

УДК 539.3

Локализация волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде

В.И. Ерофеев, А.О. Мальханов, А.Н. Морозов

Аннотация

Изучается влияние магнитного поля на формирование локализованной волны в нелинейно-упругой проводящей среде. Получено эволюционное уравнение для описания распространения волнового пучка в среде, совпадающее с известным в теории нелинейных волн уравнением Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова. Проанализированы зависимости параметров волнового пучка от величины внешнего магнитного поля.

Ключевые слова

магнитное поле, нелинейно-упругая среда, магнитоупругость.

Рассмотрим распространение продольного волнового пучка в однородной, нелинейно-упругой проводящей среде, находящейся во внешнем магнитном поле.

Система уравнений магнитоупругости имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \vec{F}_{\text{нел}} + \frac{1}{4\pi} \left(\text{rot } \vec{H} \times \vec{H} \right), \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \text{rot} \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \times \vec{H} \right] + \frac{c^2}{4\pi \cdot \sigma} \Delta \vec{H}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \vec{u} – вектор перемещений; λ, μ – модули упругости (константы Ламе) второго порядка; ρ – плотность материала; \vec{H} – напряженность магнитного поля, σ –

проводимость, \mathbf{c} – скорость света в вакууме. Вектор $\vec{F}_{\text{нел}}$ включает в себя слагаемые, обусловленные учетом упругой нелинейности.

Суммарное магнитное поле состоит из его постоянного значения и возмущений, появляющихся в результате взаимодействия с полем деформаций

$$\vec{H} = H_0 \vec{n} + \vec{h}, \quad (2)$$

где \vec{n} – вектор нормали, \vec{h} – малое возмущение магнитного поля.

Сначала рассмотрим случай, когда внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью H_0 перпендикулярно направлению распространения волн.

Для трехмерной упругой среды имеем:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z), \quad \vec{h} = (h_x, h_y, h_z), \quad \vec{H} = (h_x, h_y, H_0 + h_z). \quad (3)$$

Если систему (1) расписать через компоненты (3),

получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - c_\tau^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) - F_{\text{нел}.x} - \\ & - \frac{1}{4\pi\rho} \left[(H_0 + h_z) \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) - h_y \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \right] = 0, \\ & \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - c_\tau^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) - \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} \right) - F_{\text{нел}.y} - \\ & - \frac{1}{4\pi\rho} \left[h_x \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) - (H_0 + h_z) \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) \right] = 0, \\ & \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - c_\tau^2 \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) - \frac{\lambda + \mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} \right) - F_{\text{нел}.z} - \\ & - \frac{1}{4\pi\rho} \left[h_y \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) - h_x \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \right] = 0, \\ & \frac{\partial h_x}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(h_y \frac{\partial u_x}{\partial t} - h_x \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(h_x \frac{\partial u_z}{\partial t} - (H_0 + h_z) \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) \right] - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2} \right) = 0, \\ & \frac{\partial h_y}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial z} \left((H_0 + h_z) \frac{\partial u_y}{\partial t} - h_y \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(h_y \frac{\partial u_x}{\partial t} - h_x \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) \right] - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2} \right) = 0, \\ & \frac{\partial h_z}{\partial t} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h_x \frac{\partial u_z}{\partial t} - (H_0 + h_z) \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left((H_0 + h_z) \frac{\partial u_y}{\partial t} - h_y \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) \right] - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Зд
 есь $c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ – скорость распространения продольной волны, $c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ – скорость

распространения сдвиговой волны.

Рассмотрим распространение вдоль оси x пучка продольных волн. Предполагаем его ограниченным, слаборасходящимся и близким к плоской волне. Будем рассматривать область, в которой параметры нелинейности, дисперсии и дифракции имеют одинаковый порядок ($\sim \varepsilon$). Перейдем в системе (4) к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_x}{\varepsilon \Lambda d}, v = \frac{u_y}{\varepsilon \Lambda d}, w = \frac{u_z}{\varepsilon \Lambda d}, \\ x' &= \frac{x}{\Lambda d}, y' = \frac{y}{\Lambda d}, z' = \frac{z}{\Lambda d}, t' = \frac{c_l t}{\Lambda d} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь Λ – безразмерный масштаб волны (Λd – длина волны).

Введем лучевые координаты:

$$\xi = x' - \tilde{c} t', \eta = \varepsilon x', \chi = \sqrt{\varepsilon} y', \zeta = \sqrt{\varepsilon} z', \quad (6)$$

где \tilde{c} – характерная скорость, заранее неизвестная. Выбор лучевых переменных в виде (6) отражает тот факт, что в силу нелинейности, дисперсии и дифракционной расходимости величины u, v, w изменяются как вдоль направления распространения пучка ($\sim \varepsilon$), так и поперек ($\sim \sqrt{\varepsilon}$).

Подставим (5) и (6) в систему (4), сохраняя при этом члены с ε в степени, не выше первой. Тогда система уравнений магнитоупругости (4) сведется к одному скалярному

уравнению для осевой деформации $U = \frac{\partial u}{\partial \xi}$, описывающее эволюцию волнового пучка [2]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right] + \gamma_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2} + \gamma_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (7)$$

где

$$\alpha = \frac{(5 + g + 3 \frac{c_A^2}{c_l^2})}{1 - \frac{c_A^2}{c_l^2}}, \beta = \frac{c^2}{4\pi \cdot \sigma c_l^2 \sqrt{1 + \frac{c_A^2}{c_l^2}}}, \gamma_1 = \frac{1 - \frac{E}{\lambda + \mu} \frac{c_A^2}{c_l^2}}{\left(1 - \frac{c_A^2}{c_l^2}\right) \left(1 + \frac{E}{\lambda + \mu} \frac{c_A^2}{c_l^2}\right)}, \gamma_2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{c_A^2}{c_l^2}\right) \left(1 + \frac{E}{\lambda + \mu} \frac{c_A^2}{c_l^2}\right)},$$

$$\tilde{c} = \sqrt{c_l^2 + c_A^2}, g = \frac{2A + 6B + 2C}{\rho c_0^2}; A, B, C \text{ – константы Ландау, } E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \text{ – модуль Юнга, } c_A = \sqrt{\frac{H_0^2}{4\pi\rho}} \text{ – скорость волны Альфвена [1].}$$

Уравнение (7) совпадает с известным в теории нелинейных волн уравнением Хохлова – Заболоцкой – Кузнецова. Решение, описываемое этим уравнением, имеет вид:

$$U = A - Bth \left[-\frac{\alpha B}{2\beta} \xi + \sqrt{\frac{1}{4\gamma_1}} \chi + \sqrt{\frac{1}{4\gamma_2}} \zeta + \frac{2\beta^2 + \alpha^3 AB^2}{2\alpha\beta B} \eta \right], \quad (8)$$

где A, B – произвольные постоянные.

Рассмотрим решение уравнения Хохлова – Заболоцкой – Кузнецова при $A = 2, B = 1$ и проследим изменение ширины пучка вдоль каждой из координат в зависимости от величины внешнего магнитного поля. С учетом выбранных произвольных постоянных, выражения для ширины пучка вдоль осей имеет вид:

$$\Delta_\xi = -\frac{2\beta}{\alpha}, \Delta_\eta = -\frac{\alpha\beta}{\beta^2 + \alpha^3}, \Delta_\chi = 2\sqrt{\gamma_1}, \Delta_\zeta = 2\sqrt{\gamma_2}. \quad (9)$$

Для конденсированных сред в магнитных полях до 10 Тл скорость волны Альфвена меньше скорости распространения продольной волны [2], поэтому изменение параметров представлено на интервале $0 \leq c_A/c_l < 1$. Практический же интерес представляют значения параметров на интервале $0 \leq c_A/c_l < 0.3$.

На Рис. 1 представлено изменение ширины пучка вдоль оси ξ (бегущая координата):

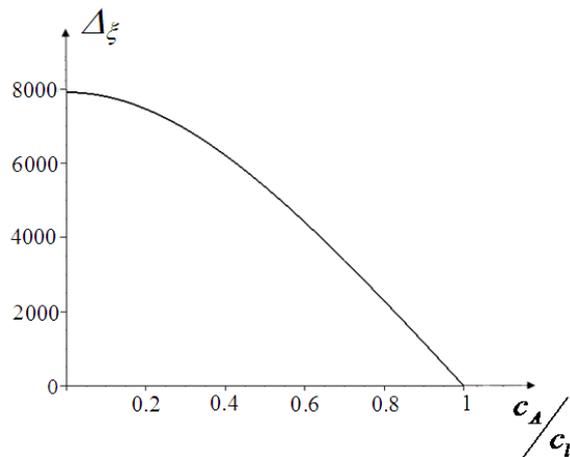


Рис.1

Из рисунка видно, что с ростом величины внешнего магнитного поля ширина волнового пучка уменьшается.

На Рис. 2 представлена зависимость ширины пучка вдоль оси η (поправка порядка \mathcal{E} к продольной координате):

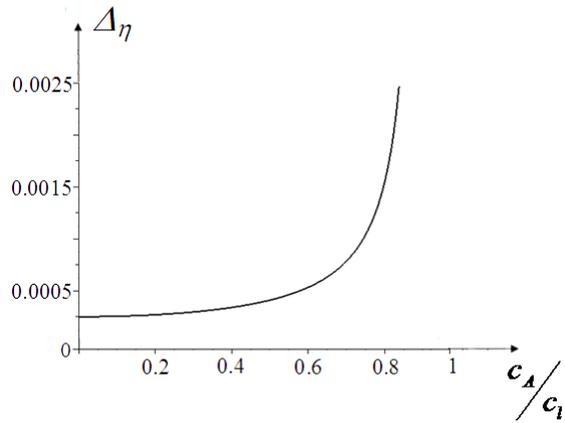


Рис. 2

Из рисунка видно, что с ростом величины внешнего магнитного поля к ширине вдоль продольной оси практически не изменяется.

На Рис. 3 представлена зависимость ширины пучка вдоль оси χ (поперечная координата):

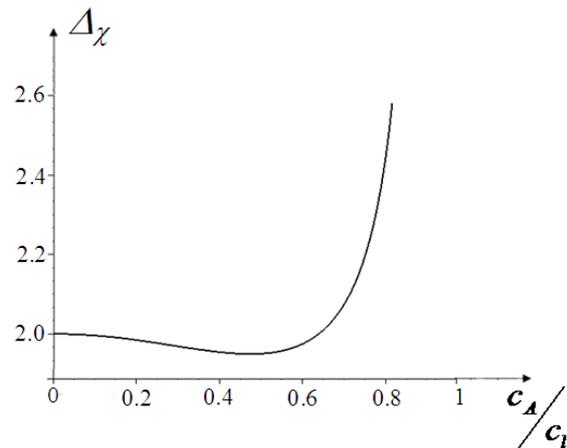


Рис. 3

Из рисунка видно, что с ростом величины внешнего магнитного поля ширина вдоль поперечной координаты χ сначала убывает, затем начинает возрастать. Однако, в силу сказанного выше о интервале изменения величины c_A/c_1 , практический интерес представляет только участок, где ширина пучка вдоль оси χ убывает.

На Рис. 4 представлена зависимость ширины пучка вдоль оси ζ (поперечная координата):

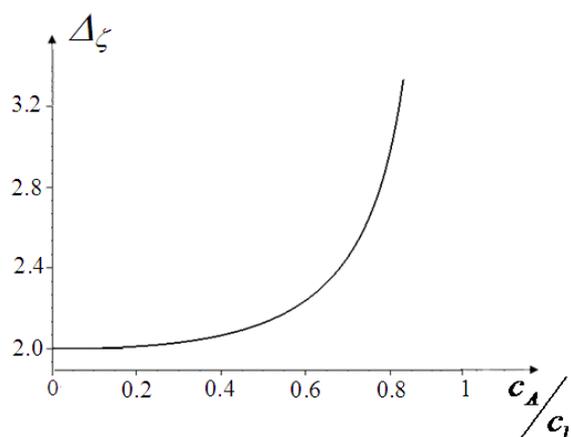


Рис. 4

Из рисунка видно, что с ростом величины внешнего магнитного поля ширина волнового пучка вдоль второй поперечной оси возрастает.

Заметим, что влияние магнитного поля на локализацию одномерных нелинейных волн деформации рассматривалось ранее в [3, 4].

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (гранты № 09-08-00827; № 09-08-00188; № 08-08-97057-р_поволжье).

Рекомендовано к публикации программным комитетом XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова.

Библиографический список

1. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наукова думка, 1991. 200 с.
2. Физико-химические процессы обработки материалов концентрированными потоками энергии / Под ред. Углова А.А. М.: Наука. 1989.
3. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние магнитного поля на локализацию волны деформации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 1. С.95-100.
4. Мальханов А.О., Ерофеев В.И. Магнитоупругая волна Римана в стержне // Нелинейный мир. 2009. Т.7, № 12. С.943-946.

Сведения об авторах

Владимир Иванович Ерофеев, заместитель директора по научной работе Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А. Благонравова, д.ф.-м.н., профессор, 603024, Нижний Новгород, ул. Белинского, 85, (831) 432-05-76, erf04@sinn.ru

Алексей Олегович Мальханов, аспирант Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, alexey.malkhanov@gmail.com

Морозов Андрей Николаевич заведующий кафедрой Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, д.ф.-м.н., профессор, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, (495) 263-63-52, amor@mx.bmstu.ru