

Научная статья
УДК 532.516.5
DOI: [10.34759/trd-2023-129-10](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-10)

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ОКОЛО ИСТОЧНИКА И СТОКА

Павел Викторович Кауров

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна. Высшая школа технологии и энергетики,

Санкт-Петербург, Россия

pusmo@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассмотрена и решена задача о течении вязкой жидкости между источником и стоком при малых числах Рейнольдса. Приведено аналитическое решение уравнения Стокса при использовании биполярных координат. Искомая функция тока представлена в виде суммы из двух составляющих, первая из которых удовлетворяет граничным условиям, а использование второй составляющей удовлетворяет исходное уравнение Стокса в биполярной системе координат. Аппроксимация первой составляющей функции тока простой зависимостью позволяет свести исходное уравнение с переменными коэффициентами к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами относительно второй составляющей функции тока. Для полученных трех обыкновенных дифференциальных уравнений приведено

аналитическое решение. Показаны примеры рассчитанной функции тока в безразмерном виде для разных расстояний между источником и стоком. Сравнение расчетных значений функции тока с экспериментальными данными из литературы показывает достаточную сходимость.

Ключевые слова: ламинарное течение, вязкая жидкость, функция тока, уравнения Стокса, биполярные координаты

Для цитирования: Кауров П.В. Расчет течения вязкой жидкости около источника и стока // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-10](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-10)

Original article

CALCULATION OF THE FLOW OF A VISCOUS FLUID NEAR AN INLET AND OUTLET

Pavel V. Kaurov

Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design. High School of Technology and Energetics

Saint Petersburg, Russia

pucmo@mail.ru

Abstract. The article considered and solved the problem on the viscous fluid flow between the source and the drain at small Reynolds numbers. It presents the analytical solution of the Stocks equation when bipolar coordinates utilization. The sought-after function is represented as a sum of the two components, first of which satisfies the boundary conditions, while the application of the other component satisfies the initial Stocks

equation in the bipolar system of coordinates. Approximation of the first component the flow function by the simple dependence allows reducing the initial equation with variable coefficients to the three ordinary differential expressions with constant coefficients relative to the second component of the flow function. Analytical solution is presented for the three ordinary differential equations. The examples of the computed flow function in the dimensionless form for various distances between the source and the drain are presented. Comparison of the flow functions calculated values with the experimental data from the literature sources demonstrates reasonable agreement.

Keywords: laminar flow, viscous fluid, stream function, Stokes equations, bipolar coordinates

For citation: Kaurov P.V. Calculation of the flow of a viscous fluid near an inlet and outlet. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-10](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-10)

Введение

При математическом моделировании ламинарного течения несжимаемой вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса, как известно [1 – 3], используется система уравнений Стокса.

Для течения жидкости в зазоре между двумя эксцентричными цилиндрами в [4] получено решение системы уравнений Стокса с применением биполярных координат для случая вращения внутреннего цилиндра вокруг своей оси.

Решение уравнений Стокса при поступательном движении шипа вдоль линии центров в подшипнике скольжения приведено в [5]. Вращение внешнего цилиндра и комбинация этих случаев рассмотрены в [6].

В [7] исследуется движение вязкой жидкости между двумя круговыми вращающимися цилиндрами. Для определения общих аналитических выражений относительно функции тока применяется переход к биполярным координатам. Структура линий тока исследуется в случаях, когда один из цилиндров неподвижен и когда оба цилиндра вращаются.

В [8] построен алгоритм численного исследования плоской задачи течения вязкой жидкости в приближении Стокса, заключенной между двумя движущимися цилиндрами произвольного поперечного сечения.

В [9] рассматривается случай ламинарного течения вязкой жидкости в плоском зазоре между двумя эксцентричными цилиндрами, когда движение жидкости в зазоре создается за счет вращения внутреннего цилиндра вокруг центра неподвижного внешнего цилиндра.

В [10] представлены результаты экспериментального исследования и расчета положения точки минимального давления при движении цилиндрического тела вдоль стенки с малым зазором. Расчеты течений проводилось в биполярных координатах.

В [11] рассматривается течение вязкой жидкости в области между круговыми цилиндрами, когда течение жидкости создается вращательным и поступательным

движениями цилиндров. Изучена структура линий тока для стационарных течений, полученных решением с применением биполярных координат.

В [12] проведено численное исследование плоской задачи течения ограниченной вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса, создаваемого поступательным движением в ней цилиндра произвольного сечения.

В [13, 14] рассмотрено двухмерное ползущее движение бесконечного цилиндра в несжимаемой вязкой жидкости вблизи бесконечной плоской стенки и получено решение относительно функции тока в биполярных координатах.

Вопросы взаимодействия элементов конструкции с вязкой несжимаемой жидкостью рассмотрены в [15 – 17].

Пражиль [18] осуществлял течения, в которых преобладающую роль играет вязкость, в большом плоском баке, наполнявшемся до высоты в несколько миллиметров водой, поверхность которой обсыпалась маленькими кристаллами марганцево-кислого калия. Он фотографировал полученную таким путем картину линий тока совокупности источника и стока при поступлении жидкости в бак через левое отверстие и вытекании из бака через правое отверстие.

В настоящей работе приведено решение уравнений Стокса для случая течения вязкой жидкости между двумя отверстиями на плоскости, при котором одно из отверстий является источником жидкости, а другое – стоком, то есть для экспериментально наблюдаемого течения Пражиля [18]. Предлагаемый алгоритм может быть использован при моделировании работы элементов гидравлических систем в авиационной и ракетно-космической технике.

Постановка задачи

Для математического моделирования плоского течения вязкой жидкости между двумя отверстиями (источником и стоком) рассмотрим систему из двух окружностей одинакового радиуса $R=1$, расположенных в прямоугольной системе координат $(x; y)$ таким образом, что их центры O_1 и O_2 находятся на расстоянии $(1+0,5AB)$ от начала координат O (Рис. 1).

Прямоугольные координаты $(x; y)$ связаны с биполярными координатами $(\eta; \rho)$ зависимостями [19, 20]:

$$x = \frac{\text{sh } \rho}{g(\eta, \rho)}, \quad y = \frac{\sin \eta}{g(\eta, \rho)},$$

где $g(\eta, \rho) = [\text{ch}(\rho) + \cos(\eta)] / \text{sh}(\rho_1)$ – величина дифференциального параметра, характеризующего масштаб преобразования при переходе от прямоугольной системы координат $(x; y)$ к биполярной системе координат $(\eta; \rho)$.

Координата η меняется от 0 до π , а координата ρ меняется от значения ρ_2 для левой окружности до значения ρ_1 для правой, определяемых выражениями:

$$\rho_1 = \text{arcch} \left[1 + \frac{AB}{2} \right], \quad \rho_2 = -\rho_1,$$

где AB – расстояние между окружностями.

Уравнения Стокса в биполярных координатах имеют вид [1, 4]:

$$F(\Omega) = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \right] = 0, \quad \Omega = g^2 \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right], \quad (1)$$

где $W(\eta, \rho)$ – функция тока в биполярных координатах.

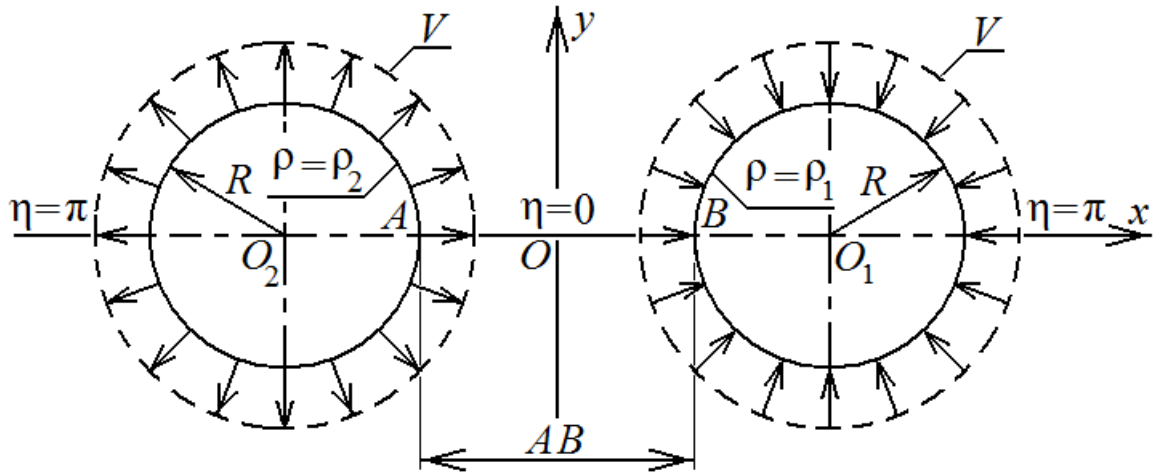


Рис. 1. Расчетная схема течения жидкости около источника и стока в биполярных координатах (ρ, η)

Выражения для нормальной v и касательной u скорости жидкости в биполярных координатах имеют вид [5, 6]:

$$v = -g \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad u = g \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad (2)$$

и граничные условия при $\rho = \rho_{1,2}$ для уравнения (1) запишем в виде (Рис. 1):

$$v = V = 1, \quad u = 0. \quad (3)$$

Метод решения задачи

Представим искомую функцию W в следующем виде:

$$W(\eta, \rho) = W_0(\eta) + W_1(\eta, \rho),$$

где $W_0(\eta)$ – составляющая функции тока, удовлетворяющая граничным условиям (3), но не удовлетворяющая уравнению (1); $W_1(\eta, \rho)$ – составляющая функции тока, благодаря которой уравнение (1) удовлетворяется.

По выражениям (2) и (3) определим функцию W_0 :

$$\frac{\partial W_0}{\partial \eta} = \frac{-1}{g(\eta, \rho_{1,2})} = \frac{-\operatorname{sh} \rho_1}{\operatorname{ch} \rho_1 + \cos \eta} = F_W(\eta),$$

$$W_0(\eta) = \int F_W(\eta) d\eta = -\operatorname{arctg} \frac{(\operatorname{ch} \rho_1 - 1) \operatorname{tg}(\eta/2)}{\operatorname{sh} \rho_1}. \quad (4)$$

Граничные условия при $\rho = \rho_{1,2}$ для функции W_1 будут иметь вид:

$$W_1 = 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \rho} = 0. \quad (5)$$

Аппроксимируем функцию $W_0(\eta)$ зависимостью:

$$W_0(\eta) = -\operatorname{arctg} \frac{(\operatorname{ch} \rho_1 - 1) \operatorname{tg}(\eta/2)}{\operatorname{sh} \rho_1} = B_1 \sin \eta + B_2 \sin 2\eta - \eta,$$

$$B_1 = W_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}, \quad B_2 = W_0\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} - B_1 \sin \frac{\pi}{4},$$

тогда выражение (1) примет вид:

$$F(\Omega) = F(\Omega_0) + F(\Omega_1) = 0,$$

$$\Omega_0 = g^2 \left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \eta^2} \right] = -g^2 [B_1 \sin \eta + 4B_2 \sin 2\eta],$$

$$F(\Omega_0) = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial \eta^2} \right] = \frac{-[3B_1 \operatorname{ch} \rho \sin \eta - 4,5B_1 \sin 2\eta - 32B_2 \sin 3\eta]}{\operatorname{sh} \rho_1}, \quad (6)$$

$$F(\Omega_1) = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial \eta^2} \right] = -F(\Omega_0), \quad \Omega_1 = g^2 \left[\frac{\partial^2 W_1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial \eta^2} \right]. \quad (7)$$

Согласно [5, 21] сделаем замену: $W_1 = \Phi/g$, тогда уравнение (7) примет вид:

$$F(\Omega_1) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^2 \partial \rho^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \rho^4} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \Phi(\eta, \rho) = -F(\Omega_0). \quad (8)$$

Исходя из вида правой части уравнения (6) представим функцию $\Phi(\eta, \rho)$ в следующем виде:

$$\Phi(\eta, \rho) = f_1(\rho) \sin \eta + f_2(\rho) \sin 2\eta + f_3(\rho) \sin 3\eta,$$

тогда вместо выражения (8) с учетом (6) запишем следующие уравнения:

$$\frac{d^4 f_1(\rho)}{d\rho^4} - 4 \frac{d^2 f_1(\rho)}{d\rho^2} = \frac{3B_1 \operatorname{ch} \rho}{\operatorname{sh} \rho_1}, \quad (9)$$

$$\frac{d^4 f_2(\rho)}{d\rho^4} - 10 \frac{d^2 f_2(\rho)}{d\rho^2} + 9 f_2(\rho) = \frac{-4,5B_1}{\operatorname{sh} \rho_1}, \quad (10)$$

$$\frac{d^4 f_3(\rho)}{d\rho^4} - 20 \frac{d^2 f_3(\rho)}{d\rho^2} + 64 f_3(\rho) = \frac{-32B_2}{\operatorname{sh} \rho_1}. \quad (11)$$

Граничные условия при $\rho = \rho_{1,2}$ для функций $f_1(\rho) - f_3(\rho)$, в соответствии с (5), будут иметь вид:

$$f_{1,2,3} = 0, \quad \frac{df_{1,2,3}}{d\rho} = 0. \quad (12)$$

Уравнения (9)–(11) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, их решение с граничными условиями (12), согласно [22, 23], имеет вид:

$$f_1(\rho) = B_1 \left[\frac{\operatorname{ch} \rho_1 - \operatorname{ch} \rho}{\operatorname{sh} \rho_1} + \frac{\operatorname{ch} 2\rho - \operatorname{ch} 2\rho_1}{2\operatorname{sh} 2\rho_1} \right],$$

$$f_2(\rho) = \frac{B_1}{16 \operatorname{ch}^3 \rho_1} \left[\frac{\operatorname{ch} 3\rho_1 - \operatorname{ch} 3\rho}{\operatorname{sh} \rho_1} + \frac{3 \operatorname{sh} 3\rho_1 (\operatorname{ch} \rho - \operatorname{ch} \rho_1)}{\operatorname{sh}^2 \rho_1} \right],$$

$$f_3(\rho) = \frac{B_2}{2 \operatorname{sh} \rho_1} \left[\frac{\operatorname{sh} 2\rho_1 (\operatorname{ch} 4\rho - \operatorname{ch} 4\rho_1) + 2 \operatorname{sh} 4\rho_1 (\operatorname{ch} 2\rho_1 - \operatorname{ch} 2\rho)}{\operatorname{sh} 2\rho_1 \operatorname{ch} 4\rho_1 - 2 \operatorname{sh} 4\rho_1 \operatorname{ch} 2\rho_1} \right].$$

Итак, окончательное выражение для функции тока будет иметь вид:

$$W(\eta, \rho) = B_1 \sin \eta + B_2 \sin 2\eta - \eta + \frac{f_1(\rho) \sin \eta + f_2(\rho) \sin 2\eta + f_3(\rho) \sin 3\eta}{g}.$$

Результаты расчетов

На рис. 2а–2в показаны расчетные зависимости безразмерной функции тока $\varphi=1+W/\pi$ в виде линий равного уровня при различных значениях расстояния AB между источником и стоком. На рис. 2г показана картина линии тока совокупности источника и стока, полученная экспериментально в [18] при $AB=14$. Сравнение линий тока на рис. 2в и рис. 2г показывает хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных.

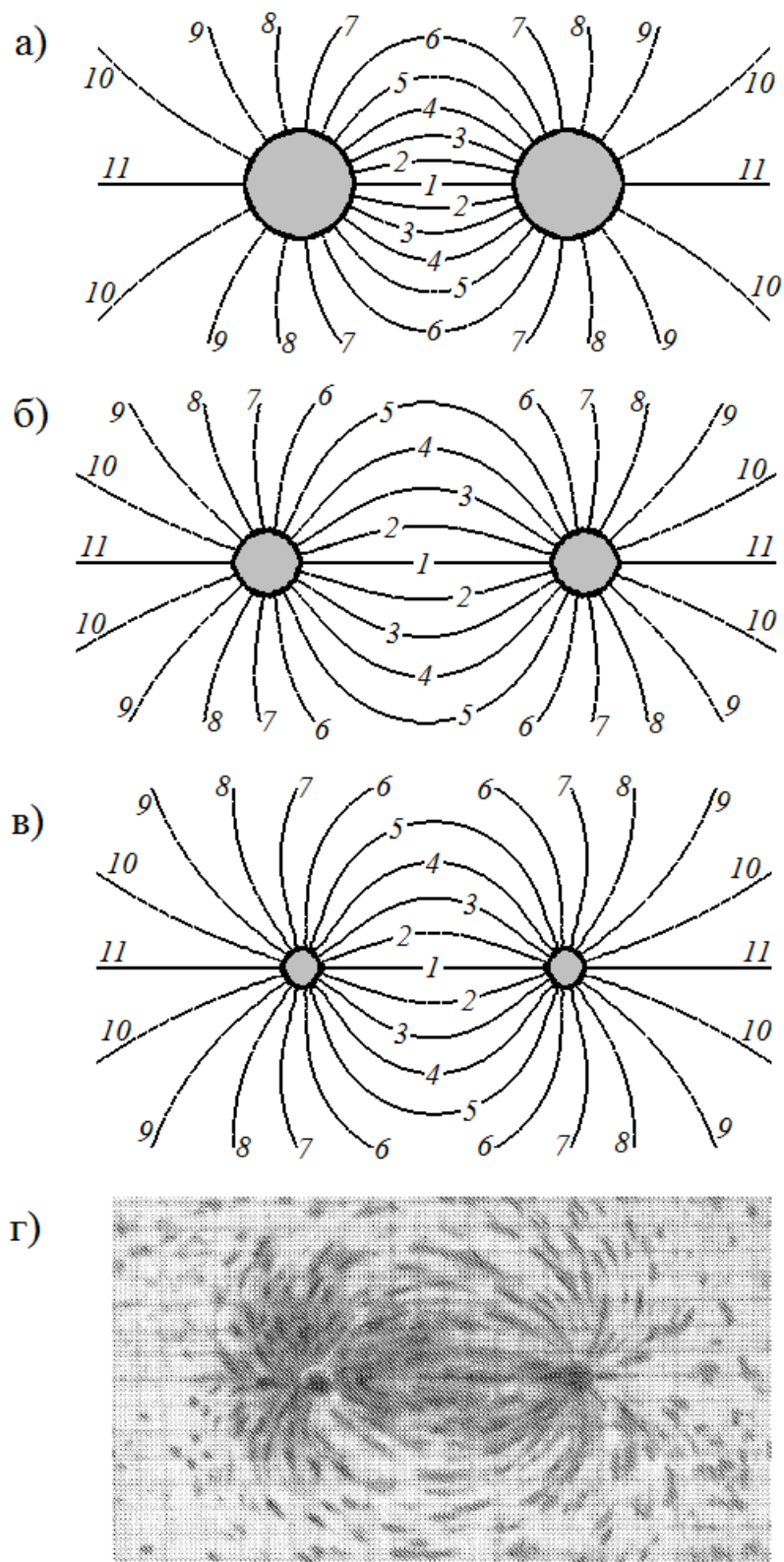


Рис. 2. Линии относительного тока жидкости φ в зависимости от расстояния AB между источником и стоком: а) расчет, $AB=3$; б) расчет, $AB=7.5$; в) расчет, $AB=14$; г) эксперимент [18], $AB=14$ при: $\varphi=1$ (1); $\varphi=0.9$ (2); $\varphi=0.8$ (3); $\varphi=0.7$ (4); $\varphi=0.6$ (5); $\varphi=0.5$ (6); $\varphi=0.4$ (7); $\varphi=0.3$ (8); $\varphi=0.2$ (9); $\varphi=0.1$ (10); $\varphi=0$ (11)

Заключение

Получено решение уравнений Стокса в биполярных координатах для случая течения вязкой жидкости между двумя отверстиями на плоскости, при котором одно из отверстий является источником жидкости, а другое – стоком. Приведены расчетные зависимости безразмерной функции тока в виде линий равного уровня для различных значений расстояния между источником и стоком. Сравнение полученных расчетных зависимостей с имеющимися в литературе экспериментальными данными показало достаточно хорошее их совпадение.

Список источников

1. Лейбензон Л.С. Гидродинамическая теория смазки. - М.: ГТТИ, 1934. - 576 с.
2. Durst F. Fluid Mechanics: An Introduction to the Theory of Fluid Flows. Heidelberg: Springer Berlin, 2022. 818 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-63915-3>
3. Longo S., Tanda M.G., Chiapponi L. Problems in Hydraulics and Fluid Mechanics. Cham: Springer Cham, 2021. 395 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-51387-0>
4. Жуковский Н.Е., Чаплыгин С.А. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником // Труды Отделения физических наук общества любителей естествознания. 1906. Т. 1. № 13. С. 24–33.
5. Коровчинский М.В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. - М.: Машгиз, 1959. - 403 с.

6. Ballal B.Y., Rivlin R.S. Flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders: inertial effects // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1976, vol. 62, no. 3, pp. 237–294. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00280016>
7. Kazakova A.O. Application of bipolar coordinates to the analysis of the structure of viscous fluid flow between two rotating cylinders // Journal of Physics: Conference Series, 2020, vol. 1679, pp. 022068. DOI: [10.1088/1742-6596/1679/2/022068](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1679/2/022068)
8. Петров А.Г., Казакова А.О. Расчет течения вязкой жидкости между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. № 6 (59). С. 1063–1082. DOI: [10.1134/S0044466919060097](https://doi.org/10.1134/S0044466919060097)
9. Кауров П.В. Решение уравнений Стокса для течения жидкости в зазоре между двумя эксцентричными цилиндрами // Вестник Башкирского университета. 2020. № 3 (25). С. 468–471. DOI: [10.33184/bulletin-bsu-2020.3.2](https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2020.3.2)
10. Монахов А.А., Котелкин В.Д. Гидродинамика течения жидкости в зазоре между цилиндром и движущейся стенкой // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 3. С. 81–87. DOI: [10.7868/S0568528117030094](https://doi.org/10.7868/S0568528117030094)
11. Казакова А.О., Петров А.Г. О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 3. С. 16–25. DOI: [10.17868/S0568528116030087](https://doi.org/10.17868/S0568528116030087)
12. Казакова А.О. Численное моделирование поступательного движения цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Научно-технический вестник Поволжья. 2018. № 4. С. 105–108. DOI: [10.24153/2079-5920-2018-8-4-105-108](https://doi.org/10.24153/2079-5920-2018-8-4-105-108)

13. Keh H.J., Horng K.D., Kuo J. Boundary effects on electrophoresis of colloidal cylinders // Journal of Fluid Mechanics, 1991, vol. 231, pp. 211–228. DOI: [10.1017/S0022112091003373](https://doi.org/10.1017/S0022112091003373)
14. Wang L.J., Keh H.J. Diffusiophoresis of a colloidal cylinder in an electrolyte solution near a plane wall // Microfluid Nanofluid, 2015, vol. 19, pp. 855–865. DOI: [10.1007/s10404-015-1612-2](https://doi.org/10.1007/s10404-015-1612-2)
15. Гягяева А.Г., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Вывод уравнения динамики геометрически нелинейной пластины, взаимодействующей с тонким слоем вязкой несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2021. № 121. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=162650>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-06)
16. Блинкова О.В., Кондратов Д.В. Задача динамики взаимодействия сдавливаемого слоя вязкого сжимаемого газа с упругой пластиной // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112935>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-21](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-21)
17. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=53466>
18. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. - Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. - 576 с.
19. Chen J.T., Tsai M.H., Liu C.S. Conformal Mapping and Bipolar Coordinate for Eccentric Laplace Problems // Computer Applications in Engineering Education, 2009, vol. 17, no. 3, pp. 314–322. DOI: [10.1002/cae.20208](https://doi.org/10.1002/cae.20208)

20. Chen J.T., Shieh H.C., Lee Y.T. Bipolar coordinates, image method and the method of fundamental solutions for Green's functions of Laplace problems containing circular boundaries // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2011, vol. 35, no. 2, pp. 236–243. DOI: [10.1016/J.ENGANABOUND.2010.08.008](https://doi.org/10.1016/J.ENGANABOUND.2010.08.008)
21. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. - М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. - 232 с.
22. Fassler A. *Fast Track to Differential Equations*. Cham: Springer Cham, 2021, 221 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-83450-0>
23. Magnus R. *Essential Ordinary Differential Equations*. Cham: Springer Cham, 2023, 283 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-11531-8>

References

1. Leibenzon L.S. *Gidrodinamicheskaya teoriya smazki* (Hydrodynamic theory of lubrication), Moscow, GTTI, 1934, 579 p.
2. Durst F. *Fluid Mechanics: An Introduction to the Theory of Fluid Flows*. Heidelberg: Springer Berlin, 2022. 818 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-63915-3>
3. Longo S., Tanda M.G., Chiapponi L. *Problems in Hydraulics and Fluid Mechanics*. Cham: Springer Cham, 2021. 395 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-51387-0>
4. Zhukovskii N.E., Chaplygin S.A. *Trudy Otdeleniya fizicheskikh nauk obshchestva lyubitelei estestvoznaniya*, 1906, vol. 1, no. 13, pp. 24–33.

5. Korovchinskii M.V. *Teoreticheskie osnovy raboty podshipnikov skol'zheniya* (Theoretical foundations of the operation of plain bearings), Moscow, Mashgiz, 1959, 403 p.
6. Ballal B.Y., Rivlin R.S. Flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders: inertial effects, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1976, vol. 62, no. 3, pp. 237–294. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00280016>
7. Kazakova A.O. Application of bipolar coordinates to the analysis of the structure of viscous fluid flow between two rotating cylinders, *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1679, pp. 022068. DOI: [10.1088/1742-6596/1679/2/022068](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1679/2/022068)
8. Petrov A.G., Kazakova A.O. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, 2019, no. 6 (59), pp. 1063–1082. DOI: [10.1134/S0044466919060097](https://doi.org/10.1134/S0044466919060097)
9. Kaurov P.V. *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, 2020, no. 3 (25), pp. 468–471. DOI: [10.33184/bulletin-bsu-2020.3.2](https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2020.3.2)
10. Monakhov A.A., Kotelkin V.D. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2017, no. 3, pp. 81–87. DOI: [10.7868/S0568528117030094](https://doi.org/10.7868/S0568528117030094)
11. Kazakova A.O., Petrov A.G. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2016, no. 3, pp. 16–25. DOI: [10.17868/S0568528116030087](https://doi.org/10.17868/S0568528116030087)
12. Kazakova A.O. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik Povolzh'ya*, 2018, no. 4, pp. 105–108. DOI: [10.24153/2079-5920-2018-8-4-105-108](https://doi.org/10.24153/2079-5920-2018-8-4-105-108)
13. Keh H.J., Horng K.D., Kuo J. Boundary effects on electrophoresis of colloidal cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, vol. 231, pp. 211–228. DOI: [10.1017/S0022112091003373](https://doi.org/10.1017/S0022112091003373)

14. Wang L.J., Keh H.J. Diffusiophoresis of a colloidal cylinder in an electrolyte solution near a plane wall, *Microfluid Nanofluid*, 2015, vol. 19, pp. 855–865. DOI: [10.1007/s10404-015-1612-2](https://doi.org/10.1007/s10404-015-1612-2)
15. Gyagyaeva A.G., Kondratov D.V., Mogilevich L.I. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=162650>. DOI: [10.34759/trd-2021-121-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-06)
16. Blinkova O.V., Kondratov D.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112935>. DOI: [10.34759/trd-2020-110-21](https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-21)
17. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2014, no. 78. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53466>
18. Prandtl' L. *Gidroaeromekhanika* (Hydroaeromechanics), Izhevsk, NITS “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, 2000, 576 p.
19. Chen J.T., Tsai M.H., Liu C.S. Conformal Mapping and Bipolar Coordinate for Eccentric Laplace Problems, *Computer Applications in Engineering Education*, 2009, vol. 17, no. 3, pp. 314–322. DOI: [10.1002/cae.20208](https://doi.org/10.1002/cae.20208)
20. Chen J.T., Shieh H.C., Lee Y.T. Bipolar coordinates, image method and the method of fundamental solutions for Green’s functions of Laplace problems containing circular boundaries, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2011, vol. 35, no. 2, pp. 236–243. DOI: [10.1016/J.ENGANABOUND.2010.08.008](https://doi.org/10.1016/J.ENGANABOUND.2010.08.008)
21. Uflyand Ya.S. *Bipolyarnye koordinaty v teorii uprugosti* (Bipolar coordinates in the theory of elasticity), Moscow – Leningrad, GITTL, 1950, 232 p.
22. Fassler A. *Fast Track to Differential Equations*. Cham: Springer Cham, 2021, 221 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-83450-0>

23. Magnus R. *Essential Ordinary Differential Equations*. Cham: Springer Cham, 2023, 283 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-11531-8>

Статья поступила в редакцию 07.02.2023

Одобрена после рецензирования 14.03.2023

Принята к публикации 27.04.2023

The article was submitted on 07.02.2023; approved after reviewing on 14.03.2023; accepted for publication on 27.04.2023