвечающая этим условиям, приведена на рис 1.

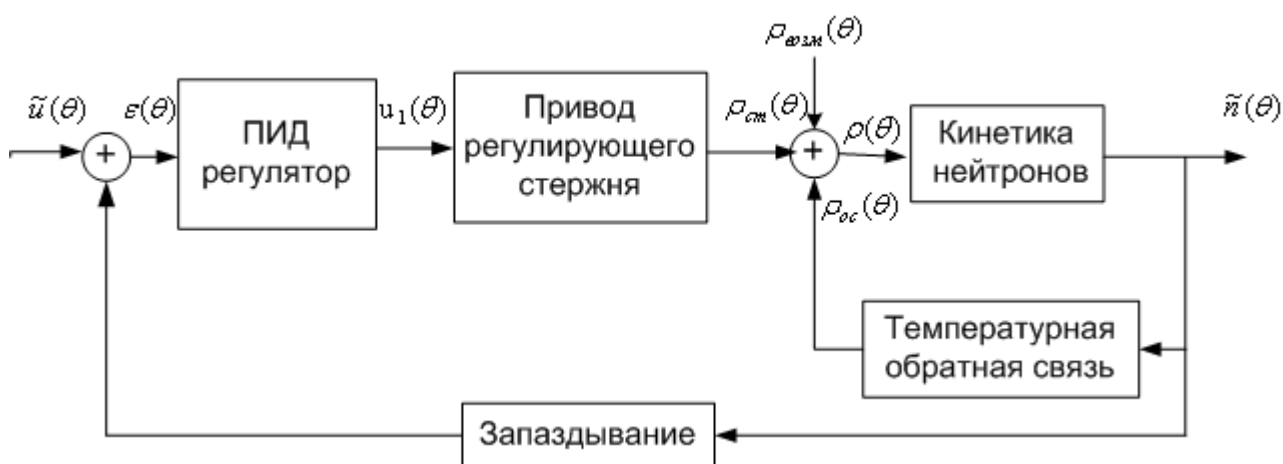


Рис. 1

Если нейтронная мощность реактора пропорциональна плотности потока нейтронов, который равномерно распределен в активной зоне, то для моделирования САУ мощностью ядерного реактора в линейном приближении нужно использовать уравнения точечной кинетики реактора с учетом шести групп запаздывающих нейтронов (21)-(22) или (23)-(24) или модели с одной средневзвешенной группой запаздывающих нейтронов (25)-(26) или (27).

Тепловые процессы учтем через отрицательный температурный эффект реактивности, который опишем следующими уравнениями реактивности [21-23]:

$$\begin{cases} \rho_{oc}(\theta) = -\alpha \cdot T_0 \cdot \tilde{T}(\theta); \\ \tau_{oc} \frac{d\tilde{T}(\theta)}{d\theta} + \tilde{T}(\theta) = \tilde{A} \cdot \tilde{n}(\theta), \end{cases} \quad (36)$$

где α - температурный коэффициент реактивности, T_0 - стационарная температура топлива в активной зоне, $\tilde{T}(\theta) = T(\theta) - T_0$ - нормированное отклонение температуры топлива в активной зоне, τ_{oc} - постоянная времени (инерционность) топлива в активной

зоне, A - безразмерный коэффициент. Систему уравнение (36) в спектральной области при нулевых начальных условиях запишем в виде

$$\begin{cases} G_{oc}(t) = -\alpha \cdot T_0 \cdot G_{\tilde{T}}(t); \\ [\tau_{oc}P(t,t) + E] \cdot G_{\tilde{T}}(t) = A \cdot \tilde{N}(t). \end{cases}$$

Решая эту систему находим НСХ температурной реактивности $\rho_{oc}(\theta)$

$$G_{oc}(t) = W_T \cdot \tilde{N}(t), \quad (37)$$

где ДНПФ температурной обратной связи имеет вид:

$$W_T(t,t) = -\alpha \cdot T_0 A \cdot [\tau_{oc}P(t,t) + E]^{-1}. \quad (38)$$

Управление мощностью реактора через приращение реактивности за счет регулирующего стержня, опишем дифференциальным уравнением:

$$\tau_{np} \frac{d^2 \rho_{cm}}{d\theta^2} + \frac{d\rho_{cm}}{d\theta} = k_{np} u_1(\theta), \quad (39)$$

где k_{np}, τ_{np} - коэффициент скоростной эффективности и постоянная времени привода регулирующего стержня, соответственно. Решение уравнения (39) в спектральной области запишем в виде

$$G_{cm}(t) = W_{pc}(t,t) \cdot G_{u_1}(t), \quad (40)$$

где ДНПФ регулирующего стержня

$$W_{pc}(t,t) = k_{np} [\tau_{np}P(t,t) + E] \cdot P^{-1}(t,t). \quad (41)$$

ПИД регулятор можно использовать для оптимизации САУ ядерного реактора [24]. Его можно задать уравнением

$$u_1(\theta) = k_1 + k_2 \mathfrak{I}_{0+|\theta}^\alpha \varepsilon(\theta) + k_3 I_{0+|\theta}^\mu \varepsilon(\theta). \quad (42)$$

где $I_{0+|\theta}^\mu \varepsilon(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\theta \frac{\varepsilon(\tau)}{(\theta-\tau)^{1-\mu}} d\tau$ - дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка μ ,

$\mathfrak{I}_{0+|\theta}^\alpha \varepsilon(\theta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\theta} \int_0^\theta \frac{\varepsilon(\tau)}{(\theta-\tau)^\alpha} d\tau$ - дробная производная Римана-Лиувилля порядка α .

Это уравнение в спектральной области можно представить в виде

$$U_1(t) = W_{\text{ПД}}(t,t) \cdot U_\varepsilon(t), \quad (43)$$

где ДНПФ ПИД регулятора

$$W_{\text{ПД}}(t,t) = k_1 E + k_2 \mathfrak{I}^\alpha(t,t) + k_3 P^{-\mu}(t,t), \quad (44)$$

а

$$P^{-\mu}_{\psi\varphi^*}(h, i, t, t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t \psi^*(i, t, \tau) \int_0^\theta \frac{\varphi(i, t, \tau)}{(\theta - \tau)^{1-\mu}} d\tau d\theta, \quad \mathfrak{I}^\alpha_{\psi\varphi^*}(t, t) = \begin{cases} \mathfrak{I}_{\psi\varphi^*}(t, t) P^{-\mu(1-\alpha)}_{\psi\varphi^*}(t, t), & 0 < \alpha < 1, \\ \mathfrak{I}_{\psi\varphi^*}(t, t), & \alpha = 1. \end{cases}$$

- ДНПФ операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования соответственно [15].

По структурной схеме САУ ядерного реактора, ДНПФ звеньев, входящих в ее состав, находим четыре ДНПФ:

$$W_{\tilde{u}}^{\tilde{n}}(t, t) = \left[E + W_1(t, t) \cdot W_{pc}(t, t) \cdot W_{ПИД}(t, t) \cdot \tau^{-\theta_0}(t, t) \right]^{-1} \times \\ \times W_1(t, t) \cdot W_{pc}(t, t) \cdot W_{ПИД}(t, t), \quad (45)$$

$$W_{\rho_{возм}}^{\tilde{n}}(t, t) = \left[E + W_{кин}(t, t) (W_T(t, t) + W_{pc}(t, t) \cdot W_{ПИД}(t, t) \cdot \tau^{-\theta_0}(t, t)) \right]^{-1} \times \\ \times W_{кин}(t, t), \quad (46)$$

$$W_{\tilde{u}}^{\rho}(t, t) = \left[E + W_2(t, t) \cdot W_{pc}(t, t) \cdot W_{ПИД}(t, t) \cdot \tau^{-\theta_0}(t, t) \cdot W_{кин}(t, t) \right]^{-1} \times \\ \times W_2(t, t) \cdot W_{pc}(t, t) \cdot W_{ПИД}(t, t), \quad (47)$$

$$W_{\rho_{возм}}^{\rho}(t, t) = \left[E + W_2(t, t) \cdot W_{pc}(t, t) \cdot W_{ПИД}(t, t) \cdot \tau^{-\theta_0}(t, t) \cdot W_{кин}(t, t) \right]^{-1} \times \\ \times W_2(t, t), \quad (48)$$

где

$$W_1(t, t) = \left[E + W_{кин}(t, t) \cdot W_T(t, t) \right]^{-1} W_{кин}(t, t), \quad (49)$$

$$W_2(t, t) = \left[E + W_T(t, t) \cdot W_{кин}(t, t) \right]^{-1}. \quad (50)$$

По ДНПФ (45) и (46), НСХ приращения мощности потока нейтронов \tilde{u} и реактивности $\rho_{возм}$, вносимой внешним возмущающим воздействием, находим НСХ для относительного приращения мощности потока нейтронов \tilde{n}

$$\tilde{N}(t) = W_{\tilde{u}}^{\tilde{n}}(t, t) \cdot \tilde{U}(t) + W_{\rho_{возм}}^{\tilde{n}}(t, t) \cdot \tilde{R}(t). \quad (51)$$

По ДНПФ (47) и (48), НСХ приращения мощности потока нейтронов \tilde{u} и реактивности $\rho_{возм}$, вносимой внешним возмущающим воздействием, находим НСХ для относительного приращения реактивности ρ

$$G(t) = W_{\tilde{u}}^{\rho}(t, t) \cdot \tilde{U}(t) + W_{\rho_{возм}}^{\rho}(t, t) \cdot \tilde{R}(t). \quad (52)$$

Заметим, что в качестве ДНПФ кинетики нейтронов ядерного реактора $W_{кин}(t, t)$ в формулах (45)-(50) можно использовать ДНПФ (32)-(35).

Программа и результаты моделирования процессов протекающих в САУ ядерного реактора при управляющем воздействии $u(\theta)$ и при наличии заданного возмущения по

реактивности $\rho(\theta)$, приведены в **Листинге 2** (см. Замечание 1). В этой программе реализованы спектральные алгоритмы для модели ядерного реактора, описываемой уравнениями (21)-(22).

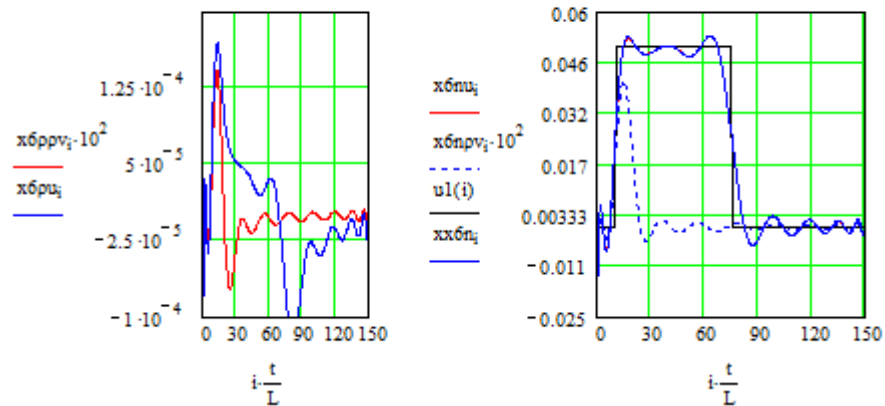
Листинг 2.

```

t := 150 N := 21 L := 400 beta := 0.0065 theta1 := 10 theta2 := 20 theta3 := 75
u(theta) := 0.05 * (Phi(theta - theta1) - Phi(theta - theta3))
U := SNXPP1(u, N, t)
rho(theta) := 0.1 * beta * (Phi(theta - theta1) - Phi(theta - theta2))
R := SNXPP1(rho, N, t)
E := identity(N) NBt := SNBPP1(L, N, t)
P1 := SP1PP1(t, N) CD := SCDPP1(N, 0, t)
I1 := SIbetaPP1(N, t, 1) Ibeta2(mu) := SIbetaPP1(N, t, mu)
A := 0.75 alpha := 5 * 10^-5 T0 := 700 tauoc := 10
WT := alpha * T0 * A * (tauoc * P1 + E)^-1
knp := 0.4 taukp := 0.2 WP := knp * (taukp * P1 + E)^-1
mu := 0.1 mu1 := 1 k1 := 4.1 k2 := 0.25 k3 := 0
Ibeta1(mu1) := if(mu1 = 1, identity(N), SIbetaPP1(N, t, 1 - mu1))
Pbeta1 := Ibeta1(mu1) * SP1PP1(t, N) WR := k1 * E + k2 * Ibeta2(mu) + k3 * Pbeta1
WJR6 := W6JR(t, N)
W61 := (E + WJR6 * WT)^-1 * WJR6 W62 := (E + WT * WJR6)^-1
WC6nu := (E + W61 * WP * WR * CD)^-1 * (W61 * WP * WR)
WC6npv := (E + W61 * WP * WR * CD)^-1 * W61
WC6pu := (E + W62 * WP * WR * CD * WJR6)^-1 * W62 * (WP * WR)
WC6ppv := (E + W62 * WP * WR * CD * WJR6)^-1 * W62
X6nu := WC6nu * U X6npv := WC6npv * R X6n := X6nu + X6npv
x6nu := NBt * X6nu x6npv := NBt * X6npv xx6n := NBt * X6n
X6pu := WC6pu * U X6ppv := WC6ppv * R X6p := X6pu + X6ppv
x6pu := NBt * X6pu x6ppv := NBt * X6ppv xx6p := NBt * X6p

```

$$i := 0..L \quad u1(i) := u\left(i \cdot \frac{t}{L}\right)$$



Конец листинга 2.

В заключение заметим, что в данной статье спектральный метод применяется для моделирования САУ ядерной энергетической установкой при условии ее описания линейными уравнениями точечной кинетики и использования дробного ПИД регулятора. Для моделирования такой системы применяется пакет расширения MLSY_SM СКМ Mathcad. Этот пакет, а также пакеты расширения MLSY_SM, Spektr_SM+Simulink+Matlab, Spektr_SM+VisSim+Mathcad СКМ [1-8] позволяют проводить не только детерминированный и стохастический анализ САУ различных классов, но и параметрическую оптимизацию параметров САУ. В частности можно исследовать влияние степени дробности операторов дробного интегрирования и дробного дифференцирования на переходные процессы, протекающие в САУ [15] и по критериям оптимальности решать задачу оптимизации параметров регулятора.

Библиографический список

1. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики.. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 220 с.
2. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в биортогональных вейвлет-базисах // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2009, № 33. – <http://www.mai.ru>
3. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов. // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 10. – <http://www.mai.ru>

4. Рыбин В.В. Разработка и применение пакетов расширения MLSY_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 13. – <http://www.mai.ru>
5. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr_SM СКМ Matlab.// Электронный журнал “Труды МАИ”- 2003, № 13. – <http://www.mai.ru>
6. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных непрерывных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах: Учебное пособие. – М.: МАИ, 2003. – 96 с.
7. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в базисах Добеши М-го порядка // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2009, № 33. – <http://www.mai.ru>
8. Рыбин В.В. Разработка пакета расширения MLSY_SM СКМ Mathcad в проекционно-сеточных финитных базисах // Электронный журнал “Труды МАИ”- 2010, № 41. – <http://www.mai.ru>
9. Солодовников В.В. и др. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979.– 664 с.
10. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М., Наука, 1974.– 336 с.
11. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом: Учебное пособие. –М.: МАИ, 1984.– 84 с.
12. Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 632с.
13. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления – М.: Вузовская книга, 2006. – 392 с.
14. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ-Принт, 2010. – 160 с.
15. Рыбин В.В. Моделирование дробных нестационарных систем управления в СКМ спектральным методом // Вестник Московского авиационного института.- 2011. Т. 18. № 6. – С.102-118.

16. Халимончук В.А. Динамика реактора с распределенными параметрами в исследованиях переходных режимов эксплуатации ВВЭР и РБМК. – К.: Основа, 2008. – 228 с.
17. Демченко В.А. Автоматизация и моделирование технологических процессов АЭС и ТЭС. Одесса: Астропринт. - 2001.-308 с. Формат: djvu Размер: 5 Мб
18. Цвайфель П.Ф. Физика реакторов. М., Атомиздат, 1977. – 278 с.
19. Белл Д., Глесстон С. Теория ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1974. – 494 с.
20. Основы теории и методы расчета ядерных энергетических реакторов: Учебное пособие для вузов/Г.Г. Бартоломей, Г.А. Бать, В.Д. Байбаков, М.С. Алтухов; Под ред. Г.А. Батя. – М.: Энергоиздат, 1982. – 510 с.
21. Козлов О.С., Кондаков Д.Е., Скворцов Л.М. и др. Программный комплекс для исследования динамики и проектирования технических систем // Информационные технологии. 2005. № 9.
22. ["МВТУ"](http://www.reactors.narod.ru/mvtu/mvtu.htm) - программный комплекс для моделирования и исследования систем и объектов (сайт <http://www.reactors.narod.ru/mvtu/mvtu.htm>)
23. ["МВТУ"](http://energy.power.bmstu.ru/mvtu/) - программный комплекс для моделирования и исследования систем и объектов (сайт <http://energy.power.bmstu.ru/mvtu/>)
24. Бекмачев Д.А., Потапов А.А., Ушаков П.А. Проектирование фрактальных пропорционально-интегрально-дифференциальных регуляторов дробного порядка // Успехи современной радиоэлектроники. 2011. №5. С. 13 – 20.

Сведения об авторах

Рыбин Владимир Васильевич , доцент Московского авиационного института
(национального исследовательского университета), тел.: +7 499 158-48-11, e-mail:vv-
ribin@mail.ru