

Наискорейшая переориентация плоскости круговой орбиты космического аппарата

Панкратов И.А.^{1,2}

¹*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского, Астраханская ул., 83, Саратов, 410012, Россия*

²*Институт проблем точной механики и управления РАН, Рабочая ул., 24, Саратов,
410028, Россия*

e-mail: PankratovIA.mechanic@gmail.com

Статья поступила 05.07.2020

Аннотация

В статье рассмотрена задача наискорейшей переориентации плоскости круговой орбиты космического аппарата (КА). Управление (ускорение от вектора реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю и является кусочно-постоянной функцией. В работе построен оригинальный генетический алгоритм для нахождения количества активных участков движения КА и длительностей этих участков. Приведены примеры численного решения задачи для случая, когда отличие между начальной и конечной ориентациями орбиты КА составляет единицы градусов в угловой мере. Конечная ориентация плоскости орбиты КА соответствует ориентации плоскости орбиты спутников отечественной орбитальной группировки ГЛОНАСС. Установлены особенности и закономерности процесса оптимальной переориентации плоскости орбиты КА.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, оптимизация, кватернион, ген.

Введение

В статье рассмотрена задача оптимального в смысле быстродействия управления движением центра масс КА. Подобные задачи часто рассматривались отечественными и зарубежными авторами в различных постановках. С математической точки зрения эти задачи чаще всего сводятся к краевым задачам принципа максимума [1] для систем дифференциальных уравнений высокой размерности. Известно, что численное решение таких задач сопряжено со значительными трудностями ввиду отсутствия общих аналитических решений (особенно в случае движения КА в пространстве). Лишь в частном случае, когда начальная и конечная орбиты лежат в одной плоскости [2], задача упрощается и можно аналитически приближённо найти траектории оптимальных перелётов. Пространственные же задачи решались ранее гораздо реже (см., например, работы [3-6]). При этом минимизировались затраты рабочего тела или характеристическая скорость [7, 8]. Чаще всего дифференциальные уравнения движения космического аппарата записываются с помощью классических угловых элементов орбиты. Аналитическое исследование получающихся при их применении краевых задач высокой размерности достаточно трудно [9].

В настоящей работе движение КА моделируется с помощью уравнений в новых кватернионных оскулирующих элементах орбиты.

Постановка задачи

Рассмотрим частный случай движения КА по круговой орбите, когда вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя (управление) направлен ортогонально плоскости его орбиты (к круговым близки орбиты спутниковых группировок ГЛОНАСС и GPS). Известно, что при этом орбита КА будет поворачиваться в пространстве как недеформируемая фигура. Движение центра масс КА описывается уравнениями [10]:

$$2 \frac{d\lambda}{dt} = \lambda \circ \omega_\eta, \quad \omega_\eta = u \frac{r}{c} \mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2} \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \text{const}, \quad c = \text{const}.$$

Пусть требуется перевести круговую орбиту КА из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0 \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \lambda(0) = \lambda^{(0)} = \Lambda^{(0)} \circ \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \quad (2)$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t^* = ? \quad \varphi(t^*) = \varphi^* = ?$$

$$\operatorname{tg} \Omega_u^* = \frac{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2}{\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3}, \quad \cos I^* = (\lambda_0^*)^2 - (\lambda_1^*)^2 - (\lambda_2^*)^2 + (\lambda_3^*)^2 \quad (3)$$

с помощью кусочно-постоянного управления ($-u_{\max} \leq u(t) \leq u_{\max}$)

$$u(t) = \begin{cases} u_{start}, & \text{если } 0 \leq t < t_1, \\ -u_{start}, & \text{если } t_1 \leq t < t_2, \\ \dots & \\ (-1)^{M-1} u_{start}, & \text{если } t_{M-1} \leq t \leq t_M; \end{cases}$$

за минимальное время (конечное положение орбиты в её плоскости не фиксируется).

В отличие от работ [11, 12] количество участков активного движения КА M подлежит определению в ходе решения задачи. Легко показать, что в случае быстрогодействия управление, максимизирующее функцию Гамильтона-Понтрягина, является релейным.

Здесь $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$ – нормированный кватернион ориентации орбитальной системы координат η в инерциальной системе координат X (начало координат находится в центре масс КА, ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиуса-вектора r центра масс КА, а ось η_3 перпендикулярна плоскости орбиты), i_1, i_2, i_3 – векторные мнимые единицы Гамильтона, \circ – символ кватернионного умножения, дифференцирование по времени t выполняется в предположении неизменности величин i_1, i_2, i_3 ; φ – истинная аномалия (угол между r и радиусом-вектором перицентра орбиты КА), эта переменная характеризует положение КА на орбите; $r = |r|$; $c = |r \times dr / dt|$ – постоянная площадей; u – алгебраическая величина реактивного ускорения; $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 i_1 + \Lambda_2 i_2 + \Lambda_3 i_3$ – кватернион ориентации орбиты КА; $u_{start} \in \{u_{max}, -u_{max}\}$ – значение управления на первом участке активного движения КА; $\Delta_k = t_k - t_{k-1}$ – искомые величины (длительности участков активного движения КА).

В данной задаче известны c, r, φ_0 ; начальное значение кватерниона ориентации орбиты КА, а также конечные значения долготы восходящего узла Ω_u^* и наклона орбиты I^* . Необходимо найти длительности участков активного движения КА и их количество.

Анализ задачи удобно проводить в безразмерных переменных: $r^b = r / R$, $t^b = t / T$, $u^b = u / u_{\max}$. Здесь R – радиус орбиты управляемого КА, а $T = R^2 / c$ – характерное время. Компоненты кватернионов λ и Λ являются безразмерными. В безразмерных переменных система (1) имеет вид [13]

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\lambda}{dt} &= \lambda \circ \omega^b, & \omega^b &= Nu^b r^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 1, & r^b &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $N = u_{\max} \cdot R^3 / c^2$ – характерный безразмерный параметр задачи.

На управление в безразмерных переменных наложено следующее ограничение

$$-1 \leq u^b \leq 1.$$

Алгоритм решения задачи

Ранее в работах [14-16] задача переориентации орбиты космического аппарата была сведена к краевой задаче высокой размерности с подвижным правым концом. Неизвестные начальные значения сопряжённых переменных искались численно с помощью комбинации методов Ньютона и градиентного спуска [17]. Известно, что итерационные методы решения краевых задач весьма чувствительны к выбору начального приближения. В рассматриваемой задаче отсутствуют аналитические формулы для нахождения хороших начальных приближений. Итерационные методы дают локальные минимумы функций невязок, из которых трудно выбрать. В настоящей статье для нахождения оптимальных траекторий движения центра масс КА построен генетический алгоритм. Одна из трудностей при конструировании

алгоритма заключается в том, что количество участков активного движения КА заранее неизвестно, а классические генетические алгоритмы работают с хромосомами одинаковой длины. В работе использован подход, предложенный в статье [18]. Отметим, что при применении данного метода управление полагается кусочно-постоянной функцией, а сопряжённые уравнения рассматривать не нужно. Различные методы, основанные на идеях, подсказанных человеку природой, в настоящее время достаточно широко применяются при решении оптимизационных задач механики космического полёта [19, 20]. Приведём этапы предлагаемого генетического алгоритма по книге [21].

На первом шаге требуется сгенерировать популяцию из N_{\max} (чётное число) случайных пробных решений (хромосом или особей). Каждая особь – это набор из M_{\max} пар. Первый элемент пары – вещественное число (длительность участка активного движения КА). Второй элемент пары – это булева переменная. Если в k -й паре на втором месте стоит единица («истина»), то соответствующий ген хромосомы участвует в формировании управления, в противном случае наоборот. Удобно хранить не вещественное число Δ_k , а целое Δ_k^{int} ($0 \leq \Delta_k^{\text{int}} \leq 2^L - 1$). Связь между этими числами имеет вид $\Delta_k = \frac{\Delta T_{\max} \cdot \Delta_k^{\text{int}}}{2^L - 1}$, где ΔT_{\max} – заданная максимальная длительность активного участка движения КА.

При этом необходимо ввести понятие эффективной длины хромосомы $0 \leq M_{\text{эфф}} \leq M_{\max}$. $M_{\text{эфф}}$ – это количество генов хромосомы, участвующих в формировании управления, т.е. количество пар, второй элемент которых равен

«истине». Таким образом, с помощью предлагаемого алгоритма будет осуществлён поиск решения при условии, что количество участков активного движения КА не превышает M_{\max} .

Второй шаг алгоритма заключается в том, что для каждого пробного решения находится значение кватерниона ориентации орбитальной системы координат при $t = t^* = t_M = \sum_{k=1}^M \Delta_k$ с начальными условиями (2). Управление, соответствующее хромосоме, задаётся с учетом того, что не все гены вносят свой вклад. При этом вместо метода Рунге-Кутты для решения задачи Коши использована известная аналитическая формула [22] сложения конечных поворотов:

$$\lambda(t_k) = \lambda(t_{k-1}) \circ \left(\cos \frac{\omega \Delta_k}{2} + \frac{1}{\omega} \boldsymbol{\omega}^b \cdot \sin \frac{\omega \Delta_k}{2} \right), \quad \boldsymbol{\omega}^b = Nu^b r^b \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_3, \quad \omega = |\boldsymbol{\omega}^b|. \quad (5)$$

Введём следующую функцию

$$err(t) = \sqrt{\left(\operatorname{tg} \Omega_u^* - \frac{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2}{\lambda_0 \lambda_1 - \lambda_2 \lambda_3} \right)^2 + \left(\cos I^* - (\lambda_0)^2 + (\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 - (\lambda_3)^2 \right)^2},$$

где $\lambda_j = \lambda_j(t)$, $j = \overline{0,3}$ – компоненты кватерниона текущей ориентации орбитальной системы координат.

Функция $err(t)$ характеризует текущее отклонение плоскости орбиты КА от требуемого (3). Значение этой функции в конце движения можно принять за значение функции приспособленности (целевой функции), которое нужно минимизировать.

Работа генетического алгоритма подчиняется принципу естественного отбора. На каждой итерации происходит «борьба» между особями (пробными решениями),

в результате которой выживает наиболее приспособленная особь. В нашем случае, более приспособленной является особь с меньшим значением целевой функции. Если значение целевой функции для наиболее приспособленной особи меньше заданного малого числа ε (точность решения задачи), то выполнение алгоритма заканчивается. При этом управление, соответствующее данному пробному решению является решением. При превышении алгоритмом максимального числа итераций N_{iter}^{max} решением задачи также считается управление, соответствующее наиболее приспособленной особи.

На третьем шаге алгоритма половина особей с наибольшими (худшими) значениями целевой функции «погибает». После этого особь с наименьшим значением целевой функции скрещивается со всеми остальными и сама с собой методом промежуточной рекомбинации [21]. Пусть нужно скрестить две особи, k -е гены которых имеют вид (Δ_k^{int1}, b_k^1) и (Δ_k^{int2}, b_k^2) . Тогда k -й ген потомка $(\Delta_k^{int r}, b_k^r)$ будет создан по следующему правилу:

$$\Delta_k^{int r} = \Delta_k^{int1} + \alpha_k \cdot (\Delta_k^{int2} - \Delta_k^{int1}), \quad b_k^r = b_k^1 \vee b_k^2.$$

Здесь α_k – псевдослучайное вещественное число $(-0.25 \leq \alpha_k \leq 1.25)$.

Полученные длины активных участков $\Delta_k^{int r}$ округляются до целых чисел $(0 \leq \Delta_k^{int r} \leq 2^{L-1})$. В конце третьего шага в новой популяции по-прежнему насчитывается N_{max} особей. Заметим, что в данном случае эффективная длина хромосомы потомка будет не меньше, чем эффективные длины хромосом родителей. Для того чтобы количество активных участков движения КА могло не

только увеличиваться, но и уменьшаться, в операторе скрещивания вместо оператора «или» (\vee) нужно применять оператор «исключающее или» (\oplus). Вероятность p_{cross} смены одного логического оператора на другой обычно равна $1/2$.

На последнем шаге алгоритма нужно узнать, увеличилось ли среднее значение целевой функции для популяции. Если это так, то производится мутация особей в популяции, иначе осуществляется возврат ко второму шагу алгоритма. Мутация происходит следующим образом: целые числа, кодирующие длительности участков активного движения КА, записываются в двоичном виде. Затем случайно выбранный бит каждого числа с вероятностью $p_{mut} \in (0; 1]$ меняет своё значение. После этого алгоритм возвращается ко второму шагу.

Построенный алгоритм требуется применить несколько раз. Из полученных решений необходимо выбрать то, которое отвечает переориентации плоскости орбиты КА за меньшее время.

Примеры численного решения задачи

Описанный выше алгоритм был реализован на языке программирования Python.

Параметры задачи, характеризующие реактивный двигатель КА, начальное положение КА на орбите, начальную и конечную ориентации плоскости орбиты КА, взяты из [23]:

$$u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35, \quad \varphi_0 = 3.940323 \text{ рад};$$

начальная ориентация орбиты КА (ω_{π}^0 – угловое расстояние перицентра от узла):

$$\Omega_u^0 = 212.0 \text{ град}, \quad I^0 = 63.0 \text{ град}, \quad \omega_{\pi}^0 = 0.0 \text{ град};$$

$$\Lambda_0^{(0)} = -0.235019, \quad \Lambda_1^{(0)} = -0.144020, \quad \Lambda_2^{(0)} = 0.502258, \quad \Lambda_3^{(0)} = 0.819610;$$

$$\lambda_0^{(0)} = -0.663730, \quad \lambda_1^{(0)} = 0.518734, \quad \lambda_2^{(0)} = -0.062608, \quad \lambda_3^{(0)} = -0.535217;$$

конечная ориентация плоскости орбиты КА (соответствует ориентации плоскости орбиты спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС):

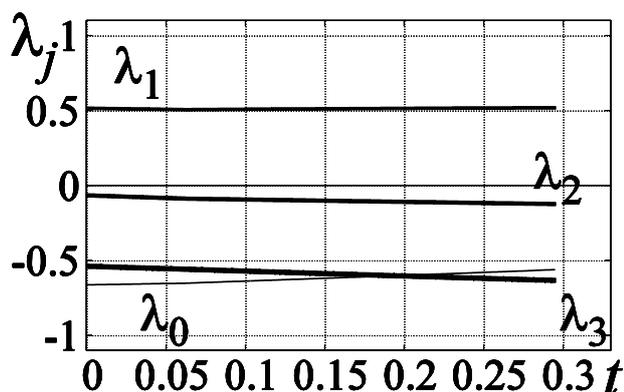
$$\Omega_u^* = 215.25 \text{ град}, \quad I^* = 64.8 \text{ град}.$$

Масштабирующие множители $R = 26000000$ м, $T = 9449.714506$ сек

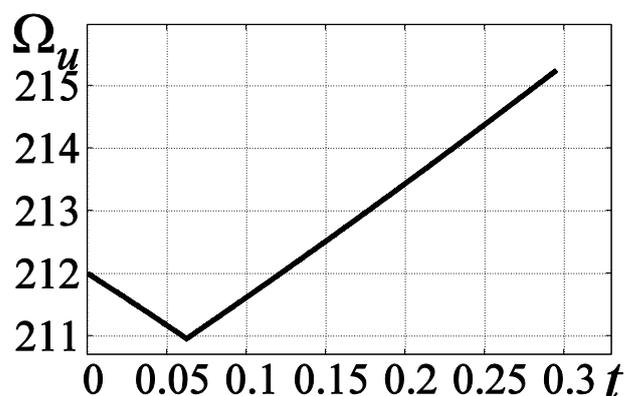
рассчитаны по значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведенным в книге [24].

При проведении расчётов были приняты следующие параметры генетического алгоритма

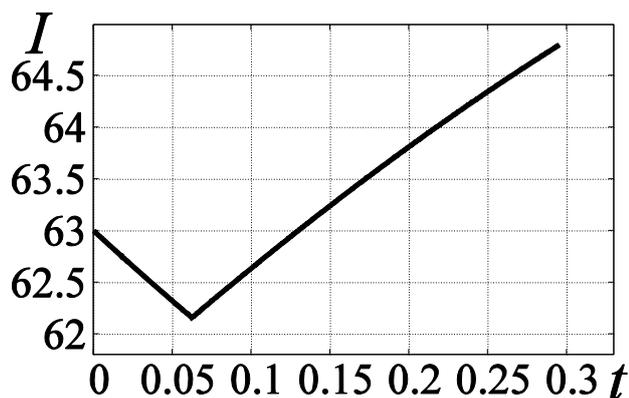
$$L = 100, \quad N_{\max} = 10000, \quad p_{\text{mut}} = 0.9, \quad \Delta T_{\max} = 5.0.$$



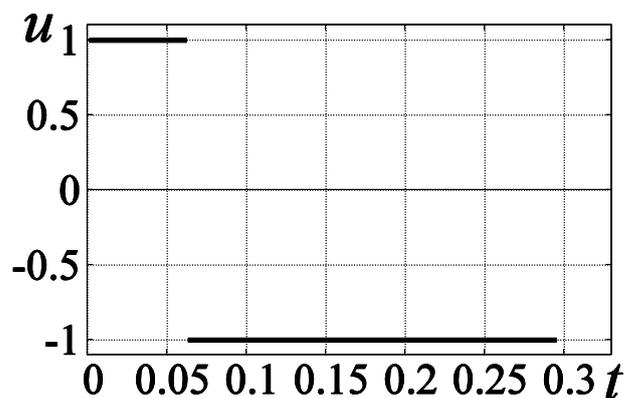
а) Компоненты кватерниона ориентации орбитальной системы координат



б) Долгота восходящего узла



в) Наклонение орбиты

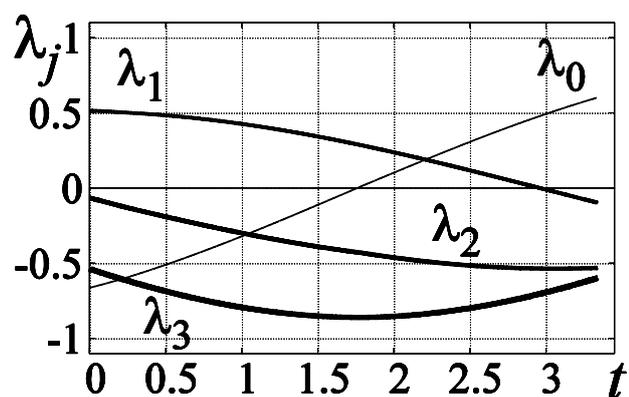


г) Оптимальное управление

Рисунок 1 – Малое отличие в ориентациях орбит, $N = 0.35$

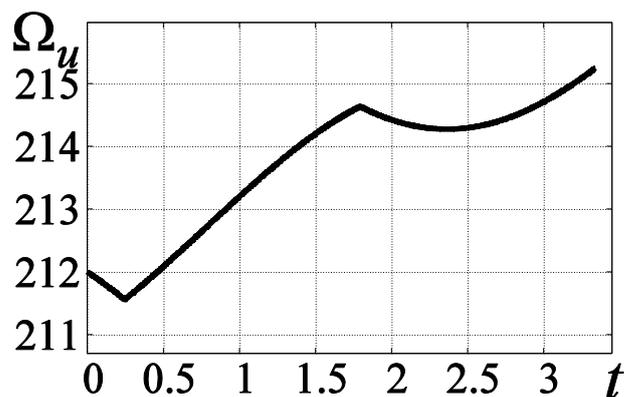
На рис. 1 приведены результаты решения задачи оптимальной переориентации плоскости круговой орбиты КА для $N = 0.35$ (угловые переменные даны в градусах, все остальные величины являются безразмерными). Заметим, что длительность процесса составила $t^* = 0.294987$ безразмерных единиц или 2787.5 сек ≈ 0.774 ч.

На рис. 2 приведены результаты расчётов для случая, когда ускорение от тяги реактивного двигателя в десять раз меньше ($N = 0.035$).

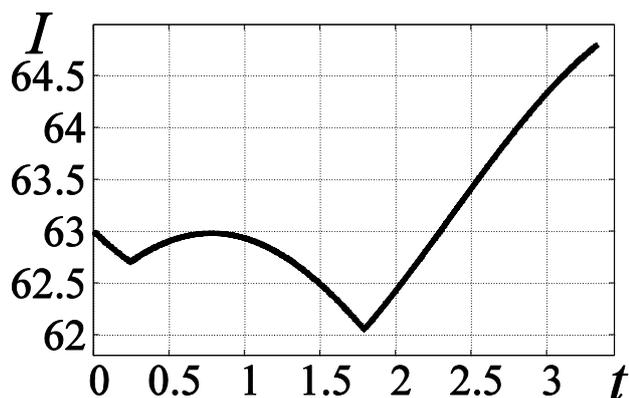


а) Компоненты кватерниона ориентации

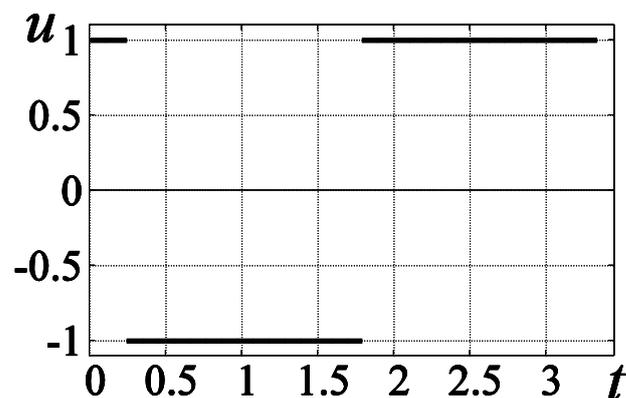
орбитальной системы координат



б) Долгота восходящего узла



в) Наклонение орбиты



г) Оптимальное управление

Рисунок 2 – Малое отличие в ориентациях орбит, $N = 0.035$

В ходе численного решения задачи было установлено, что при смене знака управления на первом участке активного движения КА затраты времени на переориентацию плоскости орбиты КА увеличиваются в обоих вариантах исходных данных. В случае, когда $N = 0.35$, на первом участке активного движения КА угловые переменные, описывающие ориентацию плоскости его орбиты, уменьшаются, а на втором увеличиваются. На каждом участке законы изменения этих переменных близки к линейным. Компоненты кватерниона ориентации орбитальной системы координат являются медленно меняющимися функциями времени.

Во втором примере длительность управляемого процесса составила $t^* = 3.332915$ безразмерных единиц или 31495 сек ≈ 8.749 ч. Также были получены варианты решения задачи и с другим количеством участков активного движения КА, но за большее время.

Отметим, что применение аналитических формул (5) вместо численного решения задачи Коши для уравнений (4) методом Рунге-Кутты позволило ускорить

работу генетического алгоритма. Количество особей в популяции было увеличено на несколько порядков, благодаря чему решение задачи ищется гораздо быстрее.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).

Библиографический список

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1983. - 393 с.
2. Вернигора Л.В., Казмерчук П.В. Оптимизация траекторий КА с малой тягой методом линеаризации // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105759>
3. Салмин В.В., Соколов В.О. Приближенный расчет маневров формирования орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1991. Т. 29. № 6. С. 872 - 888.
4. Ишков С.А., Романенко В.А. Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1997. Т. 35. № 3. С. 287 - 296.
5. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космические исследования. 2008. Т. 46. № 3. С. 224 - 237.
6. Fernandes S. Optimum low-thrust limited power transfers between neighbouring elliptic non-equatorial orbits in a non-central gravity field // Acta Astronautica, 1995, vol. 35, no. 12, pp. 763 - 770.

7. Константинов М.С., Мин Т. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на геостационарную орбиту для транспортной системы с удельным импульсом двигателя 600-900 с // Труды МАИ. 2017. № 95. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=84516>
8. Улыбышев С.Ю. Выведение группировки микроспутников с использованием промежуточной орбиты с синхронной прецессией // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90354>
9. Константинов М.С., Мин Т. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту // Труды МАИ. 2013. № 67. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=41510>
10. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I. // Космические исследования. 2001. Т. 39. № 5. С. 502 - 517.
11. Панкратов И.А. Генетический алгоритм минимизации энергозатрат на переориентацию плоскости орбиты космического аппарата // Научно-технический вестник Брянского государственного университета. 2017. № 3. С. 353 - 360.
12. Панкратов И.А. Расчёт наискорейших перелётов космического аппарата между круговыми орбитами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. № 3. С. 344 - 352.
13. Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Известия Саратовского

- университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. № 1. Ч. 1. С. 84 - 92.
14. Козлов Е.А., Челноков Ю.Н., Панкратов И.А. Решение задачи оптимальной коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата с использованием кватернионного уравнения ориентации орбиты // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. № 3. С. 336 - 344.
15. Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. № 3. С. 87 - 95.
16. Chelnokov Yu.N., Pankratov I.A., Sapunkov Ya.G. Optimal reorientation of spacecraft orbit // Archives of Control Sciences, 2014, vol. 24, no. 3, pp. 119 - 128.
17. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. - М.: Наука, 1971. - 424 с.
18. Шкамардин И.А. Генетические алгоритмы с представлением переменной длины // Известия ЮФУ. Технические науки. 2007. № 1. С. 61 - 64.
19. Dachwald B. Optimization of very-low-thrust trajectories using evolutionary neurocontrol // Acta Astronautica, 2005, vol. 57, no. 2-8, pp. 175 - 185.
20. Coverstone-Carrol V., Hartmann J.W., Mason W.J. Optimal multi-objective low-thrust spacecraft trajectories // Computer methods in applied mechanics and engineering, 2000, vol. 186, no. 2-4, pp. 387 - 402.

21. Панченко Т.В. Генетические алгоритмы. - Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. - 87 с.
22. Панкратов, И.А., Челноков Ю.Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. № 1. С. 84 - 89.
23. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 5. С. 488 - 505.
24. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. - М.: Наука, 1984. - 136 с.