

# ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

---

УДК 629.782

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРЕ

Соколов Н.Л.

*Центральный научно-исследовательский институт машиностроения,  
ЦНИИМаш, ул.Пионерская, 4, Королёв, Московская область, 141070, Россия*

---

При решении ряда практически важных задач проектирования космических миссий представляется эффективным использование аналитических методов расчета траекторий движения космических аппаратов. В статье описывается аналитический метод расчета параметров движения космических аппаратов в атмосфере. После преобразования исходной системы дифференциальных уравнений получены конечные расчетные зависимости. Проведен анализ вычислительных погрешностей расчета параметров движения. Показано, что при полном качественном совпадении полученных данных и результатов численного интегрирования дифференциальных уравнений погрешности вычислений не превышают 2-3%.

*Ключевые слова:* уравнения движения космического аппарата, аналитический метод расчета траекторий спускаемого аппарата, рекуррентные соотношения для вычисления координат аэродинамического участка полета, вычислительные погрешности применения аналитического метода.

---

### Введение

Аналитические методы расчета траекторий движения космического аппарата (КА) в атмосфере получили широкое распространение при решении задач баллистического проектирования космических миссий и принятия управленческих решений. К областям их применения следует отнести нахождение первого приближения при решении краевых задач оптимального управления КА [1—3], построение бортовых алгоритмов управления [1, 10] и ряд других.

В отечественной и зарубежной литературе известен ряд аналитических методов расчета траекто-

рий движения КА в атмосфере. Анализ этих методов показывает, что их разработка, как правило, базируется на математических моделях полета КА в продольной плоскости, а также на некоторых упрощенных уравнениях движения аппарата в пространстве [4—8, 11].

### Исходная система уравнений движения КА

В настоящей статье рассматривается аналитический метод расчета пространственных маневров КА в атмосфере, описываемых системой дифференциальных уравнений движения в скоростной системе координат с учетом влияния на динамику

полета КА основных сил: гравитационных, аэродинамических, центробежных и кориолисовых в предположении центральности поля тяготения [1, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{\rho V^2 C_x(\alpha) S}{2m} - g \sin \theta - \\ &- \omega^2 r \cos \varphi (\sin \varphi \sin \varepsilon \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta); \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\rho V C_y(\alpha) S}{2m} \cos \gamma - \frac{g}{V} \cos \theta + \frac{V}{r} \cos \theta + \\ &+ 2\omega \cos \varphi \cos \varepsilon + \frac{\omega^2 r}{V} \cos \varphi (\sin \varphi \sin \varepsilon \sin \theta + \cos \varphi \cos \theta); \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{\rho V C_y(\alpha) S}{2m} \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} - \frac{V}{r} \cos \theta \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi - \frac{2\omega}{\cos \theta} \times \\ &\times (\cos \theta \sin \varphi - \sin \varepsilon \sin \theta \cos \varphi) - \frac{\omega^2 r}{V} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\cos \varepsilon}{\cos \theta}; \\ \frac{dh}{dt} &= V \sin \theta; \quad \frac{dL}{dt} = \frac{VR \cos \theta \cos \varepsilon}{r \cos \varphi}; \\ \frac{dL_\delta}{dt} &= \frac{VR}{r} \cos \theta \sin \varepsilon; \quad \lambda = \frac{L}{R}; \quad \varphi = \frac{L_\delta}{R}; \quad r = R + h; \\ g &= \frac{\mu}{r^2}; \quad K_\delta = \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}; \quad P_x = \frac{m}{C_x(\alpha) S}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $V$  — скорость движения КА;  $\theta$  — угол наклона вектора скорости КА к местному горизонту;  $\varepsilon$  — угол между проекцией вектора скорости КА к местному горизонту и местной параллелью;  $h$  — высота над поверхностью планеты;  $L$  — продольная дальность;  $L_\delta$  — боковая дальность;  $t$  — время полета;  $\lambda, \varphi$  — планетоцентрические долгота и широта соответственно;  $m$  — масса КА;  $r$  — планетоцентрическое расстояние КА;  $R$  — радиус планеты;  $\rho$  — плотность атмосферы;  $C_x, C_y$  — аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы;  $S$  — площадь миделева сечения КА;  $\omega$  — угловая скорость вращения планеты;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\gamma$  — угол крена КА;  $\alpha$  — угол атаки КА;  $\mu$  — произведение гравитационной постоянной на массу планеты;  $K_\delta$  — аэродинамическое качество;  $P_x$  — приведенная нагрузка на лобовую поверхность.

### Используемые допущения

Несмотря на то, что с применением существующих методов не могут быть достаточно точно аналитически решены основные задачи управления КА, ряд оригинальных преобразований и подходов,

обоснованных при их создании, целесообразно использовать в процессе разработки метода.

Так, учитывались допущения о малости угла наклона вектора скорости к местному горизонту  $\theta$ , а также боковой дальности полета  $L_\delta$  по сравнению с радиусом планеты  $R$  на ограниченных участках траектории движения КА [1, 5]:

$$\begin{aligned} \sin \theta &\approx \theta; \quad \cos \theta \approx 1; \\ \sin(L_\delta / R) &\approx L_\delta / R; \quad \cos(L_\delta / R) \approx 1. \end{aligned}$$

Кроме того, использовались допущения об экспоненциальном характере изменения плотности атмосферы  $\rho$  от высоты  $h$  и о преобладании аэродинамической силы  $F_A$  над суммой гравитационной, центробежной и кориолисовой сил  $F_{гп}, F_{ц}, F_{к}$  при полете КА в атмосфере [5]:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\beta h}; \quad F_A \gg F_{гп} + F_{ц} + F_{к}.$$

Научной новизной метода являются оригинальные преобразования функций  $M_1$  и  $M_2$  в виде рекуррентных кусочно-постоянных зависимостей на конечных интервалах траекторий полета КА:

$$\begin{aligned} M_1 &= \left( \frac{gr}{V^2} - 1 - \frac{\omega^2 r^2}{V^2} - \frac{2\omega r \cos \varepsilon}{V} \right) \cos \theta; \\ M_2 &= \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \theta}{\rho} \left( \frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{2\omega}{V} + \frac{\omega^2 r \cos \varepsilon}{V^2} \right). \end{aligned}$$

### Разработка аналитических зависимостей

С учетом указанных преобразований и допущений система дифференциальных уравнений (1) решается в виде

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{C_x S \rho V^2}{2m}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{C_y S \rho V}{2m} \cos \gamma - \rho V M_1; \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{C_y S \rho V}{2m} \sin \gamma - \rho V M_2; \quad \frac{dh}{dt} = V \theta; \\ \frac{dL}{dt} &= V \cos \varepsilon; \quad \frac{dL_\delta}{dt} = V \sin \varepsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что для проведения высокоточных ускоренных расчетов использовать систему уравнений (2) можно лишь в условиях достаточно частого уточнения текущих параметров движения КА и при прогнозировании траекторий дальнейшего полета аппарата на ограниченных временных интервалах. Это обеспечивается при условии разработки на основе уравнений (2) рекуррентных соотно-

шений для расчета координат полета КА на конечных интервалах кусочного постоянства не только рассмотренных выше переменных  $M_1$  и  $M_2$ , но и значений  $\theta$  и  $L_\sigma / R$ .

Еще одним элементом новизны разрабатываемого метода является переход к независимому аргументу  $\rho$  — плотности атмосферы планеты на высоте полета КА. Это обусловлено не только целесообразностью снижения порядка системы дифференциальных уравнений, но и тем, что на основе измерений этого параметра осуществляется идентификация полетных ситуаций КА с последующей выработкой рекомендаций по принятию управленческих решений.

После замены переменной  $dt = -d\rho / V\theta\rho\beta$  получим систему уравнений пятого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\rho} &= \frac{C_x S V}{2m\beta\theta}; \quad \frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{1}{\theta\beta} \left( \frac{C_y S}{2m} \cos \gamma - M_1 \right); \\ \frac{d\varepsilon}{d\rho} &= -\frac{1}{\theta\beta} \left( \frac{C_y S}{2m} \sin \gamma - M_2 \right); \\ \frac{dL}{d\rho} &= -\frac{\cos \varepsilon}{\theta\rho\beta}; \quad \frac{dL_\sigma}{d\rho} = -\frac{\sin \varepsilon}{\theta\rho\beta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя второе уравнение системы (3), определим закон изменения угла  $\theta$  в зависимости от параметра  $\rho$ :

$$\theta = -\sqrt{A_1\rho - A_2},$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\beta} \left( M_1 - \frac{C_y S}{2m} \cos \gamma \right); \\ A_2 &= \frac{2\rho_0}{\beta} \left( M_1 - \frac{C_y S}{2m} \cos \gamma \right) - \theta_0^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и в дальнейшем индекс «0» характеризует значения соответствующих переменных в начале интервалов кусочного постоянства указанных выше параметров. Для получения закона изменения скорости полета  $V$  от величины  $\rho$  проинтегрируем первое уравнение системы (3):

$$V = V_0 e^{-C_x S (\theta_0 - \theta) / m\beta A_1}. \quad (5)$$

Зависимость курсового угла  $\varepsilon$  от плотности атмосферы на высоте полета КА  $\rho$  можно получить в результате интегрирования третьего дифференциального уравнения системы (3) с учетом формулы (4):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - A_1 B_1 \left( \sqrt{A_1\rho - A_2} - \sqrt{A_1\rho_0 - A_2} \right). \quad (6)$$

Соотношение между значениями курсового и траекторного углов можно записать следующим образом:

$$\varepsilon = B_1\theta + B_2,$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{2}{A_1\beta} \left( \frac{C_y S}{2m} \sin \gamma - M_2 \right); \\ B_2 &= \varepsilon_0 + \frac{2}{A_1\beta} \left( \frac{C_y S}{2m} \sin \gamma - M_2 \right) \theta_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение для определения дальности полета КА:

$$L = L_0 - \frac{1}{\beta} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\cos \varepsilon}{\theta\rho} d\rho. \quad (7)$$

Интеграл  $J = \int \frac{\cos \varepsilon}{\theta\rho} d\rho$  вычисляется с помощью

разложения зависимости  $\cos \varepsilon$  в ряд Маклорена [9]. Тогда

$$\begin{aligned} L &\approx L_0 - \frac{1}{\beta} \left[ \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\theta\rho} - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\varepsilon^2 d\rho}{2!\theta\rho} + \dots + \int_{\rho_0}^{\rho} (-1)^{l+1} \frac{\varepsilon^{2(l-1)} d\rho}{[2(l-1)!\theta\rho]} \right] \approx \\ &\approx L_0 + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^l (-1)^{n+1} J_n. \end{aligned}$$

Получение аналитических зависимостей для определения интегралов  $J_n$  проводилось при переходе от независимого аргумента  $\rho$  к переменной  $\theta$ . Для любых  $n$  от 1 до  $l$  интегралы  $J_n$  вычисляются с помощью аналитических формул. Так, например,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\theta\rho} = \frac{2}{\sqrt{A_2}} \left( \arctg \frac{\theta}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_0}{\sqrt{A_2}} \right); \\ J_2 &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\varepsilon^2 d\rho}{2!\theta\rho} = B_1^2 (\theta - \theta_0) + B_1 B_2 \ln \frac{\theta^2 + A_2}{\theta_0^2 + A_2} + \\ &+ \left( \frac{B_2^2}{\sqrt{A_2}} - B_1^2 \sqrt{A_2} \right) \left( \arctg \frac{\theta}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_0}{\sqrt{A_2}} \right); \\ J_3 &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\varepsilon^4 d\rho}{4!\theta\rho} = \frac{B_1^4}{36} (\theta^3 - \theta_0^3) + \frac{B_1^3 B_2}{6} (\theta^2 - \theta_0^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{B_1^4}{12} \left( \frac{6B_2^2}{B_1^2} - 2A_2 \right) (\theta - \theta_0) + \frac{B_1 B_2}{6} (B_2^2 - A_2 B_1^2) \times \\
 & \times \ln \frac{\theta^2 + A_2}{\theta_0^2 + A_2} + \frac{B_1^4}{12\sqrt{A_2}} \left( \frac{4B_2^3}{B_1^3} - \frac{6A_2 B_2^2}{B_1^2} - \frac{4A_2 B_2}{B_1} + 2A_2^2 \right) \times \\
 & \times \left( \arctg \frac{\theta}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_0}{\sqrt{A_2}} \right).
 \end{aligned}$$

Приведем общую формулу для расчета интегралов  $J_n$ :

$$\begin{aligned}
 J_n \sum_{i=1}^n C_{in} (\theta^i - \theta_0^i) + C'_n \ln \frac{\theta^2 + A_2}{\theta_0^2 + A_2} + \\
 + C''_n \left( \arctg \frac{\theta}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_0}{\sqrt{A_2}} \right).
 \end{aligned}$$

Окончательно уравнение (7) для определения продольной дальности полета КА в атмосфере  $L$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 L = L_0 + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^l (-1)^{n+1} \times \\
 \times \left[ \sum_{i=1}^n C_{in} (\theta_0^i - \theta^i) + C'_n \ln \frac{\theta_0^2 + A_2}{\theta^2 + A_2} + C''_n \left( \arctg \frac{\theta_0}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta}{\sqrt{A_2}} \right) \right]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить зависимость для расчетов боковой дальности движения КА:

$$\begin{aligned}
 L_G = L_{G0} + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{i+1} (-1)^{n+1} \left[ \sum_{i=1}^n D_{in} (\theta_0^i - \theta^i) + \right. \\
 \left. + D'_n \ln \frac{\theta_0^2 + A_2}{\theta^2 + A_2} + D''_n \left( \arctg \frac{\theta_0}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta}{\sqrt{A_2}} \right) \right]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Здесь  $C_{in}, C'_n, C''_n, D_{in}, D'_n, D''_n$  — кусочно-постоянные коэффициенты на конечных интервалах изменения независимого аргумента, определяемые для каждого интегрального значения  $J_n$ .

Запишем формулу для расчета времени полета КА в атмосфере, полученную с учетом зависимостей (4) и (5):

$$t = -\frac{1}{\beta} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{V\theta\rho} = \frac{2}{\beta V_0} e^{C_x S \theta_0 / m \beta A_1} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{e^{-C_x S \theta_0 / m \beta A_1}}{\theta^2 + A_2} d\theta.$$

Входящий в представленную формулу интеграл

$$J^* = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{e^{-C_x S \theta_0 / m \beta A_1}}{\theta^2 + A_2} d\theta$$

можно вычислить с использованием разложения экспоненциальной зависимости  $e^{-C_x S \theta_0 / m \beta A_1}$  в степенной ряд [9]. Тогда

$$J^* = \sum_{i=1}^h \frac{(1)^{i-1} C_x^{i-1} S^{i-1}}{(i-1)! m^{i-1} \beta^{i-1} A_1^{i-1}} J_{i-1}^*,$$

где  $J_i^* = \int_{\theta_2}^{\theta} \frac{\theta^i d\theta}{\theta^2 + A_2}$ .

Интегралы  $J_i^* (i=1, 2, 3, \dots, k)$  определяются аналитическими формулами.

Например,

$$J_1^* = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta^2 + A_2} = \frac{1}{\sqrt{A_2}} \left( \arctg \frac{\theta}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_0}{\sqrt{A_2}} \right);$$

$$J_2^* = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\theta d\theta}{\theta^2 + A_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\theta^2 + A_2}{\theta_0^2 + A_2};$$

$$J_3^* = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\theta^2 d\theta}{\theta^2 + A_2} = (\theta - \theta_0) - \sqrt{A_2} \left( \arctg \frac{\theta}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_0}{\sqrt{A_2}} \right).$$

Окончательная зависимость для расчета времени полета  $t$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 t = \frac{2}{\beta V_0} e^{-C_x S \theta_0 / m \beta A_1} \left[ \sum_{i=1}^{R-2} E_i (\theta^i - \theta_0^i) + \right. \\
 \left. + E_{R-1} \ln \frac{\theta^2 + A_2}{\theta_0^2 + A_2} + E_R \left( \arctg \frac{\theta}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_0}{\sqrt{A_2}} \right) \right]. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Аналитические соотношения (4)–(10) дают возможность определить траекторные параметры пространственного движения КА в атмосфере и время полета при известных начальных условиях, весовых и проектно-баллистических характеристиках аппарата и параметров атмосферы.

Таким образом, расчеты траекторий движения КА проводились поэтапно по рекуррентным соотношениям. На каждом последующем  $j$ -м этапе кусочного постоянства функций  $M_1$  и  $M_2$ , а следовательно, и параметров

$$A_1, A_2, B_1, B_2, C_{in}, C'_n, C''_n, D_{in}, D'_n, D''_n, E_i, E_{R-1}, E_R$$

начальными значениями скорости  $V$ , траекторного и курсового углов  $\theta$  и  $\epsilon$ , продольной  $L$  и боковой  $L_{\sigma}$  дальностей и времени полета  $t$  принимались конечные величины соответствующих параметров на предыдущем  $(j-1)$ -м этапе:

$$\theta_j(\rho) = -\sqrt{A_1 \rho_j - A_2(\theta_{j-1})};$$

$$V_j(\rho) = V_{j-1} e^{-C_x S(\theta_{j-1} - \theta_j) / m \beta A_1};$$

$$\epsilon_j(\rho) = B_1 \theta_j + B_2(\theta_{j-1});$$

$$L_j(\rho) = L_0 + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^l (-1)^{n+1} \left[ \sum_{i=1}^n C_{in} (\theta_{j-1}^i - \theta_j^i) + C'_n \ln \frac{\theta_{j-1}^2 + A_2}{\theta_j^2 + A_2} + C''_n \left( \arctg \frac{\theta_{j-1}}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_j}{\sqrt{A_2}} \right) \right];$$

$$L_{\sigma j}(\rho) = L_{\sigma 0} + \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{l+1} (-1)^{n+1} \left[ \sum_{i=1}^n D_{in} (\theta_{j-1}^i + \theta_j^i) + D'_n \ln \frac{\theta_{j-1}^2 + A_2}{\theta_j^2 + A_2} + D''_n \left( \arctg \frac{\theta_{j-1}}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_j}{\sqrt{A_2}} \right) \right];$$

$$t_j(\rho) = \left[ \sum_{i=1}^R E_i (\theta_j^i + \theta_{j-1}^i) + E_{R-1} \ln \frac{\theta_j^2 + A_2}{\theta_{j-1}^2 + A_2} + E_R \left( \arctg \frac{\theta_j}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_{j-1}}{\sqrt{A_2}} \right) \right] \frac{2}{\beta V_0} e^{C_x S \theta_0 / m \beta A_1}.$$

Отметим, что с использованием разработанных рекуррентных соотношений обеспечивается возможность вычисления параметров рикошетирующих траекторий. В этом случае при интегрировании второго дифференциального уравнения системы (3) на участках, где  $\theta_j > 0$ , следует учитывать,

что  $\theta_j = \sqrt{A_1 \rho_j - A_2(\theta_{j-1})}$ .

**Оценка расчетных погрешностей**

Анализ проведенных вычислений показал, что погрешности расчетов с использованием предложенных аналитических формул существенно зависят как от интервала  $\Delta h$  (или соответствующего ему интервала  $\Delta \rho$ ), на котором значения  $M_1$ ,  $M_2$  и другие отмеченные ранее параметры принимаются кусочно-постоянными, так и от натуральных чисел  $l$

и  $k$ , оставленных членов разложения зависимостей  $\sin \epsilon$ ,  $\cos \epsilon$  и  $e^{C_x S \theta_0 / m \beta A_1}$  в степенные ряды.

Проведенный в широком диапазоне изменения исходных данных и начальных условий сравнительный анализ результатов, полученных известными методами численного интегрирования системы уравнений (1) с использованием экспоненциальной модели атмосферы [1] и с применением приближенных аналитических зависимостей, показал, что при полном качественном совпадении количественно приближенные данные различаются не более чем на 2,5—5% при  $\Delta h = 5$  км,  $l = k = 3$ .

В качестве примеров в табл. 1 и 2 и на рис. 1 приведены результаты расчетов конечных характеристик баллистического спуска аппарата в атмосфере: продолжительности полета  $t_k$ , конечных значений скорости и дальности  $V_k, L_k$ ; параметров траекторий выведения КА на орбиту искусственного спутника Земли комбинированным способом [1, 5] в момент рикошета  $V^*, h^*, \epsilon^*, L^*, L_{\sigma}^*$  (столбец 1 — численное решение, 2 — приближенное); значений  $V_k$  и  $\epsilon_k$  в момент вылета аппарата из атмосферы. Видно, что для всего диапазона варьируемых данных погрешности  $\Delta t_k$  не превышают 2,8%,  $\Delta V_k - 4,8\%$ ,  $\Delta L_k - 4,9\%$ ,  $\Delta V^* - 2,5\%$ ,  $\Delta h^* - 0,7\%$ ,  $\Delta \epsilon^*$  и  $\Delta L^* - 5\%$ ,  $\Delta L_{\sigma}^* - 3,7\%$ .

Запишем конечные рекуррентные формулы для определения продольной  $L(\rho)$  и боковой  $L_{\sigma}(\rho)$  дальностей полета КА на  $j$ -м участке кусочного постоянства в более компактном виде при  $l = 3$ :

$$L = L_0 + \frac{1}{\beta} \left[ \sum_{i=1}^3 N_i (\theta_{j-1}^i - \theta_j^i) + N_4 \ln \frac{\theta_{j-1}^2 + A_2}{\theta_j^2 + A_2} + N_5 \left( \arctg \frac{\theta_{j-1}}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_j}{\sqrt{A_2}} \right) \right]; \tag{11}$$

$$L_{\sigma} = L_{\sigma 0} + \frac{1}{\beta} \left[ \sum_{i=1}^4 P_i (\theta_{j-1}^i - \theta_j^i) + P_5 \ln \frac{\theta_{j-1}^2 + A_2}{\theta_j^2 + A_2} + P_6 \left( \arctg \frac{\theta_{j-1}}{\sqrt{A_2}} - \arctg \frac{\theta_j}{\sqrt{A_2}} \right) \right].$$

Таблица 1

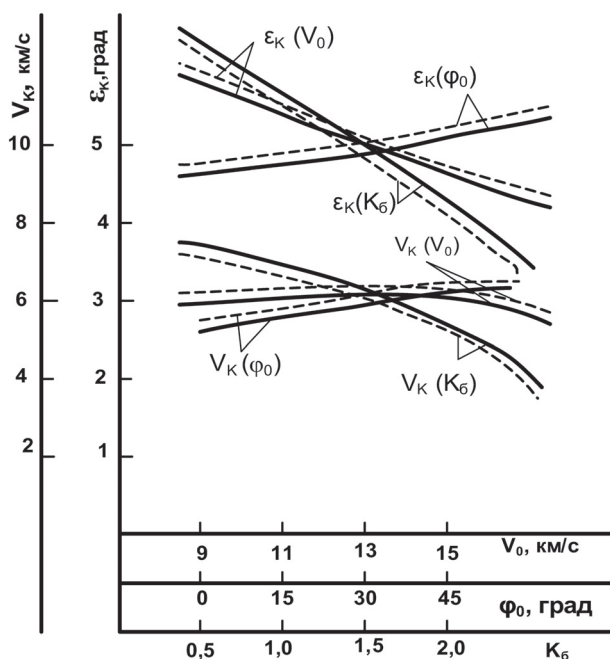
Погрешности расчетов траекторных параметров баллистического спуска КА с орбиты искусственного спутника

Земли (исходные параметры:  $h_0 = 300$  км,  $V = 150$  м/с,  $\nu = 180^\circ$ ,  $P_x = 250$  кг/м<sup>2</sup>,  $h_k = 15$  км,  $\rho(h)$  – номинальная)

Варьируемые параметры	$t_k, c$		$\Delta t_k, \%$	$V_k, км/с$		$\Delta V_k, \%$	$L_k, км$		$\Delta L_k, \%$
Номинальный вариант	438	428	2,28	0,22	0,226	-2,73	1879,15	1800,79	4,17
$h_0 = 330$ км	436	424	2,75	0,24	0,248	-3,33	1854,19	1791,33	3,39
$h_0 = 270$ км	440	432	1,82	0,21	0,217	-3,33	1921,32	1864,45	2,96
$\Delta V = 165$ м/с	411	405	1,46	0,252	0,258	-2,38	1659,81	1579,81	4,82
$\Delta V = 135$ м/с	480	464	3,33	0,196	0,201	-2,55	2143,73	2102,36	1,93
$\nu = 183^\circ$	438	428	2,28	0,216	0,223	-3,24	1863,54	1809,87	2,88
$\nu = 177^\circ$	438	428	2,28	0,216	0,223	-3,24	1863,54	1809,87	2,88
$P_x = 285$ кг/м <sup>2</sup>	435	426	2,07	0,208	0,215	-3,37	1924,42	1847,82	3,98
$P_x = 212$ кг/м <sup>2</sup>	433	424	2,08	0,229	0,236	-3,06	1803,17	1723,47	4,42
$h_k = 10$ км	468	455	2,78	0,167	0,175	-4,79	2031,62	1996,27	1,74
$h_k = 20$ км	409	403	1,47	0,261	0,272	-4,21	1612,38	1536,76	4,69
$\rho = \rho_{min}$	434	424	2,30	0,21	0,218	-3,81	1895,35	1814,80	4,25
$\rho = \rho_{max}$	442	432	2,26	0,233	0,238	-2,15	1844,82	1769,37	4,09

Примечание. Рассматривалась одноимпульсная схема схода КА с орбиты с использованием следующих обозначений:  $h_0$  – высота орбиты;  $\Delta V$  – импульс характеристической скорости, подаваемый для схода КА с орбиты;  $\nu$  – угол между вектором скорости и вектором тяги;  $P_x$  – приведенная нагрузка на лобовую поверхность;  $h_k$  – конечная высота участка аэродинамического торможения КА в атмосфере. Расчеты проводились для трех экспоненциальных моделей атмосферы:

$$\rho_{ном} : \rho_0 = 1,23 \text{ кг/м}^3, \beta = 0,165 \text{ км}^{-1}; \rho_{min} : \rho_0 = 1,17 \text{ кг/м}^3, \beta = 0,18 \text{ км}^{-1}; \rho_{max} : \rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3, \beta = 0,15 \text{ км}^{-1}.$$



В этом случае зависимости для расчета параметров  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) и  $P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ), входящие в формулы для расчета дальностей полета, запишутся следующим образом:

Рис. 1. Зависимости скорости  $V_k$  и траекторного угла  $\epsilon_k$  в момент вылета КА из атмосферы от скорости  $V_0$ , ширины входа  $\phi_0$  и аэродинамического качества  $K_\beta$  ( $P_x = 300$  кг/м<sup>2</sup>,  $\gamma = 30^\circ$ ,  $h_\alpha = 1000$  км, номинальная модель атмосферы). Сплошные линии – численное решение; штриховые – приближенное решение



Таблица 2

## Погрешности расчетов траекторных параметров выведения КА на орбиту искусственного спутника Земли

(исходные параметры:  $V_0 = 13 \text{ км/с}$ ,  $P_x = 300 \text{ кг/м}^2$ ,  $\rho_0 = 1,23 \text{ кг/м}^3$ ,  $\beta = 0,16 \text{ км}^{-1}$ ,  $h_\alpha = 1000 \text{ км}$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  $K_6 = 0,5$ ,  $\theta^* = 0$ )

Варьируемые параметры	$\theta_0$ , град	$V^*$ , км/с		$\Delta V^*$ , %	$h^*$ , км		$\Delta h^*$ , %	$\epsilon^*$ , град	$\Delta \epsilon^*$ , %	$L^*$ , км		$\Delta L^*$ , %	$\Delta I_6^*$ , км		$\Delta \Delta I_6^*$ , %	
		10,12	10,40		40,44	40,30				344,4	330,3		21,3	21,7		
$K_6 = 0,5$	-9,77	10,12	10,40	-2,0	40,44	40,30	0,3	3,5	3,65	-4,3	344,4	330,3	4,1	21,3	21,7	-1,9
$V_0 = 14 \text{ км/с}$	-10,84	10,57	10,86	-2,5	38,69	38,60	0,23	2,89	3,0	-3,8	308,6	294,1	4,7	15,6	15,7	-0,6
$V_0 = 12,5 \text{ км/с}$	-9,22	10,40	10,22	1,7	41,44	41,20	0,5	4,2	4,38	-4,3	387,4	375,0	3,2	28,5	29,5	-3,5
$K_6 = 0,3$	-7,76	10,40	10,49	-0,8	43,25	43,10	0,3	4,96	5,21	-5,0	574,5	557,8	2,9	49,9	50,9	-2,0
$K_6 = 0,7$	-12,47	10,10	10,15	-0,4	38,00	37,80	0,5	2,77	2,89	-4,3	264,7	251,2	5,10	12,8	13,2	-3,1
$P_x = 100 \text{ кг/м}^2$	-9,51	10,18	10,40	-2,0	47,00	46,90	0,2	3,82	3,94	-3,10	362,8	349,4	3,7	24,2	25,1	-3,7
$P_x = 500 \text{ кг/м}^2$	-9,99	10,09	10,33	-2,2	37,28	37,0	0,7	3,62	3,68	-1,7	329,9	315,7	4,3	20,9	21,1	-1,0
$\rho = \rho_{\max}$	-9,61	10,16	10,40	-2,2	45,26	45,10	0,5	3,69	3,80	-3,0	351,3	336,2	4,3	22,7	23,4	-3,1
$\rho = \rho_{\min}$	-9,91	10,25	10,40	-1,4	36,32	36,10	0,6	3,45	3,59	-4,1	335,0	321,6	4,0	20,2	20,6	-2,0
$h_\alpha = 500 \text{ км}$	-10,46	10,03	9,98	0,4	39,12	38,89	0,7	3,28	3,40	-3,7	317,2	302,9	4,5	18,2	18,6	-2,2
$h_\alpha = 1500 \text{ км}$	-9,48	10,28	10,44	1,5	41,04	40,85	0,3	4,08	4,11	-0,7	370,2	357,2	3,5	26,4	27,5	-4,2
$K_6 = -0,5$	-5,24	11,64	11,50	1,2	56,92	56,69	0,4	4,98	5,01	-0,6	931,4	921,2	1,1	81,2	84,1	-3,6

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{B_1^2 B_2^2}{2} - \frac{B_1^4 A_2}{6} - B_1^2; \quad N_2 = \frac{B_1^3 B_2}{6}; \quad N_3 = \frac{B_1^4}{36}; \\
 N_4 &= \frac{B_1 B_2}{6} (B_2^2 - A_2 B_1^2 - 6); \\
 N_5 &= \frac{1}{\sqrt{A_2}} \times \\
 &\times \left( 2 - B_2^2 + B_1^2 A_2 + \frac{B_1 B_2^3}{3} - \frac{B_1^2 B_2^2 A_2}{2} - \frac{B_1^3 B_2 A_2}{3} + \frac{B_1^4 A_2}{6} \right); \\
 P_1 &= -3B_1^2 B_2 + 10B_1^2 B_2^3 - 5B_1^4 B_2 A_2; \\
 P_2 &= \frac{1}{2} (-B_1^3 + 10B_1^3 B_2^2 - B_1^5 A_2); \\
 P_3 &= \frac{5B_1^4 B_2}{3}; \quad P_4 = \frac{B_1^5}{4} - 3B_1 B_2^2; \\
 P_5 &= \frac{1}{2} \times \\
 &\times (5B_1 B_2^4 A_2 - 10B_1^3 B_2^2 A_2 + B_1^5 B_2^2 - 3B_1 B_2^2 + B_1^3 A_2 + 2B_1); \\
 P_6 &= \frac{1}{\sqrt{A_2}} \times \\
 &\times (2B_2 - B_2^3 + 3B_1^2 B_2 A_2 + B_2^5 - 10B_1^2 B_2^3 A_2 + 5B_1^4 B_2 A_2^2).
 \end{aligned}$$

Формулы для вычисления кусочно-постоянных коэффициентов  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 4$ ), входящих в уравнение для определения времени полета (10), при  $k = 3$  также будут иметь более компактный вид:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{C_x S}{\beta m A_1} \right)^2; \quad E_2 = \frac{1}{12} \left( \frac{C_x S}{\beta m A_1} \right)^3; \\
 E_3 &= \frac{C_x S}{2\beta m A_1} \left( 1 - \frac{A_2 C_x^2 S^2}{6m^2 \beta^2 A_1^2} \right); \\
 E_4 &= \frac{1}{\sqrt{A_2}} \left( 1 - \frac{A_2 C_x^2 S^2}{2m^2 \beta^2 A_1^2} \right).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Наряду с увеличением значений  $l$  и  $k$  существует дополнительная возможность снижения погрешностей вычисления расчетных параметров путем уменьшения продолжительности участков кусочно-постоянства  $\Delta h$ . Так, при  $l = k = 5$  и  $\Delta h = 1$  км погрешности не превосходят 1,5–3,5%, а при  $l = k = 10$  и  $\Delta h = 0,5$  км — 1–2,5%. Однако при этом расчетные формулы (8) и (9) принимают весьма громоздкий вид и продолжительность вычислений существенно возрастает (в ~10–15 раз). Очевидно, что это будет негативно влиять на оператив-

ность и эффективность проведения расчетов управляющих параметров в бортовом исполнении.

Итак, проведенные исследования показали, что на этапе предварительного проектирования для расчета траекторий пространственного движения КА в атмосфере с помощью предложенных зависимостей целесообразно ограничиться значением  $l = k = 3$  и  $\Delta h = 5$  км.

### Применение аналитических зависимостей для расчета квазиоптимальных траекторий КА

Еще одним важным направлением применения разработанного метода является проведение качественного анализа квазиоптимальных траекторий движения КА. Это позволяет без использования сложных вычислительных процедур численного интегрирования дифференциальных уравнений и решения итерационных краевых задач дать предварительную оценку основным критериям оптимальности траекторий движения КА. С помощью математического аппарата получения таких оценок может быть значительно повышена эффективность предварительного проектирования космических миссий, определения облика, проектно-баллистических характеристик, схем полета перспективных КА дальнего космоса.

Приближенные аналитические расчетные зависимости (4)–(16), применение которых дало высокий эффект при вычислении траекторных параметров пространственного движения аппарата с постоянным или нулевым значениями аэродинамического качества в условиях предварительного определения законов управления КА, могут быть использованы и при решении сложных вариационных задач. Как установлено, структура оптимального уравнения аэродинамическим качеством  $K_{эф}$  при отсутствии ограничений на фазовые координаты представляет собой одно- или двухразовое переключение  $K_{эф}$  с одного экстремального значения на другое [1, 5]. Это дает возможность последовательно проводить расчеты на каждом участке кусочного постоянства  $K_{эф}$ , а затем сопрягать полученные решения. Моменты переключений аэродинамического качества определяются путем использования известного метода последовательных приближений [1]. Расчеты показывают, что, при условии знания характера изменения структуры переключений  $K_{эф}$  в зависимости от высоты условного перицентра траектории входа аппарата в атмосферу, для нахождения квазиоптимальных траекторий полета достаточно проведения трех-четырёх итераций при решении



краевых задач. При наличии ограничений, а также при двухпараметрическом управлении КА углами крена и атаки данные, вычисленные с помощью разработанного метода, можно рассматривать как первое приближение, что значительно повышает эффективность качественного анализа оптимальных траекторий движения КА для широкого диапазона условий полета, проектно-баллистических характеристик аппарата и параметров атмосферы.

Проведенный сравнительный анализ позволил установить полное качественное совпадение точных и приближенных результатов решения задач оптимального управления. Так, в качестве примеров рассмотрены задачи максимизации скорости  $V_{k\max}$  и курсового угла  $\epsilon_{k\max}$  при вылете КА из атмосферы при использовании комбинированного способа формирования орбит искусственного спутника Земли при входе КА в атмосферу с траектории межпланетного перелета. Как отмечалось, обеспечение максимума скорости  $V_{k\max}$  приводит к снижению потребных энергозатрат, а достижение  $\epsilon_{k\max}$  дает возможность эффективного изменения плоскости полета без дополнительного расхода топлива. На рис. 2 приведены зависимости изменения значений скорости  $V_{k\max}$  и курсового угла  $\epsilon_{k\max}$  от скорости входа КА в атмосферу  $V_0$  и аэродинамического

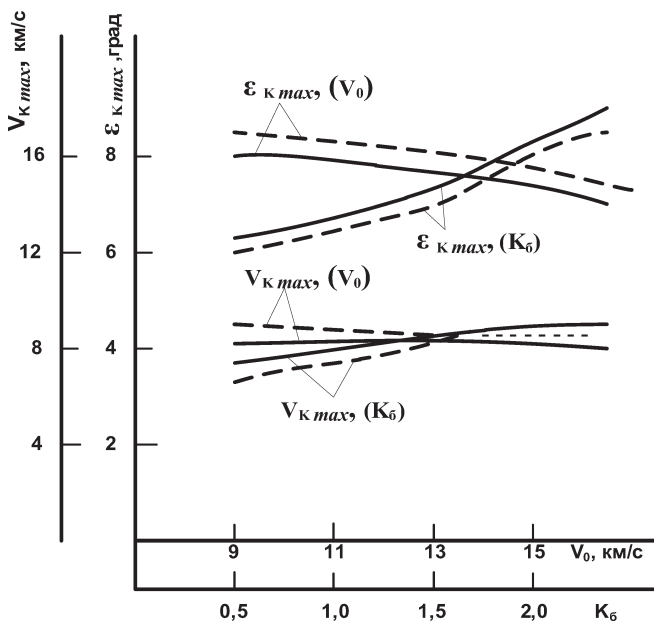


Рис. 2. Зависимости максимальных значений  $V_k$  и  $\epsilon_k$  от скорости входа  $V_0$  и аэродинамического качества  $K_6$  ( $P_x = 300 \text{ кг/м}^2$ ,  $h_a = 1000 \text{ км}$ ) (номинальная модель атмосферы). Сплошные линии — численное решение, штриховые — приближенное решение

качества  $K_6$ . Видно, что погрешности вычислений  $\delta V_{k\max}$  и  $\delta \epsilon_{k\max}$  в достаточно широком диапазоне изменения значений  $V_0$  и  $K_6$  не превышают  $\pm 3-4\%$ .

На рис. 3 представлены зависимости погрешностей вычислений значений максимальной скорости вылета КА из атмосферы  $V_{k\max}$  и максимальной скорости движения КА в апоцентре формируемой орбиты  $V_{a\max}$  от аэродинамического качества  $K_6$ , скорости входа аппарата в атмосферу  $V_0$ , приведенной нагрузки на лобовую поверхность  $P_x$  и высоты апоцентра формируемой орбиты  $h_a$ . Показано, что в широком диапазоне изменения указанных пара-

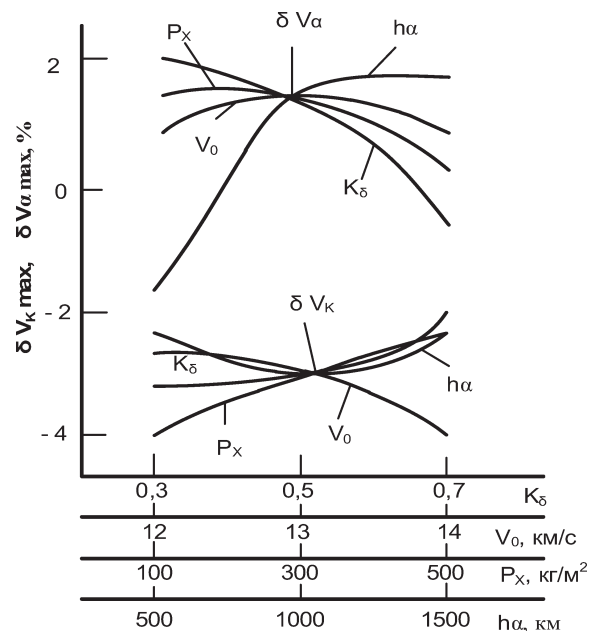


Рис. 3. Зависимости погрешностей вычисления скорости вылета из атмосферы  $V_{k\max}$  и скорости в апоцентре формируемой орбиты  $V_{a\max}$  от аэродинамического качества  $K_6$ , скорости входа  $V_0$ , приведенной нагрузки на лобовую поверхность  $P_x$  и высоты апоцентра формируемой орбиты  $h_a$  (номинальная модель атмосферы)

метров погрешности вычисления значений  $\delta V_{k\max}$  составляют  $\sim -2...-4\%$ , а  $\delta V_{a\max} \sim -1,5...2\%$ .

**Выводы**

Таким образом, с использованием разработанного аналитического метода представляется возможным получить высокоточный прогноз движения КА в атмосфере, в том числе при квазиоптимальном управлении для различных критериев оптимальности при поэтапном уточнении координат

полета аппарата. Разработанные формулы обеспечивают высокое быстродействие проводимых расчетов в широком диапазоне изменения исходных данных, краевых условий и могут быть положены в основу формирования алгоритмов управления в виде аналитических зависимостей управляющих воздействий от текущих и требуемых состояний аппаратов, что является важным фактором обеспечения автономного управления КА.

### Библиографический список

1. *Иванов Н.М., Мартынов А.И.* Движение космических летательных аппаратов в атмосферах планет. — М.: Наука, 1985. — 384 с.
2. *Баранов В.Н., Зо Л.У.* Решение задачи оптимизации управления пространственным движением легкого самолета на основе принципа максимума Понтрягина // Труды МАИ. 2011. № 46. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=26197>
3. *Пантелеев А.В., Летова Т.А., Помазуева Е.А.* Применение методов глобальной оптимизации для параметрического синтеза обобщенного пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора в задаче управления полетом // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=55635>
4. *Чепмен Д.Р.* Приближенный аналитический метод исследования входа тел в атмосферы планет. — М.: Иностранная литература, 1962. — 298 с.
5. *Соколов Н.Л.* Аналитический метод исследования оптимального управления КА при движении в атмосфере // Лесной вестник. 2015. Т. 19. № 3. С. 37-44.
6. *Елкин К.С., Куцев В.Н., Манько А.С., Михайлов В.М.* Расчет входа в атмосферу десантного модуля проекта «ЭкзоМарс» // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21. № 4. С. 79-86.
7. *Соколов Н.Л.* Аналитический метод расчета траекторий движения космического аппарата при проведении ракетодинамических маневров и коррекций // Информация и космос. 2016. № 2. С. 127-133.
8. *Ярошевский В.А., Вэн Неуен.* Аналитические и полуаналитические методы исследования траекторий входа в атмосферу // Ученые записки ЦАГИ. 1997. Т. 28. № 3-4. С. 2-35.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Наука, 1969. — 800 с.
10. *Kontinos D.A., Wright M.J.* Introduction: Atmospheric entry of the stardust sample return capsule // Journal of Spacecraft and Rockets. 2010. № 5. Vol. 47. Pp. 705-707.
11. *David A. Spencer, Robert Tolson.* Airobraking Cost and Risk Decisions // Journal of Spacecraft and Rockets. 2007. Vol. 44. № 6. Pp. 1285-1293.

## ANALYTICAL CALCULATIONS OF A SPACECRAFT MOTION PATH IN ATMOSPHERE

Sokolov N.L.

*Central Research Institute of Machine Building,  
4, Pionerskaya str., Korolev, Moscow region, 141070, Russia*

### Abstract

Employing analytical methods for computing spacecraft movement trajectories seems effective while solving a number of problems of practical importance. Analysis of the existing methods reveals that they are based mainly on mathematical models of spacecraft flight along a fore-and-aft plane, as well as some simplified spacecraft motion in space equations. It limits the possibility of their use while solving a number of space exploration problems of practical importance. The paper describes an analytical method for spacecraft atmosphere movement parameters computation. The scientific novelty of the developed method consists in transformation of a number functions in the form of recurrent piecewise-constant dependencies at the finite intervals of spacecraft flight trajectories.

After transformation of initial system of differential equations, we obtained the final computation dependencies for velocity and flight altitude, trajectory and course angles, longitudinal and cross range via the atmospheric density. Selection of such an argument, namely atmospheric density results from the fact that spacecraft flight situations can be identified based on calculations of this parameter with further recommendations for control decision-making. Based on the obtained equations we can compute not only the coordinates of spacecraft atmosphere movement, but evaluate the main characteristics, effecting design and technological decision making while a spacecraft design. Particularly, the fast evaluation of maximum overloads values, affecting a spacecraft in aerodynamic deceleration phases is provided. Analytic dependencies

can be used while solving a number of variational problems in the conditions of preliminary definition of spacecraft control structure.

The tabular matter and graphical data are presented. Computation errors of spacecraft motion trajectory parameters are analyzed. It is shown that these computation errors do not exceed 2-3% with the total qualitative matching of obtained data and of differential equations numerical integration results. Employing of the developed analytical method allows obtain the highly precise computation results of spacecraft motion parameters in the atmosphere. The developed formulas provide high speed of calculations for a wide range of initial data, boundary conditions, and can form the base for spacecraft onboard control algorithms development.

**Keywords:** spacecraft motion equations, descent vehicle trajectory calculation analytical method, aerodynamic flight stage coordinates computation recursion relations, analytical method computational errors.

## References

1. Ivanov N.M., Martynov A.I. *Dvizhenie kosmicheskikh letatel'nykh apparatov v atmosfere planet* (Spacecraft movement in atmospheres of planets), Moscow, Nauka, 1985, 384 p.
2. Baranov V.N., Zo L.U. *Trudy MAI*, 2011, no. 46, available at: <http://www.mai.ru/science/trudy/eng/published.php?ID=26197>
3. Panteleev A.V., Letova T.A., Pomazueva E.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 79, available at: <http://www.mai.ru/science/trudy/eng/published.php?ID=55635>
4. Chepmen D.R. *Priblizhennyi analiticheskii metod issledovaniya vkhoda tel v atmosfery planet* (Approximate analytical method for bodies' planetary atmospheres entry study), Moscow, Inostrannaya literatura, 1962, 298 p.
5. Sokolov N.L. *Lesnoi vestnik*, 2015, vol. 19, no. 3, pp. 37-44.
6. Elkin K.S., Kushchev V.N., Man'ko A.S., Mikhailov V.M. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta*, 2014, vol. 21, no. 4, pp. 79-86.
7. Sokolov N.L. *Informatsiya i kosmos*, 2016, no. 2, pp. 127-133.
8. Yaroshevskii V.A., Ven Nguen. *Uchenye zapiski TsAGI*, 1997, vol. 28, no. 3-4, pp. 2-35.
9. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (Course of differential and integral calculus), Moscow, Nauka, 1969, 800 p.
10. Kontinos D.A., Wright M.J. Introduction: Atmospheric entry of the stardust sample return capsule. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2010, vol. 47, no. 5, pp. 705-707.
11. David A. Spencer, Robert Tolson. Airobraking Cost and Risk Decisions. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2007, vol. 44, no. 6, pp. 1285-1293.