Труды МАИ. Выпуск № 108 https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-15
УДК 519.6

О быстром решении основной бигармонической проблемы

Алгазин С.Д.[1*], Соловьев Г.Х.[2]**

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, проспект Вернадского, 101, корп.1, Москва, 119526, Россия*

[2] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

**e-mail: algazinsd@mail.ru*

***e-mail: 19tatarin45@rambler.ru*

Статья поступила 15.10.2019

Аннотация

В работе предложен метод численного решения эллиптических задач механики твердого деформируемого тела, основанный на идеях, предложенных в начале 70-х годов К.И. Бабенко и его учениками, который в отличие от метода конечных элементов учитывает гладкость решений.

Дается методика численного решения краевых задач для бигармонического уравнения. Приведен подсчет необходимого при этом числа операций.

Дана ссылка на программу быстрого умножения h-матрицы на вектор [25].

Ключевые слова: h –матрица, циркулянт, дискретное преобразование Фурье, бигармоническая проблема, метод без насыщения.

Введение

Бигармоническое уравнение, представляющее собой дифференциальное уравнение в частных производных 4-го порядка, играют важную роль в механике сплошных сред при моделировании поведения упругих пластин под нагрузкой [1], а также в гидродинамике малых чисел Рейнольдса [2]. Несмотря на линейный характер бигармонического уравнения, интегрирование некоторых частных постановок краевых задач для него, например защемленная на границе пластина с равномерной нагрузкой [3] или кондуктивно-ламинарная свободная конвекция в каверне [4], существование и единственность решения которых доказаны в [5], вызывает ряд трудностей. В [6] впервые методом суперпозиции решений Навье и Леви получено аналитическое выражение для искомой функции в виде рядов, однако ценность его невелика, ввиду плохой сходимости этих рядов в области угловых точек из-за наличия в коэффициентах гиперболических функций, существенно лимитирующих число слагаемых при вычислениях. Данное обстоятельство стимулировало исследования по поиску способов улучшения сходимости аналитического решения с использованием асимптотического закона [7], а также по выбору альтернативной системы ортогональных функций [8–10], [27], упрощающих вычислительный процесс. Параллельно стали разрабатываться эффективные численные схемы интегрирования краевых задач для бигармонического уравнения [11–14], основным недостатком которых является трудность достижения требуемой степени детализации области интегрирования из-за их неявного характера, что предполагает решение систем линейных уравнений очень высокого порядка с неразряженной матрицей. Разрешение такой коллизии может быть осуществлено, например, путем симбиоза маршевых конечноразностных схем и метода установления [26].

В [15] предложена конечно-разностная схема. Отметим плюсы предложенной конечно-разностной схемы. Во-первых, ее преимущество в том, что она явная, и не приходится решать систему уравнений с неразряженной матрицей, что весьма облегчает вычислительный процесс. Во-вторых, можно заранее задавать точность и в соответствии с ней вычислять оптимальный шаг и количество шагов, необходимых для сходимости алгоритма. В-третьих, явный характер схемы в отличие от неявного позволяет хранить в памяти ЭВМ только один шаг итерации, что существенно экономит память ЭВМ и время расчета. Решение задачи согласуется с известными результатами С. П. Тимошенко [1].

Схемы конечных разностей бигармонической проблемы на прямоугольниках попадают в две категории: Соединенные и несоединенные схемы. В двойных схемах проблема анализируется в две проблемы Пуассона, объединенные с граничными условиями. Классические работы включают [16], [17], [18], [19]. Когда применяют такую схему к бигармонической проблеме Дирихле, сталкиваемся с трудностями при дизайне искусственных граничных условий для первой проблемы Пуассона, тогда как вторая сверх определяется. В контексте гидроаэродинамики этот вопрос связан с дизайном искусственного граничного условия для завихрения потока.

Основная цель статьи [20] состоит в том, чтобы представить быстрый решатель для компактных дискретизаций бигармонической проблемы. Это достигается формулировкой *матрицы емкости*. В первой части статьи строится формулировка матрицы емкости для схемы Стивенсона на прямоугольной сетке.

Показывается, как это эффективно применяется к решению дискретной бигармонической проблемы.

О вычислительной эффективности сообщают для нескольких проблем четвертого порядка. Вычислительная стоимость, оказывается по порядку величины O (N^2 Log(N)), где N является количеством узлов сетки в каждом направлении. Мы отмечаем, что типичное вычислительное время решателя для 1024×1024 сетки составляет десять секунд на PC. Наконец, давайте упомянем работу [21] для всесторонней истории бигармонической проблемы в двух измерениях.

При дискретизации методом без насыщения К. И. Бабенко [22] задачи Дирихле для оператора Лапласа в круге получается матрица, имеющая следующую блочную структуру:

$$H = \begin{Vmatrix} h_{11}\, h_{12} \ldots h_{1m} \\ h_{21}\, h_{22} \ldots h_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{m1}\, h_{m2} \ldots h_{mm} \end{Vmatrix},$$

где $h_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 1,2, \ldots ,m$ –симметричные циркулянты размера $N\times N$, $N = 2n + 1$, т. е. матрицы, первая строка которых имеет вид: b_0, $b_1,\ldots,b_n,b_n,\ldots,b_1$, а остальные строки получаются из первой циклической перестановкой. Для краткости будем называть матрицы такого вида h-матрицами. Здесь m и N – параметры в круге, m – число окружностей сетки, а $N = 2n + 1$ – число точек на каждой окружности. Теорема, о свойствах этой матрицы, доказана в [23]. Позднее стало ясно, что матрицы такого вида и некоторые их обобщения широко встречаются в задачах математической физики. Их можно использовать при дискретизации так, что дискретизация двумерной задачи сводится к дискретизации одномерной задачи, а дискретизация трехмерной задачи сводится к дискретизации двумерной задачи [23].

1. Численное решение основной бигармонической проблемы

Опишем методику численного решения краевых задач для бигармонического уравнения.

Для примера рассмотрим основную бигармоническую проблему, т. е. краевую задачу (1):

$$\Delta^2 u(z) = F(z), \quad z \in G,\ u|_{\partial G} = \mathrm{X}(z),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G} = \Psi(z). \tag{1}$$

Будем предполагать, что *F, X,* Ψ – достаточно гладкие функции, а *G* – область с гладкой границей ∂G; *n* – единичный вектор внешней нормали к ∂G. Аналогично, п.4.1[24] переходим при помощи конформного отображения $z = \varphi(\varsigma),\ |\varsigma| \le 1$ к краевой задаче в круге:

$$\Delta\left(\left|\varphi'(\varsigma)\right|^{-2} \Delta u\right) = \left|\varphi'(\varsigma)\right|^{2} f(\varsigma), \quad \varsigma = re^{i\varphi},\ r < 1,\ u|_{r=1} = \chi(\theta),\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \psi(\theta), \tag{2}$$

Здесь $f(\varsigma) = F(\varphi(\varsigma)),\ \chi(\theta) = \mathrm{X}(\varphi(e^{i\theta})),\ \psi(\theta) = |\varphi'(\varsigma)|\,\Psi(\varphi(\varsigma))\big|_{\varsigma = e^{i\theta}}$. Переход от задачи (2) к конечномерной задаче полностью аналогичен переходу в п. 4.1[22]. Будем обозначать

$$z(\varsigma) = |\varphi'(\varsigma)|^2,\quad u = (u_1 \ldots u_M)',\quad f = (f_1 \ldots f_M)',\quad \psi = (\psi_1 \ldots \psi_{2n})',\quad \chi = (\chi_1 \ldots \chi_{2n})'$$

векторы значений соответствующих функций в узлах интерполяции внутри круга и на границе. Тогда имеем

$$u = Df + BH_0C\psi + (H_0 - BH_0C\boldsymbol{B})\chi + \delta, \tag{3}$$

где δ – погрешность дискретизации, для которой нетрудно написать конкретное выражение. Матрицы D, B, H_0 и C определены в п. 4.1 книги [24], а элементы матрицы $\boldsymbol{B}$ размера $N\times N$ определены в соотношении 3.29[24].

Таким образом, для того чтобы приближенно вычислить в узлах интерполяции значения решения краевой задачи (2), нужно умножить матрицы D, BH_0C и $H_0-BH_0C\boldsymbol{B}$ на векторы f, ψ и χ соответственно. В выражении (3) конкретный вид области учитывается заданием диагональной матрицы $diag(z_1 \ldots z_M)$, а вид правой части уравнения (1) и вид граничных условий учитывается заданием соответствующих векторов. Остальные массивы H, H_0, H_1и $\boldsymbol{B}$ вычисляются только один раз (они используются и в других задачах). Кроме того, эти массивы содержат большое число повторяющихся элементов и могут храниться в "упакованном" виде, т.е. хранить следует только различные элементы. Это обстоятельство позволяет производить расчеты с большим числом точек, т. е. на частой сетке и, следовательно, рассмотреть задачи в сложных областях. Количество операций – порядка умножения h-матрицы на вектор.

2. **Вторая краевая задача плоской теории упругости**

Пусть $\vec{N}=\{l,m\}$– вектор внешней нормали к границе рассматриваемой плоской области G. Для второй краевой задачи плоской теории упругости величины: $\overline{X}=l\sigma_x+m\tau_{xy}$,$\overline{Y}=m\sigma_y+l\tau_{xy}$ – заданы как функции s- длины дуги.

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\Rightarrow \overline{X}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),\ \overline{Y}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

Заметим, что $l=\dfrac{dy}{ds}$, $m=-\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{d\varphi}{dn}=l\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+m\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ и проинтегрируем это равенство по некоторой дуге s в положительном направлении (при котором область остается слева) от некоторой точки A до произвольной точки B. В результате получим значения производных функции Эри в произвольной точке B: $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_B=K-\int\limits_A^B\overline{Y}ds$, $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_B=N-\int\limits_A^B\overline{X}ds$, где K и N – постоянные, равные значениям производных функции Эри в начальной точке A дуги s.

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds},\qquad \frac{d\varphi}{dn}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot l+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot m\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\left(K-\int\limits_A^B\overline{Y}ds\right)l+\left(N+\int\limits_A^B\overline{X}ds)\right)m \quad (4)$$

Интегрируя равенство (4) по дуге AB, получим

$$\varphi=M+\int\limits_A^B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}\right)ds, \quad (5)$$

где M – постоянная, равная значению функции Эри в начальной точке A дуги s. Для односвязной области можно принять M = K = N = 0. Соотношения (4) – (5) – искомые граничные условия для функции напряжений Эри.

Пример. Круг единичного радиуса под действием равномерного давления P.

$$l=\cos\theta,\ m=\sin\theta;\ \int\limits_0^{\theta_B}\overline{Y}ds=\int\limits_0^{\theta_B}(-P\sin\theta)d\theta=P(\cos\theta_B-1)\ \int\limits_0^{\theta_B}\overline{X}ds=$$

$$=\int\limits_0^{\theta_B}(-P\cos\theta)d\theta=-P\sin\theta_B\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial n}=P(\cos\theta-1).$$

$$\frac{dx}{ds}=-\sin\theta,\ \frac{dy}{ds}=\cos\theta;\ \frac{\partial\phi}{\partial x}=\int\limits_0^{\theta_B}P\sin\theta d\theta=-P(\cos\theta_B-1);\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\int\limits_0^{\theta_B}P\cos\theta d\theta=$$

$$=-P\sin\theta_B\Rightarrow\varphi=P(\cos\theta-1).$$

Легко видеть, что тогда решение бигармонического уравнения для функции напряжений φ есть: $\varphi(r,\theta) = \Pr\cos\theta - P\frac{r^2+1}{2}$, $\Delta\varphi = -P$, $\Delta^2\varphi = 0$, $\sigma_r = -P$, $\sigma_\theta = -P$, $\sigma_{r\theta} = 0$.

В [24] эти соотношения проверяются численно.

Таким образом, для решения тестовой задачи потребовались три таблицы H – 18 чисел, H0 – 6 чисел, H1 – 6 чисел. Таким образом, можно констатировать, что решена задача табулирования.

3. Быстрое умножение h-матрицы на вектор

Для того, чтобы оценить количество операций, необходимых для умножения *h*-матрицы *H* на вектор *f,* представим *f* в блочном виде: $f = (f_1\, f_2 \ldots\, f_m)'$, где векторы $f_\nu \in R^N$, $\nu = 1,2,\ldots,m$, тогда

$$Hf = \left\| \begin{matrix} h_{11}f_1 + \ldots + h_{1m}f_m \\ h_{21}f_1 + \ldots + h_{2m}f_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{m1}f_1 + \ldots + h_{mm}f_m \end{matrix} \right\|$$

Таким образом, задача сводится к построению быстрого алгоритма умножения симметричного циркулянта $h_{\mu\nu}$ на вектор $f_\nu \in R^N$, $\mu, \nu = 1,2,\ldots,m$.

Представим компоненты этого вектора в виде:

$$f_{\nu j} = a_{\nu 0} + \sum_{k=1}^{n} [a_{\nu k} \cos(k\phi_j) + b_{\nu k} \sin(k\phi_j)],\ \phi_j = 2\pi j / N,\ N = 2n+1,\ j = 0,1,\ldots,2n, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} a_{\nu 0} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2n} f_{\nu j} \\ a_{\nu p} &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{2n} f_{\nu j} \cos(p\phi_j),\ p = 1,2,\ldots,n \\ b_{\nu p} &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{2n} f_{\nu j} \sin(p\phi_j),\ \ p = 1,2,\ldots,n,\ \nu = 1,2,\ldots,m \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{2n} h_{\mu\nu ij} f_{\nu j} = a_{\nu 0} \lambda_{\mu\nu 0} + \sum_{p=1}^{n} [\lambda_{\mu\nu p} a_{\nu p} \cos(p\phi_j) + \lambda_{\mu\nu p} b_{\nu p} \sin(p\phi_j)], \tag{7}$$

$i = 0,1,\ldots,2n$.

Следовательно, нужно уметь быстро вычислять суммы (6). Эти процедуры сводятся к вычислению сумм вида:

$$A_q = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp(2\pi i \frac{qj}{N}),\ q = 0,1,\ldots,N-1, \tag{8}$$

где $N=2n+1$ нечётно. Если $N=3^r$, $r=1,2,\ldots,$ то для вычисления требуется $4Nr$ операций; доказательство аналогично классическому случаю.

Подсчитаем количество операций, необходимых для умножения h-матрицы на вектор. Надо вначале вычислить коэффициенты Фурье векторов f_ν, $\nu=1,2,\ldots,m$ по формулам (6), а затем умножить m^2 циркулянтов на вектор по формуле (7). _Кроме того, требуется произвести $Nm(m-1)$ сложений; всего получаем $O(m^2 N \log N)$

операций. Например, при *N=27* и больших *m* экономия составляет 53% операций по сравнению с непосредственным умножением матрицы *H* на вектор.

4. Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье

$$g_i = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos k\theta_i + b_k \sin k\theta_i\right),\ \theta_i = \frac{2\pi i}{N},\ N = 2n+1,\ i = 0,...,2\text{n}. \qquad (9)$$

Суммируя по i получим $a_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{2n} g_i$. Пусть $p \neq 0$

$$\sum_{i=0}^{2n} g_i \cos i\theta_p = a_0 \sum_{i=0}^{2n} \cos p\theta_i + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \sum_{i=0}^{2n} \cos k\theta_i \cos p\theta_i + b_k \sum_{i=0}^{2n} \sin k\theta_i \sin p\theta_i\right)$$

Заметим, что $\sum_{i=0}^{2n} \cos p\theta_i = 0,\ \sum_{i=0}^{2n} \sin k\theta_i \sin p\theta_i = 0,\ \sum_{i=0}^{2n} \cos k\theta_i \cos p\theta_i = \frac{N}{2}\delta_{kp}.$

Отсюда получаем:

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{2n} g_i,\ a_p = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{2n} g_i \cos p\theta_i,\ b_p = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{2n} g_i \sin p\theta_i,\ p = 1,...,n.$$

(10)

По формулам (10) получаем обратное преобразование Фурье. Заметим, что

$$g_{N-i} = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos k\theta_i - b_k \sin k\theta_i\right),\quad i = 1,...,n.\ g_0 = a_0 + a_1 + ... + a_n$$

Распишем формулы для умножения циркулянта на вектор.

$$h_{ij} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{m}{}' \lambda_k \cos k\frac{2\pi}{N}(i-j),\ \cos k\left(\theta_i - \theta_j\right) = \cos k\theta_i \cos k\theta_j + \sin k\theta_i \sin k\theta_j$$

Пусть требуется умножить матрицу h на вектор g. Представим g в виде дискретного преобразования Фурье (9)

$$\sum_{j=0}^{2n} \cos p\left(\theta_i - \theta_j\right) g_j = \sum_{j=0}^{2n} \cos p\left(\theta_i - \theta_j\right)\left(a_0 + \sum_{r=1}^{n}\left(a_k \cos k\theta_j + b_k \sin k\theta_j\right)\right) =$$

$$=\frac{N}{2}\left(a_p\cos p\theta_i+b_p\sin p\theta\right),\quad p\neq 0$$. При $p=0$ получаем Na_0.

Итак, $\sum\limits_{j=0}^{2n} h_{ij}g_j=\lambda_0 a_0+\sum\limits_{p=1}^{n}\left(\lambda_p a_p\cos p\theta_i+\lambda_p b_p\sin p\theta_i\right)$

Число операций: (Обратное преобразование Фурье по формулам (10) $+(N)$ операций для вычисления $\lambda a_0,\lambda_p a_p,\lambda_p b_p,\ p=1,\ldots,n)+$ (прямое преобразованиеФурье). Следовательно, нужно быстро вычислять суммы (8). Тогда можно построить прямое и обратное преобразование Фурье. Рассмотрим случай, когда $N=3^r$ т. е. $N=3,9,27,81,\ldots$ и запишем индексы в троичной системе исчисления:

$$q=\sum_{k=1}^{r} q_k 3^{k-1};\qquad j=\sum_{m=1}^{r} j_{r+1-m}3^{m-1};\qquad \text{где } q_k,j_m=0,1,2.$$

Величину $qj/N=qj3^{-2}$ можно представить в виде

$$qj3^{-2}=\sum_{m=1}^{r} qj_{r+1-m}3^{m-1}=\sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{r} q_k 3^{k+m-r-2}\right)j_{r+1-m}=$$
$$=\sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{r-m+1} q_k 3^{k+m-r-2}\right)j_{r+1-m}+S,$$

где S -целое число. Действительно, если

$k+m-r-2\geq 0,$ *то* $q_k j_{r+1-m}3^{k+m-r-2}$ -целое число, а при

$k<r-m+2$ *это число дробное.* Поэтому в силу периодичности экспоненты

суммирование по k достаточно вести до значения $r-m+1$. Поэтому имеем

$$A_q = A\left(q_1, q_2, \dots, q_r\right) = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp\left(2\pi i \frac{qj}{N}\right) = \sum_{j_r=0}^{2} \dots \sum_{j_1=0}^{2} f_{j_r + 3 j_{r-1} + \dots + 3^{r-1} j_1} \times$$

$$\times \exp\left(2\pi i \sum_{m=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{r-m+1} q_k 3^{k+m-r-2}\right) j_{r+1-m}\right) =$$

$$\times \prod_{m=1}^{r} \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{r-m+1} q_k 3^{k+m-r-2}\right) j_{r+1-m} =$$

$$= \exp\left(2\pi i j_r \cdot 3^{-r} \sum_{k=1}^{r} q_k 3^{k-1}\right) \exp\left(2\pi i j_{r-1} 3^{-\left(r-1\right)} \sum_{k=1}^{r-1} q_k 3^{k-1}\right) \times \dots \times \exp\left(2\pi i j_1 3^{-1} q_1\right) \} =$$

$$= \sum_{j_r=0}^{2} \exp\left(2\pi i j_r \cdot 3^{-r} \sum_{k=1}^{r} q_k 3^{k-1}\right) \times \sum_{j_{r-1}=0}^{2} \exp\left(2\pi i j_{r-1} 3^{-\left(k-1\right)}\right) \times$$

$$\times \sum_{j_1=0}^{2} \exp\left(2\pi i j_1 3^{-1} q_1\right) f_{j_r + 3 j_{r-1} + \dots + 3^{r-1} j_1}) \dots)$$

Каждый сомножитель зависит только от одного индекса! Это соотношение можно записать в виде последовательности рекуррентных соотношений.

$$A^{(m)}\left(q_1, \dots, q_m; j_{m+1}, \dots, j_r\right) = \sum_{j_m=0}^{r} \exp\left(2\pi i j_m 3^{-m} \sum_{k=1}^{m} q_k 3^{k-1}\right) \times$$

$$\times A^{\left(m-1\right)}\left(q_1, \dots, q_{m-1}; j_m, \dots, j_r\right), \quad m = 1, \dots, r$$

$$A^{\left(0\right)} = f_{j_r + 3 j_{r-1} + \dots + 3^{r-1} j_1}$$

$$A^{(r)}\left(q_1, \dots, q_r\right) = A\left(q_1, \dots, q_r\right)$$

Подсчитаем число операций (при условии, что экспоненты вычислены): из индексов $q_1, \dots, q_m; j_{m+1}, \dots, j_r$ можно составить $3^r = N$ комбинаций. Для каждой из этих комбинаций имеем 2 сложения + 2 умножения, т. е. 4N операций. Всего шагов r , следовательно, количество операций: $4Nr = 4N\log_3 N$. Пусть, например $q_1 = 2,\ q_2 = 1$, т. е. $q = 2 + 1 \cdot 3 = 5$

$$A^{(1)}(2;j_2) = A^{(0)}(0;j_2) + \exp\left(2\pi i\frac{2}{3}\right)A^{(0)}(1,j_2) + \exp\left(2\pi i\frac{4}{3}\right)A^{(0)}(2,j_2) =$$
$$= f_{j_2} + \exp\left(2\pi i\frac{2}{3}\right)f_{j_2+3} + \exp\left(2\pi i\frac{4}{3}\right)f_{j_2+6}$$

$$A(2,1) = A_5 = A^{(1)}(2;0) + \exp\left(2\pi i\frac{5}{9}\right)A^{(1)}(2,1) + \exp\left(2\pi i\frac{10}{9}\right)A^{(1)}(2,2) =$$
$$= f_0 + \exp\left(2\pi i\frac{2}{3}\right)f_3 + \exp\left(2\pi i\frac{4}{3}\right)f_6 + \exp\left(2\pi i\frac{5}{9}\right)\left(f_1 + \exp\left(2\pi i\frac{2}{3}\right)\ \right)f_4 +$$
$$+\left(\exp\left(2\pi i\frac{4}{3}\right)\ \right)f_7 + \exp\left(2\pi i\frac{10}{9}\right)\left(f_2 + \exp\left(2\pi i\frac{2}{3}\right)\right)f_5 + \exp\left(2\pi i\frac{4}{3}\right)f_8 =$$

$$= f_0 + \exp\left(2\pi i\frac{5}{9}\right)f_1 + \exp\left(2\pi i\frac{10}{9}\right)f_2 + \exp\left(2\pi i\frac{2}{3}\right)f_3 + \exp\left(2\pi i\left(\frac{5}{9}+\frac{2}{3}\right)\right)f_4 +$$
$$+\exp\left(2\pi i\left(\frac{10}{9}+\frac{2}{3}\right)\right)f_5 + \exp\left(2\pi i\frac{4}{3}\right)f_6 + \exp\left(2\pi i\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{3}\right)\right)f_7 + \exp\left(2\pi i\left(\frac{10}{9}+\frac{4}{3}\right)\right)f_8$$

Если $N = 3^r$, то $\log_2 N = \log_3 N \cdot \log_2 3$ следовательно

$4N\log_3 N = \dfrac{2}{\log 3_2}\cdot 2N\log_2 N$ то есть число операций больше, чем в классическом быстром преобразовании Фурье.

5. Выводы

Порядок числа операций для численного решения основной бигармонической проблемы такой же как для умножения h-матрицы на вектор, т. е. *O(m²NlogN)* операций, где m, N=2n+1 – параметры сетки в круге: m–число окружностей, а N–

число точек на каждой окружности. Программы для быстрого умножения h-матрицы на вектор опубликованы в [25].

Работа выполнена по теме государственного задания №АААА-А17-117021310380-1.

Библиографический список

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.
2. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса - М.: Мир, 1976. - 630 с.
3. Постнов В.А., Ростовцев Д.М., Суслов В.П., Кочанов Ю.П. Строительная механика корабля и теория упругости. - Л.: Судостроение, 1987. Т. 2. - 416 с.
4. Слюсарев М.И., Чертов Е.Ю., Ряжских В.И. Аналитическое решение первой тестовой задачи свободной конвекции для кондуктивно-ламинарного режима // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2010. Т. 6. № 7. С. 165 - 167.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. - 742 с.
6. Бубнов И.Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды: Морской сборник. Т. 312. № 10. - СПб.: Изд-во Морского ученого комитета, 1902. С. 119 - 138.

7. Чехов В.Н., Пан А.В. Об улучшении сходимости рядов для бигармонической задачи в прямоугольнике // Динамические системы. 2008. № 25. С. 135 - 144.

8. Суслов В.П., Качанов Ю.П., Спихаренко В.Н. Строительная механика корабля на основе теории упругости. - Л.: Судостроение, 1972. - 720 с.

9. Selvadurai A.P. Partial differention equations in mechanics 2, NewYork, Springer, 2004, 698 p.

10. Слюсарев М.И., Чертов Е.Ю., Ряжских В.И., Богер А.А. Кондуктивно-ламинарная естественная конвекция ньютоновской тепловыделяющей жидкости в квадратной каверне с постоянной температурой стенок // Вестник Воронежского государственного технического университета. Сер. Физика. Математика. 2011. № 1. С. 214 - 218.

11. Кобельков Г.М. О сведении краевой задачи для бигармонического уравнения к задаче типа Стокса // Доклады АН СССР. 1985. Т. 283. № 1. С. 539 - 542.

12. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей - М.: Мир, 1991. Т. 1. - 504 с.

13. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы классической математической физики. - М.: Диалог-МИФИ, 2010. – 240 с.

14. Galanin M.F., Milyutin D.S., Savenkov E.B. Development, research and application of a finite superelements method for solution biharmonical equation, Moscow, Keldysh Institute preprints, 2005, 26 p.

15. Ряжских В.И., Слюсарев М.И., Попов М.И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2013. № 1. С. 52 - 62.

16. J. Smith. The coupled equation approach to the numerical solution of the biharmonic equation by finite differences. I // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1968, no. 5(2), pp. 323 – 339.

17. J. Smith. The coupled equation approach to the numerical solution of the biharmonic equation by finite differences. II // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1970, no. 7(1), pp. 104 - 111.

18. Ehrlich L.W. Solving the biharmonic equations as coupled finite difference equations // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1971, no. 8(2), pp. 278 – 287.

19. McLaurin J.W. A general coupled equation approach for solving the biharmonic boundary value problem // SIAM Journal on Numerical Analysis, 1974, no. 11(1), pp. 14 – 33.

20. Matania Ben-Artzi, Jean-Pierre Croisille, Dalia Fishelov. A fast direct solver for the biharmonic problem in a rectangular grid // SIAM Journal on Scientific Computing, 2008, no. 1, pp. 303 – 333, doi.10.1137/070694168

21. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Applied Mechanics Reviews, 2003, no. 56 (1), pp. 33 - 85.

22. Бабенко К.И. Основы численного анализа. - М.: Наука, 1986. - 744 с.

23. Алгазин С.Д. h - матрица, новый математический аппарат для дискретизации многомерных уравнений математической физики. – М.: URSS, 2018. - 246 с.

24. Алгазин С.Д. Численные алгоритмы без в классических задачах математической физики. - М: URSS, 2018. - 234 с.

25. Алгазин С.Д., Соловьев Г.Х. Численные алгоритмы классической матфизики. Быстрое умножение h-матрицы на вектор. Препринт № 1179. - М.: Институт проблем механики РАН, 2019. - 48 с.

26. Багдасарян Г.Э., Микилян М.А., Варданян И.А. Пантелеев А.В. Замкнутая цилиндрическая оболочка в сверхзвуковом потоке газа в присутствии температурного поля // Труды МАИ. 2018. №103. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=100822

27. Шилин И.А., Вестяк В.А. Интегральные представления функций Лежандра, возникающие при преобразовании Пуассона // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=22865